



FIDESYS

система прочностного анализа

Версия 1.6

Отчёт по тестированию



Содержание

Содержание.....	1
Статическое нагружение	7
Тесты с точным аналитическим решением	7
Тест 1.1.1: Одноосное растяжение пластины с круговым вырезом	7
Тест 1.1.2: Всестороннее растяжение пластины с круговым вырезом.....	11
Тест 1.1.3: Одноосное растяжение пластины с эллиптическим вырезом	15
Тест 1.1.4: Всестороннее растяжение пластины с эллиптическим вырезом.....	19
Тест 1.1.5: Нагружение цилиндра внутренним давлением.....	23
Тест 1.1.6: Круглая цилиндрическая труба под воздействием внутреннего и внешнего давлений (2D).....	27
Тест 1.1.7: Круглая цилиндрическая труба под воздействием внутреннего и внешнего давлений (3D).....	31
Тест 1.1.8: Растяжение балки	35
Тест 1.1.9: Задача Буссинеска	37
Тест 1.1.10: Равномерно нагруженная круглая пластина, защемленная по контуру	39
Тест 1.1.11: Равномерно нагруженная круглая пластина, свободно опертая по контуру	43
Тест 1.1.12: Круглая пластина, нагруженная концентрически	47
Тест 1.1.13: Квадратная пластина, защемленная по контуру и нагруженная в центре.....	49
Тест 1.1.14: Квадратная пластина, два противоположных края которой свободно оперты, два других свободны	51
Тест 1.1.15: Квадратная свободно опертая пластина под совместным действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и равномерного растяжения.....	55
Тест 1.1.16: Консольная балка с сосредоточенной силой на свободном конце	59
Тест 1.1.17: Консольная балка с сосредоточенным моментом на свободном конце	63
Тест 1.1.18: Балка с распределенной нагрузкой.....	67
Тест 1.1.19: Определение усилий в стержневой системе	71
Тест 1.1.20: Консольная балка с распределенной нагрузкой на свободном конце	73
Тест 1.1.21: Вертикальный консольный стержень.....	75
Тесты с известным численным решением.....	77
Тест 1.2.1: Нагружение эллипсоидальной пластинки (2D).....	77
Тест 1.2.2: Нагружение эллипсоидальной пластинки (3D).....	79
Тест 1.2.3: Цилиндр под внутренним давлением	81
Тест 1.2.4: Нагружение сферической оболочки.....	85
Тест 1.2.5: Осевая нагрузка для тонкостенного цилиндра.....	89
Тест 1.2.6: Точечная сила для цилиндрической оболочки.....	91



Тест 1.2.7: Гидростатическое давление для тонкостенного цилиндра	93
Тест 1.2.8: Усеченная сферическая оболочка	95
Тест 1.2.9: Арка с шарнирным опиранием	99
Тест 1.2.10: Арка с защемлением	101
Тест 1.2.11: Консольная рама	102
Тест 1.2.12: Деформация балки под действием осевой силы	103
Тест 1.2.13: Консольная балка с распределенной нагрузкой	104
Тест 1.2.14: Изгиб тонкостенной трубы под собственным весом (балки)	105
Тест 1.2.15: Изгиб тонкостенной трубы под собственным весом (оболочки)	106
Тест 1.2.16: Свод крыши под собственным весом	107
Тест 1.2.17: Пространственная пластинчатая система (3D)	109
Тест 1.2.18: Равномерно нагруженная пластина, защемленная по контуру	111
Тест 1.2.19: Трехступенчатая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенными силами	113
Тест 1.2.20: Определение силы реакции балки	115
Тест 1.2.21: Определение напряжений для балки	116
Тест 1.2.22: Изгиб конической пластины	117
Динамическое нагружение	119
Тесты с точным аналитическим решением	119
Тест 2.1.1: Задача Стокса	119
Тест 2.1.2: Взрывное давление в сферической полости	121
Анализ собственных частот	123
Тесты с известным аналитическим или экспериментальным решением	123
Тест 3.1.1: Собственные частоты квадратной пластинки с защемлённой стороной	123
Тест 3.1.2: Собственные частоты свободной квадратной пластинки	127
Тест 3.1.3: Собственные частоты квадратной пластинки с защемлением по периметру	131
Тест 3.1.4: Собственные частоты тонкой пластики в плоскости	133
Тест 3.1.5: Собственные частоты консольной пластики с разными толщинами	135
Тест 3.1.6: Собственные частоты сферической оболочки	137
Тест 3.1.7: Собственные частоты колена полой трубы	139
Тест 3.1.8: Собственные частоты изогнутого пространственного стержня (задача Ховгаарда)	141
Тест 3.1.9: Собственные частоты трёхмерной рамы	143
Тест 3.1.10: Собственные частоты треугольной пластики (2D)	145
Тест 3.1.11: Собственные частоты круглой пластинки (3D)	147
Тест 3.1.12: Собственные частоты консольной балки (3D)	149
Тест 3.1.13: Собственные частоты тонкой полусферы (3D)	151



Тест 3.1.14: Собственные частоты армированной оболочки	153
Тест 3.1.15: Собственные частоты консольной балки, предварительно нагруженной силой (3D)	155
Тесты с известным численным решением	157
Тест 3.2.1: Собственные частоты свободно опертой квадратной пластинки (3D)	157
Тест 3.2.2: Собственные частоты свободно опертой прямоугольной балки (3D)	159
Тест 3.2.3: Собственные частоты свободной квадратной пластинки	161
Тест 3.2.4: Собственные частоты свободно опертой квадратной пластинки	163
Тест 3.2.5: Собственные частоты цилиндрической пластинки с защемлением	165
Тест 3.2.6: Собственные частоты консольной пластинки	167
Тест 3.2.7: Собственные частоты свободно опертой прямоугольной балки	169
Тест 3.2.8: Собственные частоты креста в плоскости	171
Тест 3.2.9: Собственные частоты двойного креста в плоскости	173
Тест 3.2.10: Собственные частоты кругового кольца	175
Нелинейные задачи	177
Тесты с точным аналитическим решением	177
Тест 4.1.1. Большие перемещения квадратной мембраны	177
Тест 4.1.2. Полый шар под действием давления	179
Тесты с известным численным решением	183
Тест 4.2.1. Изгиб консольной балки	183
Тест 4.2.2. Цилиндр, нагруженный внутренним давлением (а)	185
Тест 4.2.3. Цилиндр, нагруженный внутренним давлением (б)	189
Тест 4.2.4. Толстостенная труба под действием температурной нагрузки	193
Тест 4.2.5. Растяжение ортотропного куба	196
Тест 4.2.6. Цилиндр под давлением. Материал Муни-Ривлина (2D)	197
Тест 4.2.7. Разрушение куба под действием давления	198
Линейно-упругая устойчивость	200
Тесты с точным аналитическим решением	200
Тест 5.1.1: Устойчивость консольного тела	200
Тест 5.1.2: Устойчивость шарнирно опертой пластины	204
Тест 5.1.3: Устойчивость квадратной пластины при двустороннем сжатии	206
Тест 5.1.4: Устойчивость балки, заделанной на одном конце и шарнирно опертой на другом	208
Тест 5.1.5: Консольное тело, нагруженное двумя сжимающими силами	211
Тест 5.1.6: Устойчивость шарнирно опертой балки	213
Тест 5.1.7: Устойчивость цилиндрической оболочки	215
Тест 5.1.8: Устойчивость балки, закрепленной на концах, от температурного воздействия	217



Задачи теплопроводности и термоупругости	221
Тесты с известным аналитическим решением.....	221
Тест 6.1.1: Полая сфера при постоянном температурном нагружении (3D).....	221
Тест 6.1.2: Сплошная сфера при постоянном температурном нагружении (3D).....	223
Тест 6.1.3: Полый цилиндр с постоянным температурным нагружением (2D).....	225
Тест 6.1.4: Сплошной диск с постоянным температурным нагружением(2D).....	227
Тесты с известным численным решением.....	229
Тест 6.2.1: Полый цилиндр под воздействием постоянной температуры на внутреннюю и внешнюю поверхность (2D)	229
Тест 6.2.2: Полый цилиндр под воздействием постоянной температуры на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D)	233
Тест 6.2.3: Полый цилиндр под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (2D).....	237
Тест 6.2.4: Полый цилиндр под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D).....	240
Тест 6.2.5: Полый цилиндр из двух материалов под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (2D)	244
Тест 6.2.6: Полый цилиндр из двух материалов под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D)	246
Тест 6.2.7: Теплопроводность цилиндрической стены (2D)	248
Тест 6.2.8: Теплопроводность цилиндрической стены (3D)	250
Тест 6.2.9: Одномерная стена под воздействием постоянной конвекции (2D)	252
Тест 6.2.10: Одномерная стена под воздействием постоянной конвекции (3D).....	256
Тест 6.2.11: Цилиндрический стержень под воздействием теплового потока (балочная модель).....	260
Тест 6.2.12: Цилиндрический стержень под воздействием конвективного теплообмена (балочная модель).....	262
Тест 6.2.13: Одномерная нестационарная теплопередача	264
Контактные задачи	268
Тест 7.1. Контакт цилиндрического ролика (2D)	268
Тест 7.2. 3D-Штамп (цилиндр с закругленными гранями).....	274
Тест 7.3. Нагружение штифта (3D).....	282
Тест 7.4. Задача Герца для двух полусфер	286
Расчет эффективных свойств композитов	288
Тест 8.1. Однослойный волокнистый композит ($N_{\text{нитей}}=1$)	288
Тест 8.2. Двуслойный слоисто-волокнистый композит.....	290
Тест 8.3. Сплошной куб из однородного материала Гука (3D).....	292
Тест 8.4. Сплошной куб из ортотропного материала.....	294





Статическое нагружение

Тесты с точным аналитическим решением

Тест 1.1.1: Одноосное растяжение пластины с круговым вырезом

Рассматривается двумерная задача об одноосном растяжении плоской неограниченной пластины с круговым вырезом.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/4 пластины
- $BC = 5$ м
- Диаметр отверстия 0.5 м
- Используются полярные координаты

Граничные условия:

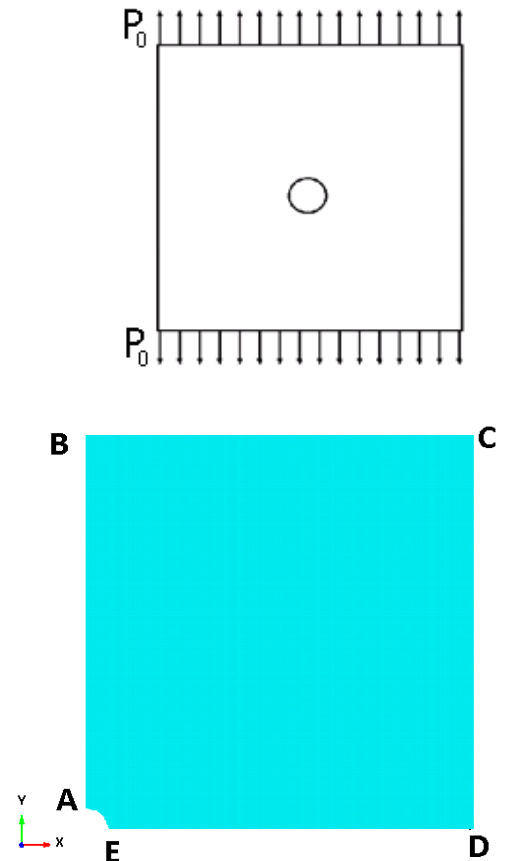
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой ED
- $P_0 = 1$ МПа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3$ (93 874 элементов)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$ (93 874 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4$ (16 052 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники $Quad8$ (16 052 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники $Quad9$ (16 052 элементов)
- Пять типов спектральных элементов (15 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3s$
 - 2-ого порядка (5 615 элементов)
 - 3-го порядка (5 615 элементов)
 - 4-ого порядка (5 615 элементов)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$
 - 2-ого порядка (3 110 элементов)
 - 3-го порядка (3 110 элементов)
 - 4-ого порядка (3 110 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4s$
 - 2-ого порядка (16 052 элементов)
 - 3-го порядка (16 052 элементов)
 - 4-ого порядка (16 052 элементов)



- 8-узловые четырёхугольники Quad8s
 - 2-ого порядка (13 434 элементов)
 - 3-го порядка (10 175 элементов)
 - 4-ого порядка (8 052 элементов)
- 9-узловые четырёхугольники Quad9s
 - 2-ого порядка (10 175 элементов)
 - 3-го порядка (8 052 элементов)
 - 4-ого порядка (6 841 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_θ в точке E (0.25;0;0) равно 3 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [1]:

$$\sigma_\theta^{max} = 3P_0.$$

Результаты:

- Полученные максимальные значения компонент тензора напряжений σ_θ^{max} представлены в таблице:
 - Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ¹	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_θ^{max} , МПа	3	3.0288	0.96%	3.0208	0.69%	2.9736	0.88%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ²	
		Quad4 ³		Quad8		Quad9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_θ^{max} , МПа	3	3.0358	1.10%	3.022	0.73%	3.0214	0.71%	2.9736	0.88%

¹ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

² Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

³ При расчете методом спектральных элементов не рекомендуется использовать данный тип элементов на задачах с криволинейной геометрией.



– Спектральные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (quad4s) ⁴					
		2-й порядок		3-й порядок		4-й порядок	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	3	3.0217	0.723%	3.0305	1.017%	3.0343	1.143%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (quad8s)					
		2-й порядок		3-й порядок		4-й порядок	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	3	3.0203	0.677%	3.0214	0.713%	3.0218	0.727%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (quad9s)					
		2-й порядок		3-й порядок		4-й порядок	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	3	3.0215	0.717%	3.0214	0.713%	3.021	0.7%

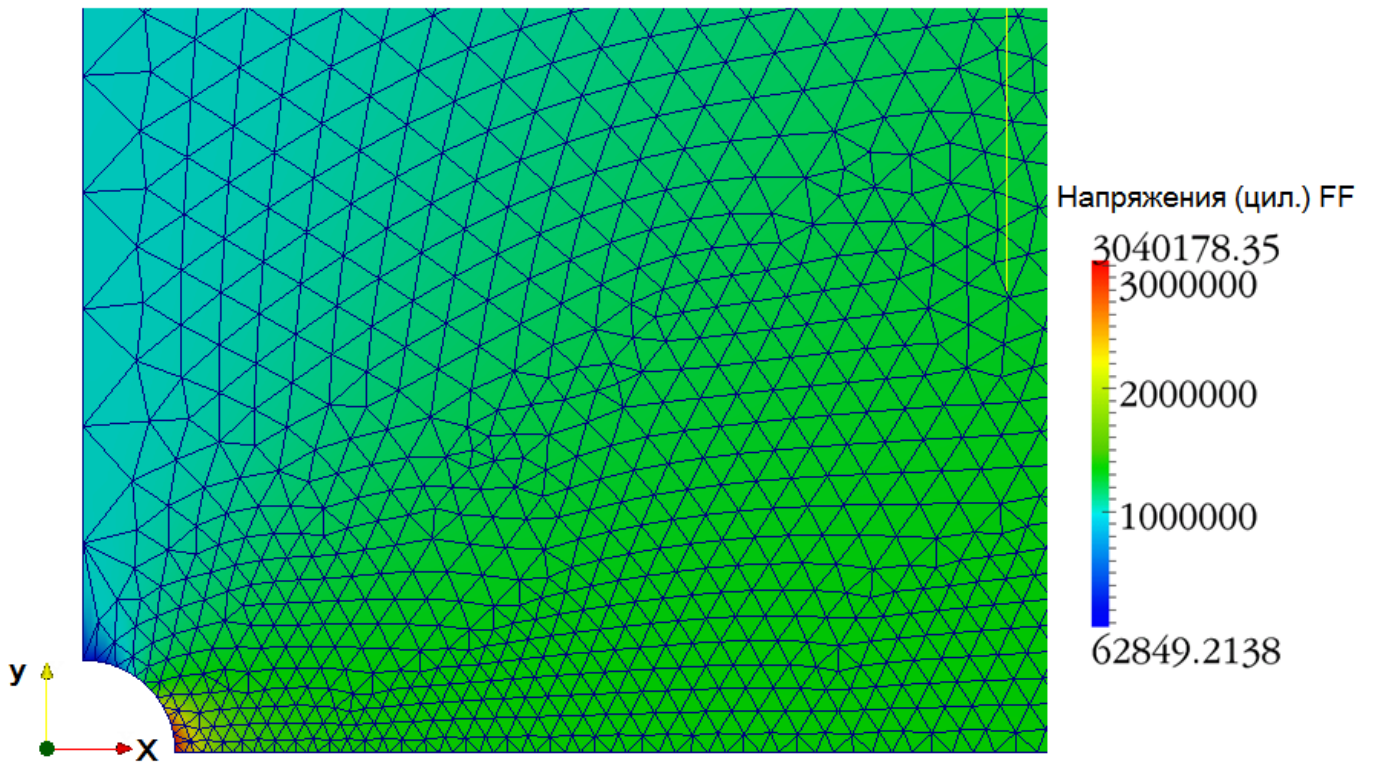
Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (tri3s) ⁵					
		2-й порядок		3-й порядок		4-й порядок	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	3	3.025	0.83%	3.089	2.97%	3.143	4.77%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (tri6s)					
		2-й порядок		3-й порядок		4-й порядок	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	3	3.031	1%	3.026	0.87%	3.021	0.7%

⁴ При расчете методом спектральных элементов не рекомендуется использовать данный тип элементов на задачах с криволинейной геометрией.

⁵ При расчете методом спектральных элементов не рекомендуется использовать данный тип элементов на задачах с криволинейной геометрией.

- На картинке ниже представлен фрагмент исходной модели вблизи точки E с полем распределения напряжений σ_θ при разбиении на треугольные элементы (Tri3).



Тест 1.1.2: Всестороннее растяжение пластины с круговым вырезом

Рассматривается двумерная задача о всестороннем растяжении плоской неограниченной пластины с круговым вырезом.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается $\frac{1}{4}$ часть пластины
- $BC = 5$ м
- Диаметр отверстия 0.5 м
- Используются полярные координаты

Граничные условия:

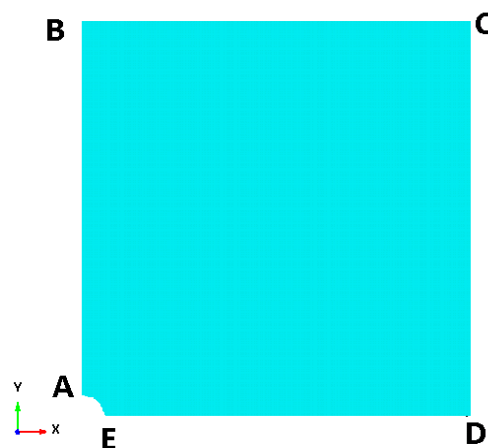
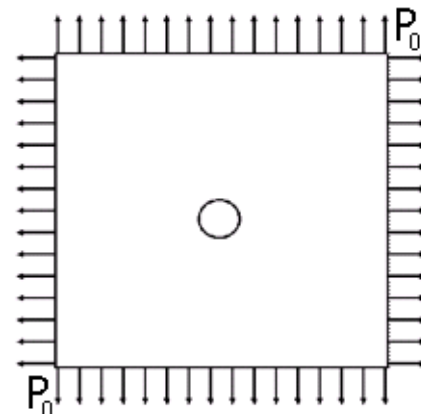
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой ED
- $P_0 = 1$ Мпа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая на линиях AE и ED (вблизи точки E)
- Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3$ (93 874 элементов)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$ (93 874 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4$ (16 052 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники $Quad8$ (16 052 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники $Quad9$ (16 052 элементов)
- Пять типов спектральных элементов (15 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3s$
 - 2-ого порядка (3 110 элементов)
 - 3-го порядка (5 615 элементов)
 - 4-ого порядка (5 615 элементов)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$
 - 2-ого порядка (3 110 элементов)
 - 3-го порядка (3 110 элементов)
 - 4-ого порядка (3 110 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4s$
 - 2-ого порядка (16 052 элементов)
 - 3-го порядка (16 052 элементов)
 - 4-ого порядка (16 052 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники $Quad8s$
 - 2-ого порядка (13 434 элементов)
 - 3-го порядка (10 175 элементов)



- 4-ого порядка (8 052 элементов)
- 9-узловые четырёхугольники Quad9s
 - 2-ого порядка (10 175 элементов)
 - 3-го порядка (8 052 элементов)
 - 4-ого порядка (6 841 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_{θ} на границе вырезанной окружности равно 2 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [1]:

$$\sigma_{\theta}^{max} = 2P_0$$

Результаты:

- Полученные максимальные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:
 - Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ⁶	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	2	2.0086	0.43%	1.9957	0.215%	1.9849	0.75%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ⁷	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	2	2.0132	0.66%	2.0065	0.325%	2.0061	0.305%	1.9849	0.75%

⁶ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

⁷ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

– Спектральные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (tri3s) ⁸					
		2-ого порядка		3-ого порядка		4-ого порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	2	2.01177	0.59%	2.05	2.5%	2.086	4.3%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (tri6s)					
		2-ого порядка		3-ого порядка		4-ого порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	2	2.0059	0.3%	2.0044	0.22%	2.0045	0.22%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (quad4s) ⁹					
		2-ого порядка		3-ого порядка		4-ого порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	2	2.0056	0.28%	2.0098	0.49%	2.0126	0.63%

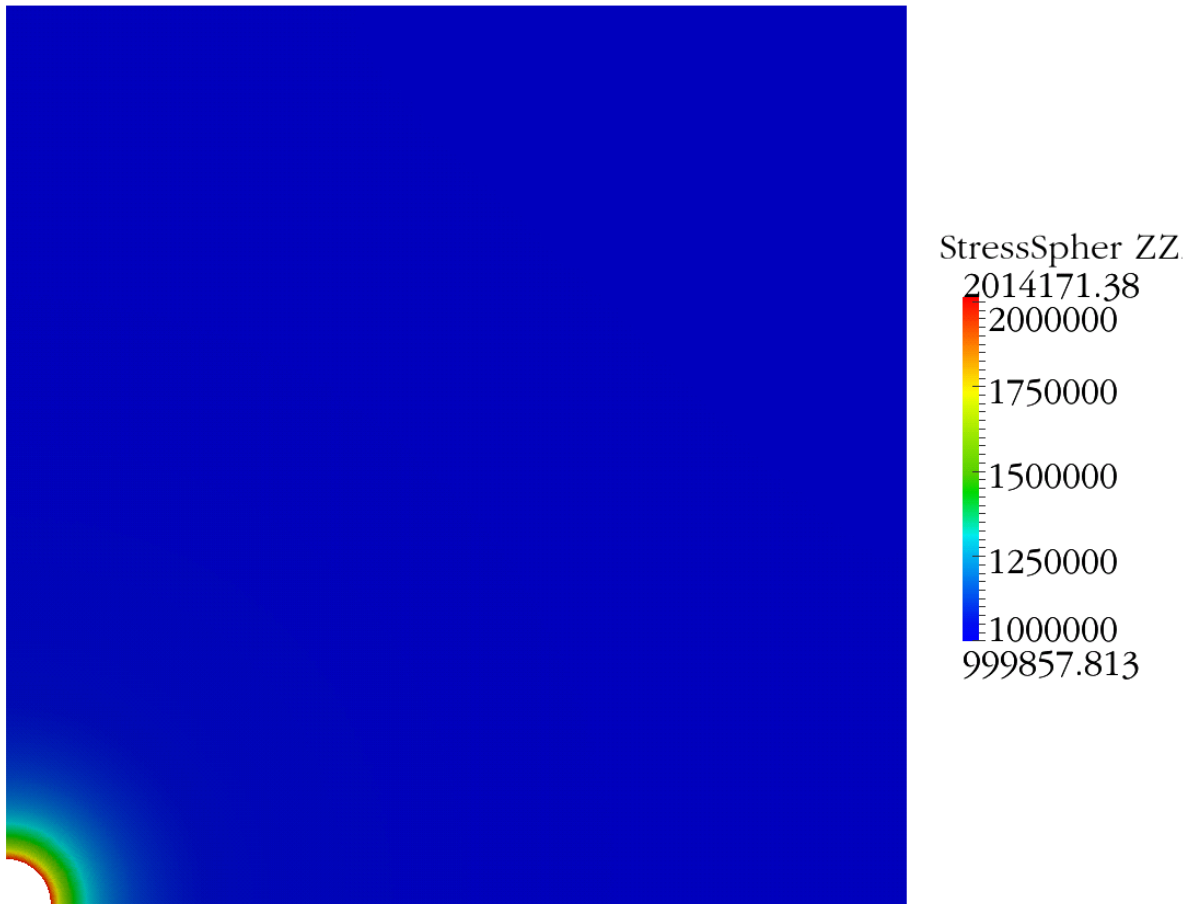
Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (quad8s)					
		2-ого порядка		3-ого порядка		4-ого порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	2	2.0082	0.41%	2.0045	0.225%	2.0064	0.32%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS (quad9s)					
		2-ого порядка		3-ого порядка		4-ого порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{θ}^{max} , МПа	2	2.0054	0.27%	2.0045	0.225%	2.0055	0.275%

⁸ При расчете на спектральные элементы данный тип элементов не рекомендуется использовать на задачах с криволинейной геометрией.

⁹ При расчете на спектральные элементы данный тип элементов не рекомендуется использовать на задачах с криволинейной геометрией.

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения напряжений при разбиении на треугольные элементы. Максимальные значения напряжений достигаются на контуре отверстия, где сравнивались аналитические и численные результаты:



Тест 1.1.3: Одноосное растяжение пластины с эллиптическим вырезом

Рассматривается двумерная задача об одноосном растяжении плоской неограниченной пластины с эллиптическим вырезом.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- $BC = 25$ м
- Размеры отверстия $a = 1.5$ м, $b = 0.5$ м
- Используется полярная система координат

Граничные условия:

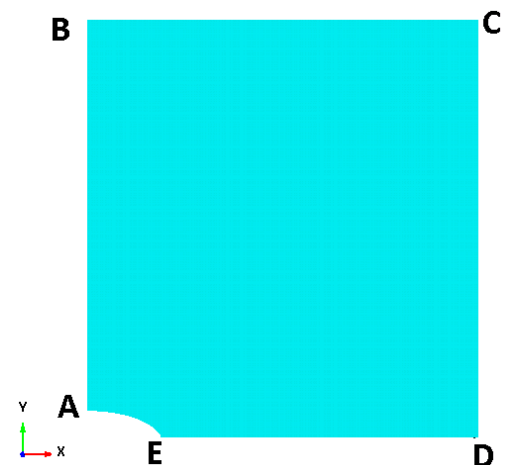
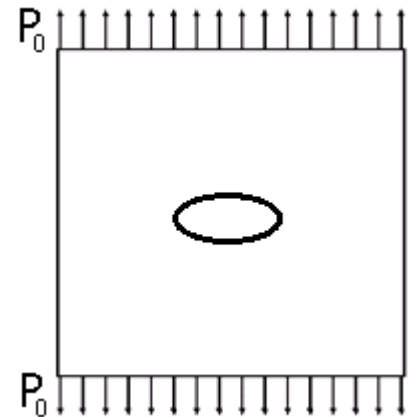
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой ED
- Давление на сторону BC величиной $P_0 = 1$ Мпа

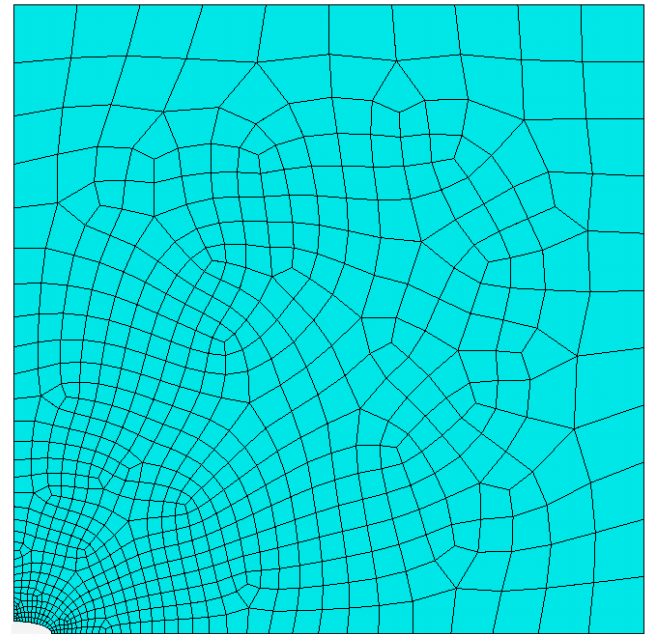
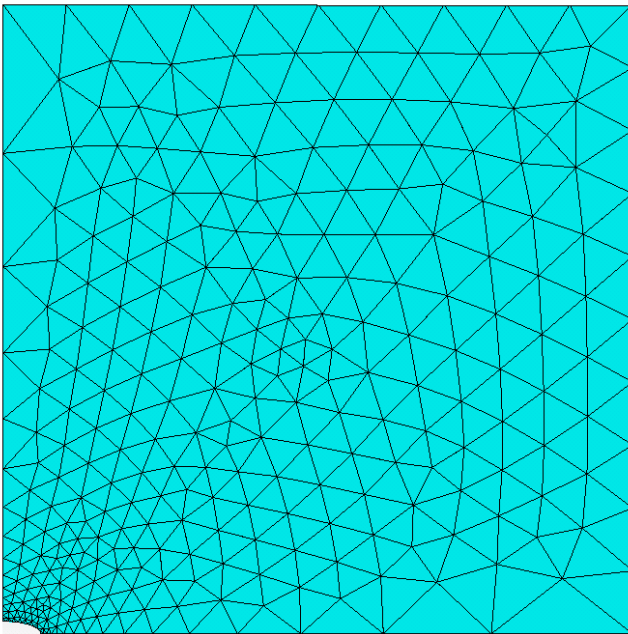
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая на линиях AB , AE и ED (вблизи точек A и E)
- Пять типов конечных элементов (5 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3$ (329 961 элемент)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$ (130 774 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4$ (22 959 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники $Quad8$ (22 959 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники $Quad9$ (22 959 элементов)
- Пять типов спектральных элементов 3го порядка (5 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3s$ 3-го порядка (329 961 элемент)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$ 3-го порядка (130 774 элемента)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4s$ 3-го порядка (22 959 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники $Quad8s$ 3-го порядка (22 959 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники $Quad9s$ 3-го порядка (22 959 элементов)





Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_θ в точке E (1.5;0;0) равно 7 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [1]:

$$\sigma_\theta^{max} = \left(1 + 2\frac{a}{b}\right) P_0$$

Результаты:

- Полученные максимальные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:
- Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ				ANSYS	
		FIDESYS					
		Tri3		Tri6		Значение, Па	Ошибка
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка		
σ_θ^{max}	7 000 000	7 057 330	0.82%	7 046 770	0.67%	6 981 100	0.27%

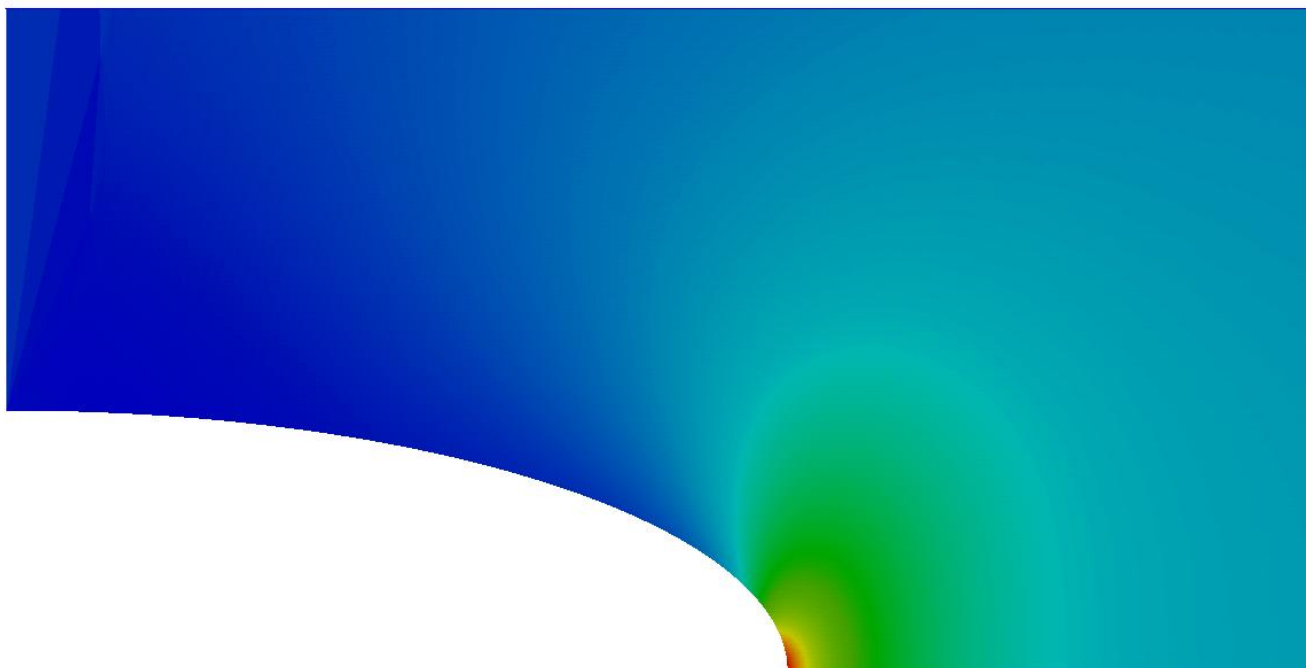
Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ						ANSYS	
		FIDESYS							
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
σ_{θ}^{max}	7 000 000	6 961 680	0.55%	7 050 180	0.72%	7 046 390	0.66%	6 981 100	0.27%

– Спектральные элементы 3го порядка

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ				ANSYS	
		FIDESYS					
		Tri3s		Tri6s			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
σ_{θ}^{max}	7 000 000	7 233 060	3.33%	7 047 260	0.67%	6 981 100	0.27%

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ						ANSYS	
		FIDESYS							
		Quad4s		Quad8s		Quad9s			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
σ_{θ}^{max}	7 000 000	7 125 660	1.79%	7 046 110	0.66%	7 046 070	0.66%	6 981 100	0.27%

- На картинке ниже представлено распределение напряжений вблизи точки E, в которой достигается максимальное напряжение, при разбиении на треугольные элементы:

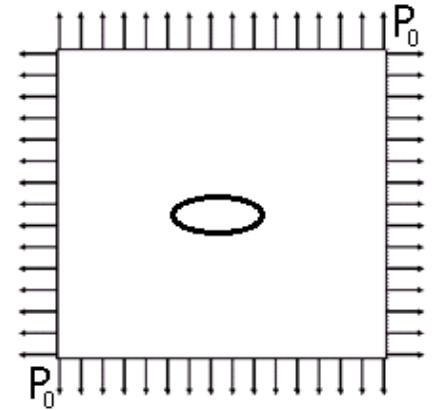


Тест 1.1.4: Всестороннее растяжение пластины с эллиптическим вырезом

Рассматривается двумерная задача о всестороннем растяжении плоской неограниченной пластины с эллиптическим вырезом.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- $BC = 25$ м
- Размеры отверстия $a = 1.5$ м, $b = 0.5$ м
- Используется полярная система координат



Граничные условия:

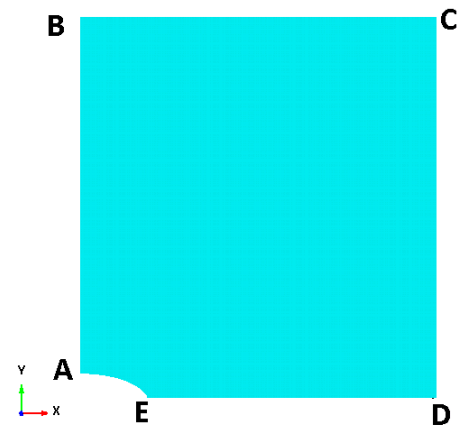
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой ED
- Давление на сторону BC величиной $P_0 = 1$ Мпа
- Давление на сторону CD величиной $P_0 = 1$ Мпа

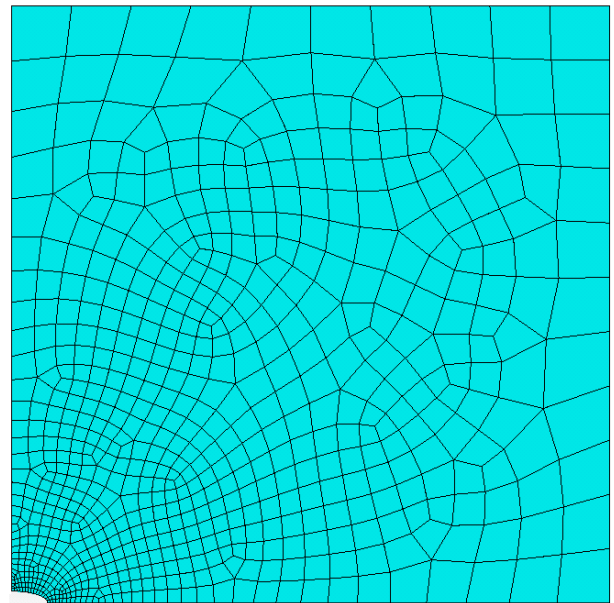
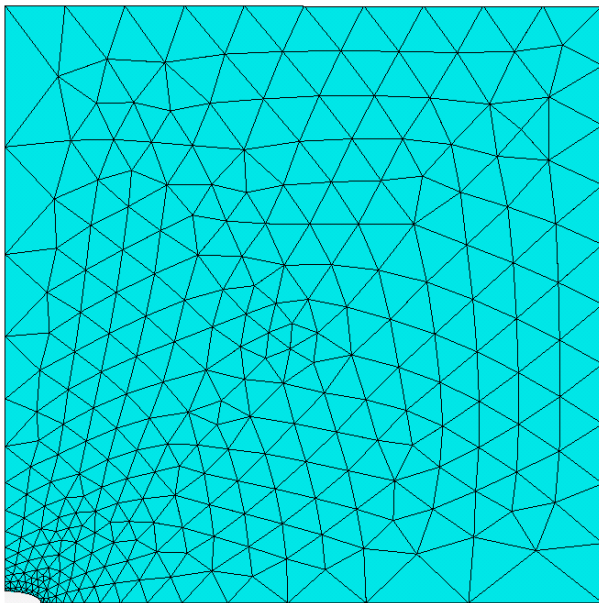
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая на линиях AB , AE и ED (вблизи точек A и E)
- Пять типов конечных элементов (5 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3$ (329 961 элемент)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$ (130 774 элемента)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4$ (22 959 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники $Quad8$ (22 959 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники $Quad9$ (22 959 элементов)
- Пять типов спектральных элементов 3го порядка (5 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники $Tri3s$ 3-го порядка (329 961 элемент)
 - 6-узловые треугольники $Tri6$ 3-го порядка (130 774 элемента)
 - 4-узловые четырёхугольники $Quad4s$ 3-го порядка (22 959 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники $Quad8s$ 3-го порядка (22 959 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники $Quad9s$ 3-го порядка (22 959 элементов)





Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_θ в точке E (1.5;0;0) равно 6 МПа с точностью 1%.

Значения вычислены по формуле [1]:

$$\sigma_\theta^{max} = 2P_0 \frac{a}{b}$$

Результаты:

- Полученные максимальные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:
 - Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
σ_θ^{max}	6 000 000	6 052 780	0.88%	6 036 700	0.61%	5 988 500	0.19%

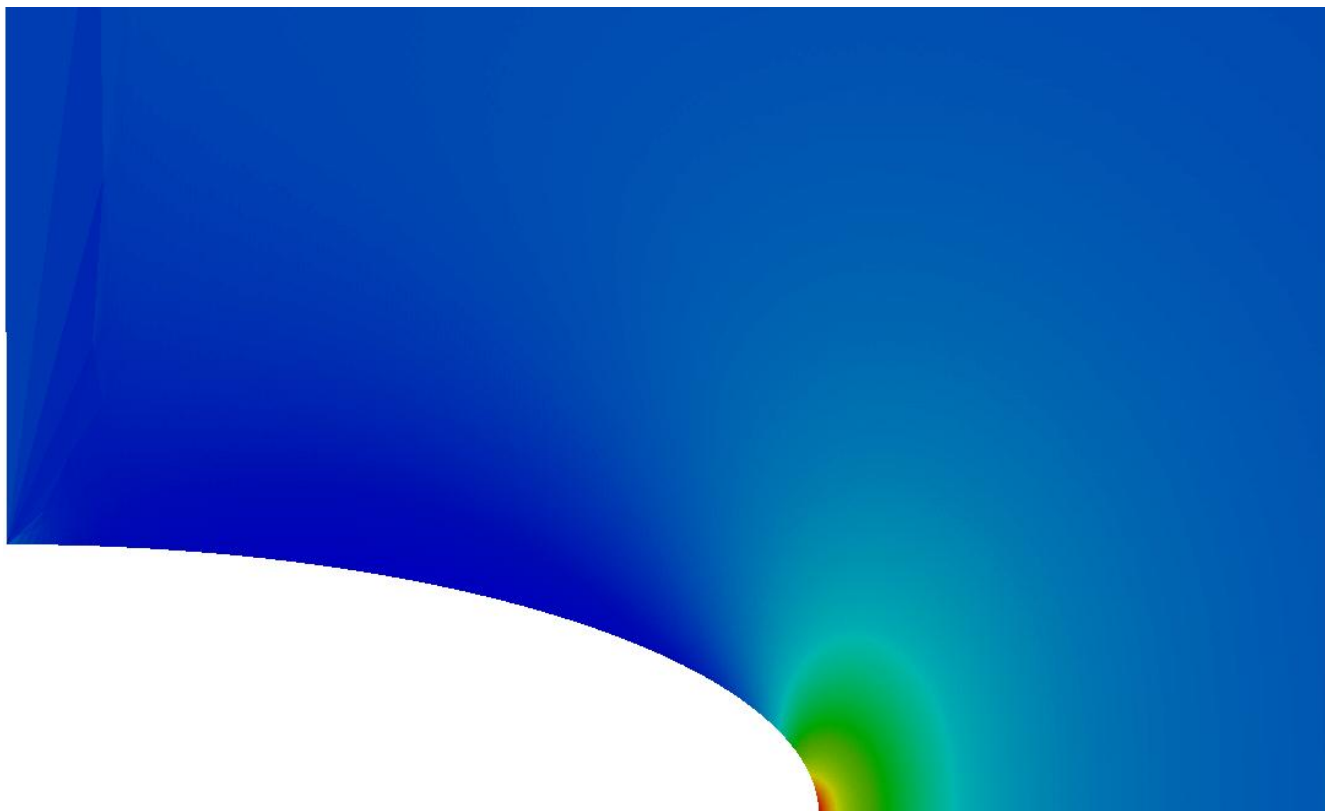
Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
σ_θ^{max}	7 000 000	5 979 590	0.34%	6 041 130	0.68%	6 035 400	0.59%	5 988 500	0.19%

– Спектральные элементы 3го порядка

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ				ANSYS	
		FIDESYS					
		Tri3s		Tri6s		Значение, Па	Ошибка
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка		
σ_{θ}^{max}	6 000 000	6 195 100	3.25%	6 035 500	0.59%	5 988 500	0.19%

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ						ANSYS	
		FIDESYS							
		Quad4s		Quad8s		Quad9s		Значение, Па	Ошибка
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка		
σ_{θ}^{max}	7 000 000	6 102 400	1.71%	6 035 280	0.59%	6 035 280	0.59%	5 988 500	0.19%

- На картинке ниже представлено распределение напряжений вблизи точки E, в которой достигается максимальное напряжение, при разбиении на треугольные элементы:

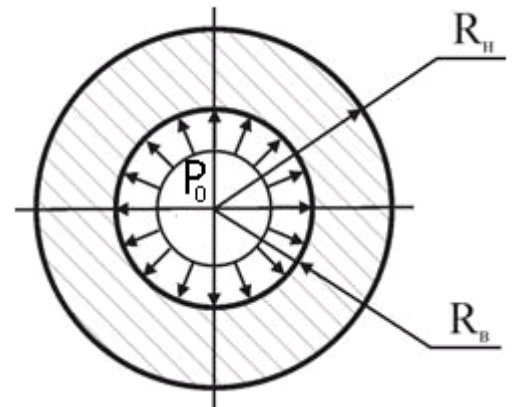


Тест 1.1.5: Нагружение цилиндра внутренним давлением

Рассматривается двумерная задача о нагружении внутренним давлением круглого толстостенного цилиндра.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- $R_{\text{н}} = 1$ м, $R_{\text{в}} = 0,75$ м
- Используется полярная система координат



Граничные условия:

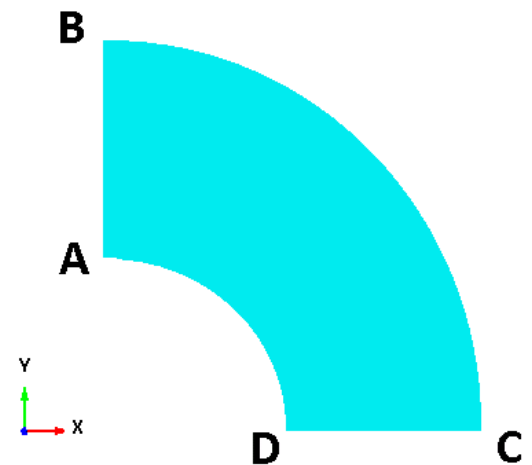
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой CD
- $P_0 = 1$ Мпа

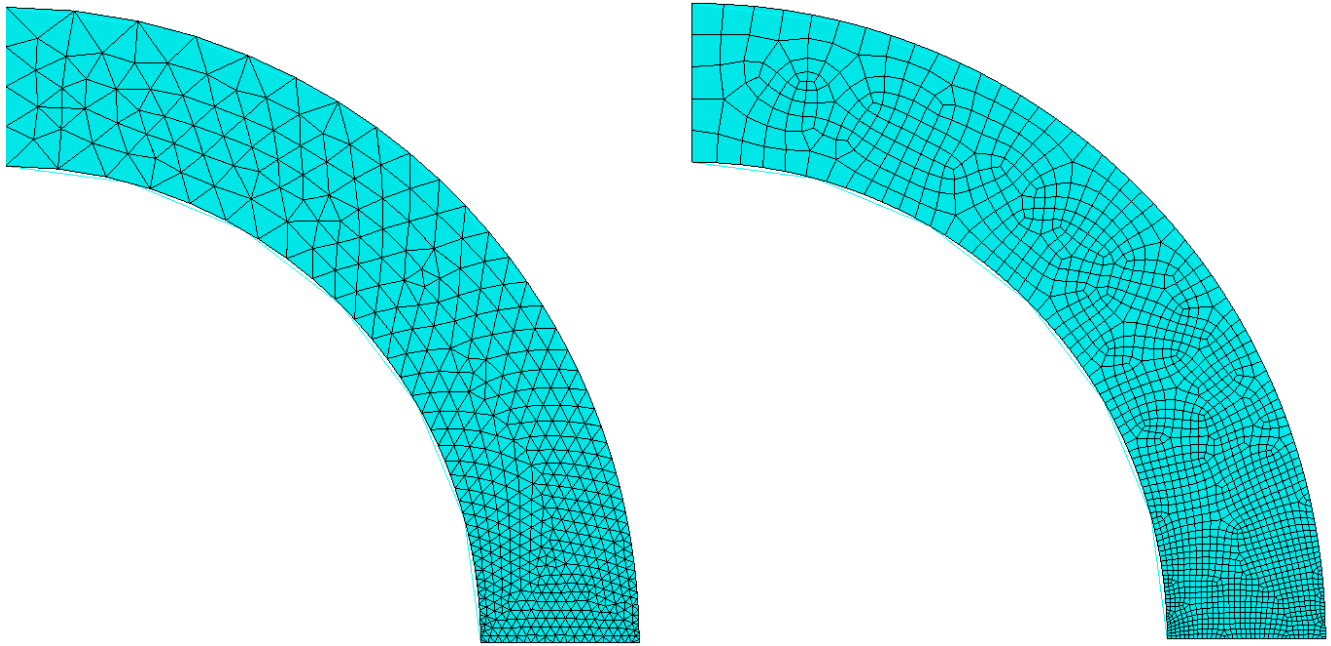
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая на линиях AD, DC и DC (вблизи точек D и C)
- Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3 (4 934 элемента)
 - 6-узловые треугольники Tri6 (2 258 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (2 236 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (2 236 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (2 236 элементов)
- Три типа спектральных элементов (девять отдельных тестов):
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4s
 - 2-ого порядка (2 336 элементов)
 - 3-го порядка (2 336 элементов)
 - 4-ого порядка (2 336 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8s
 - 2-ого порядка (964 элементов)
 - 3-го порядка (765 элементов)
 - 4-ого порядка (707 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9s
 - 2-ого порядка (937 элементов)
 - 3-го порядка (708 элементов)
 - 4-ого порядка (650 элементов)





Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_θ на внутренней поверхности цилиндра равно 3,571429 МПа с точностью 1%
- Напряжение σ_r на внутренней поверхности цилиндра равно -1 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по формулам [1]:

$$\sigma_\theta|_{r=R_B} = P_0 \frac{1 + \frac{R_B^2}{R_H^2}}{1 - \frac{R_B^2}{R_H^2}}$$

$$\sigma_r|_{r=R_B} = -P_0$$

Результаты:

- Полученные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:
 - Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ¹⁰	
		Tri3		Tri6		Значение	Ошибка
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка		
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 583.33	0.33%	3 571.3	<0.01%	3 560.9	0.29%
$\sigma_r _{r=R_B}$, кПа	-1 000	-980.67	1.93%	-999.9	0.01%	-995.6	0.44%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ¹¹	
		Quad4		Quad8		Quad9		Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка		
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 583.4	0.34%	3 551.5	0.56%	3 551.5	0.56%	3 560.9	0.29%
$\sigma_r _{r=R_B}$, кПа	-1 000	-970.9	2.91%	-980.13	1.9%	-980.13	1.9%	-995.6	0.44%

– Спектральные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ Fidesys (quad4s) ¹²					
		Элементы 2-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 570	0.04%	3 590	0.52%	3 600	0.8%
$\sigma_r _{r=R_B}$, кПа	-1 000	-999	0.014%	-995	0.416%	-994	0.513%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ Fidesys (quad8s)					
		Элементы 2-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 570	0.04%	3 570	0.04%	3 570	0.04%
$\sigma_r _{r=R_B}$, кПа	-1 000	-999	0.042%	-1 000	0%	-1 000	0%

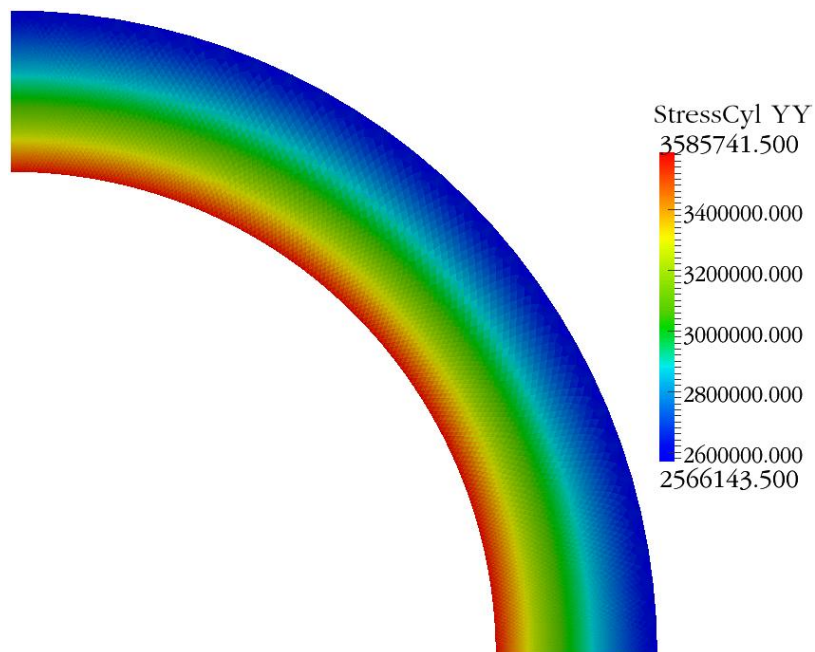
¹⁰ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

¹¹ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

¹² При расчете на спектральные элементы, данный тип элементов не рекомендуется использовать на задачах с криволинейной геометрией.

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ Fidesys (quad9s)					
		Элементы 2-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$, кПа	3 571.4	3 570	0.04%	3 570	0.04%	3 570	0.04%
$\sigma_r _{r=R_B}$, кПа	-1 000	-999	0.042%	-1 000	0%	-1 000	0%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения напряжений σ_{θ} при разбиении на треугольные элементы. Максимальные значения напряжений достигаются на внутренней поверхности цилиндра, где сравнивались аналитические и численные результаты:



Тест 1.1.6: Круглая цилиндрическая труба под воздействием внутреннего и внешнего давлений (2D)

Рассматривается двумерная задача о нагружении внутренним и внешним давлениями круглого толстостенного цилиндра.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- $R_H = 1$ м, $R_B = 0,75$ м
- Используется полярная система координат

Граничные условия:

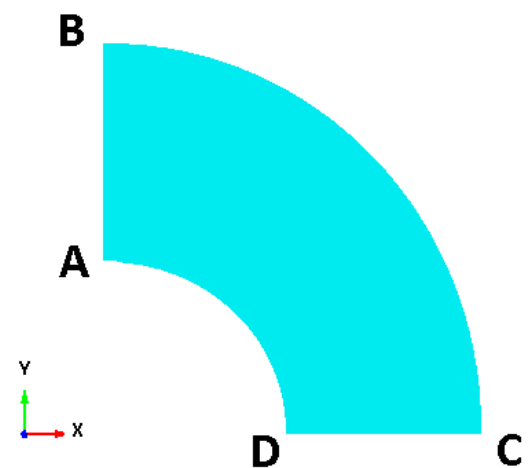
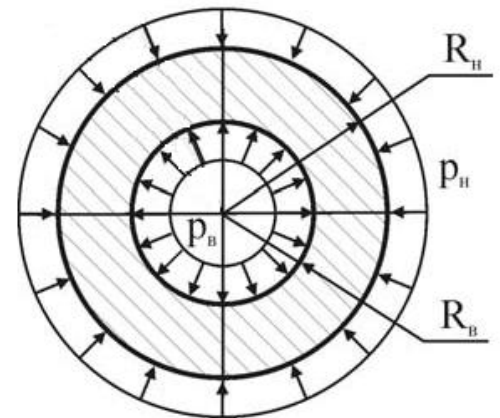
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой CD
- $P_H = 1$ Мпа, $P_B = 0.1$ Мпа

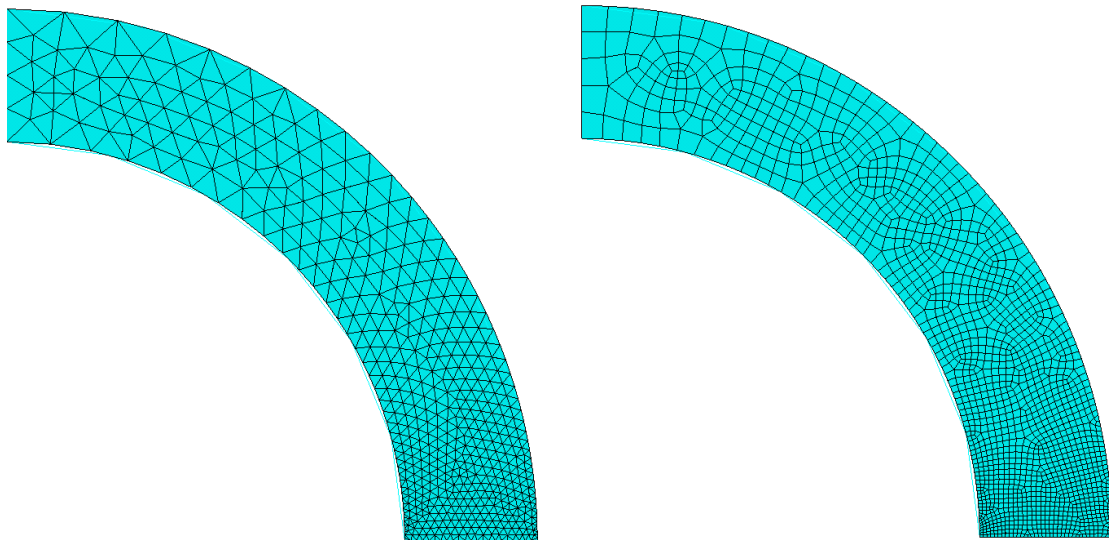
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ Гпа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая на линиях AB, AD и DC (вблизи точек D и C)
- Пять типов конечных элементов (5 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3 (128 310 элементов)
 - 6-узловые треугольники Tri6 (31 535 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (15 432 элемента)
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (15 432 элемента)
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (15 432 элементов)
- Пять типов спектральных элементов 3го порядка (5 отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3s 3-го порядка (31 535 элементов)
 - 6-узловые треугольники Tri6 3-го порядка (31 535 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4s 3-го порядка (15 432 элемента)
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8s 3-го порядка (15 432 элемента)
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9s 3-го порядка (15 432 элемента)





Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_θ на внутренней поверхности цилиндра равно -4.2 МПа с точностью 1%.
- Напряжение σ_r на внутренней поверхности цилиндра равно -0.1 МПа с точностью 1%.
- Напряжение σ_θ на внешней поверхности цилиндра равно -3.3 МПа с точностью 1%.
- Напряжение σ_r на внешней поверхности цилиндра равно -1 МПа с точностью 1%.

Значения вычислены по формулам [1]

$$\sigma_\theta = \frac{R_B^2 P_B - R_H^2 P_H}{R_H^2 - R_B^2} + \frac{R_B^2 R_H^2 (P_B - P_H)}{R_H^2 - R_B^2} \frac{1}{r^2}$$

$$\sigma_r = \frac{R_B^2 P_B - R_H^2 P_H}{R_H^2 - R_B^2} - \frac{R_B^2 R_H^2 (P_B - P_H)}{R_H^2 - R_B^2} \frac{1}{r^2}$$

Результаты:

- Полученные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:
 - Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ¹³	
		Tri3		Tri6			
		Значение, Па	Ошибка	Значение, Па	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_\theta _{r=R_B}$	-4 214 285	-4 215 030	0.02%	-4 214 280	0.0001%	4 204 800	0.24%
$\sigma_r _{r=R_B}$	-100 000	-100 158	0.13%	- 100 004	0.004%	-103 940	3.9%

¹³ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

$\sigma_{\theta} _{r=R_H}$	-3 314 286	-3 313 450	0.02%	-3 314 280	0.0002%	3 324 100	0.3%
$\sigma_r _{r=R_H}$	-1 000 000	-999 756	0.02%	-1 000 000	0%	988 870	1.1%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ¹⁴	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$	-4 214 285	-4 211 140	0.07%	-4 214 400	0.003%	-4 214 290	0.0001%	4 204 800	0.24%
$\sigma_r _{r=R_B}$	-100 000	-104 707	4.7%	-100 068	0.07%	-100 009	0.009%	-103 940	3.9%
$\sigma_{\theta} _{r=R_H}$	-3 314 286	-3 314 490	0.006%	-3 314 190	0.003%	-3 314 290	0.0001%	3 324 100	0.3%
$\sigma_r _{r=R_H}$	-1 000 000	-998 187	0.18%	-999 816	0.018%	-1 000 000	0%	988 870	1.1%

– Спектральные элементы 3го порядка

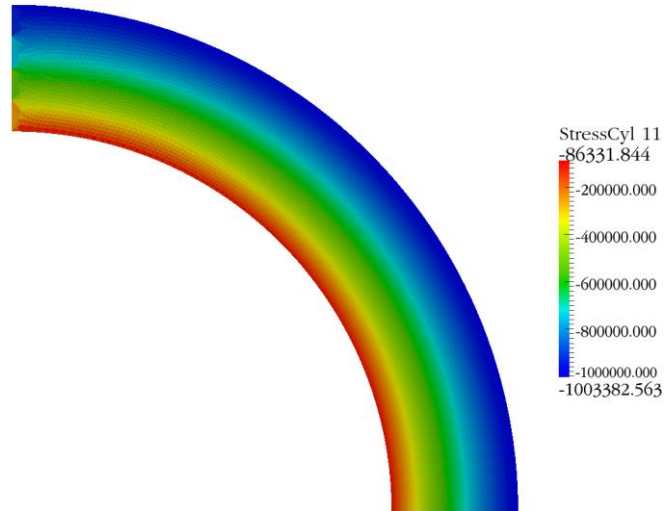
Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS	
		Tri3s		Tri6s			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$	-4 214 285	-4 216 290	0.05%	-4 214 290	0.0001%	4 204 800	0.24%
$\sigma_r _{r=R_B}$	-100 000	-100 320	0.32%	-100 000	0%	-103 940	3.9%
$\sigma_{\theta} _{r=R_H}$	-3 314 286	-3 313 720	0.02%	-3 314 290	0.0001%	3 324 100	0.3%
$\sigma_r _{r=R_H}$	-1 000 000	-998 897	0.11%	-1 000 000	0%	988 870	1.1%

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ							
		FIDESYS				ANSYS			
		Quad4s		Quad8s				Quad9s	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{\theta} _{r=R_B}$	-4 214 285	-4 216 290	0.05%	-4 214 290	0.0001%	-4 214 290	0.0001%	4 204 800	0.24%
$\sigma_r _{r=R_B}$	-100 000	-100 238	0.24%	-100 000	0%	-100 000	0%	-103 940	3.9%

¹⁴ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента PLANE182, количество элементов 77 805).

$\sigma_{\theta} _{r=R_H}$	-3 314 286	-3 313 930	0.01%	-3 314 290	0.0001%	-3 314 290	0.0001%	3 324 100	0.3%
$\sigma_r _{r=R_H}$	-1 000 000	-999 888	0.01%	-1 000 000	0%	-1 000 000	0%	988 870	1.1%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения напряжений σ_r при разбиении на треугольные элементы:

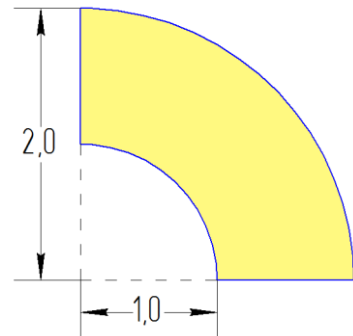


Тест 1.1.7: Круглая цилиндрическая труба под воздействием внутреннего и внешнего давлений (3D)

Рассматривается задача о бесконечной цилиндрической трубе, находящейся под воздействием внутреннего давления.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть широкого среза трубы
- Толщина среза 0.5 м
- Используется цилиндрическая система координат



Граничные условия:

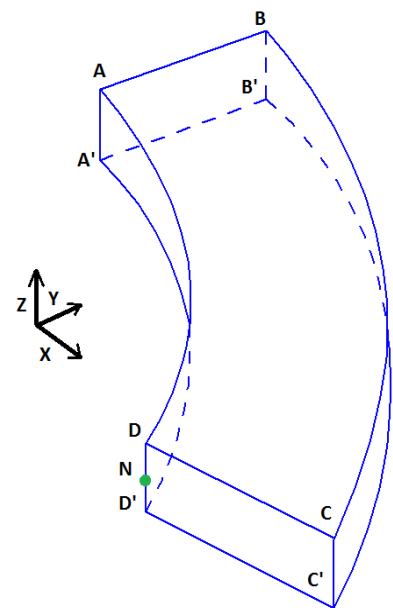
- Нулевые перемещения вдоль оси X на поверхности $ABB'A'$
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на поверхности $CDD'C'$
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на поверхностях $ABCD$ и $A'B'C'D'$
- Давление на поверхность $AA'D'D$ величиной 1 Мпа
- Давление на поверхность $B'B'C'C$ величиной 0.5 Мпа

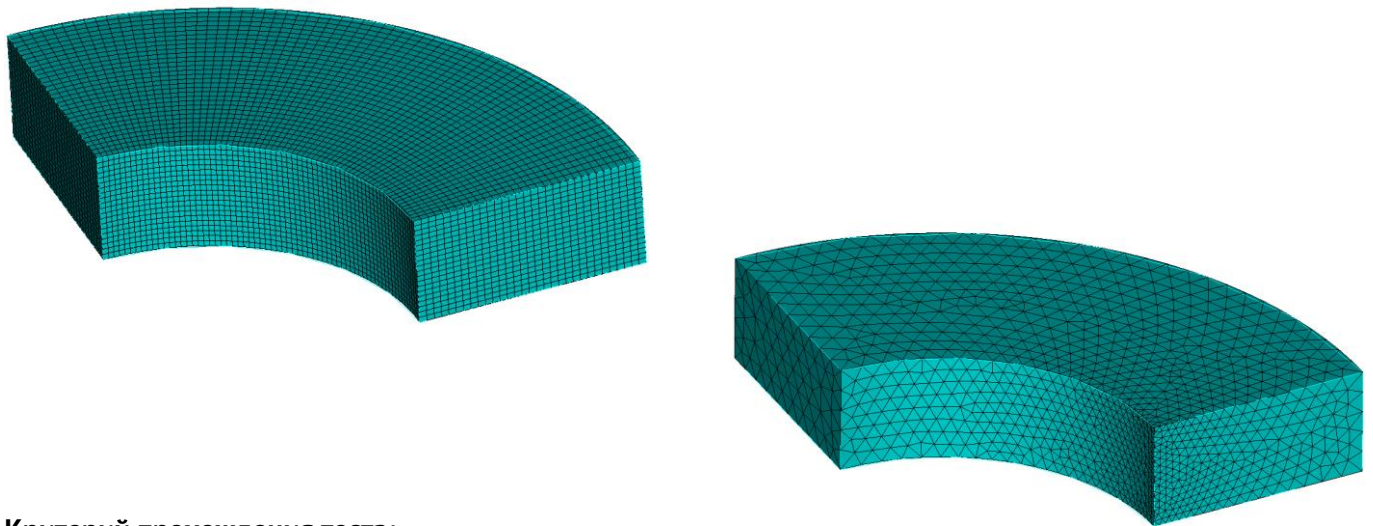
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Девять типов конечных элементов (девять отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (2 058 954 элемента)
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (65 452 элемента)
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (682 030 элементов)
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (415 540 элементов)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (415 540 элементов)
 - 6-узловые призмы WEDGE6 (198 132 элементов)
 - 15-узловые призмы WEDGE15 (26 367 элементов)
 - 5-узловые пирамиды PYRAMID5 и 4-узловые тетраэдры TETRA4 (198 132 элементов)
 - 13-узловые пирамиды PYRAMID13 и 10-узловые тетраэдры TETRA10 (8 456 элементов)





Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_{rr} в точке N (1;0;0) равно -1.00 МПа с точностью 1%
- Напряжение $\sigma_{\theta\theta}$ в точке N (1;0;0) равно 0.33 МПа с точностью 1%
- Напряжение σ_{zz} в точке N (1;0;0) равно -0.2 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [1]:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{11} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^2 \sigma_{22} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

Результаты:

- Полученные значения напряжений представлены в таблицах:

– Конечные элементы

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ¹⁵	
		Тетраэдры (TETRA4)		Тетраэдры (TETRA10)		Тетраэдры	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{rr} , МПа	-1	-0.999	0.1%	-0.999	0.1%	-1	<0.01%
$\sigma_{\theta\theta}$, МПа	0.333	0.334	-0.22%	0.333	<0.01%	0.333	<0.01%
σ_{zz} , МПа	-0.200	-0.198	0.59%	-0.199	0.5%	-0.200	<0.01%

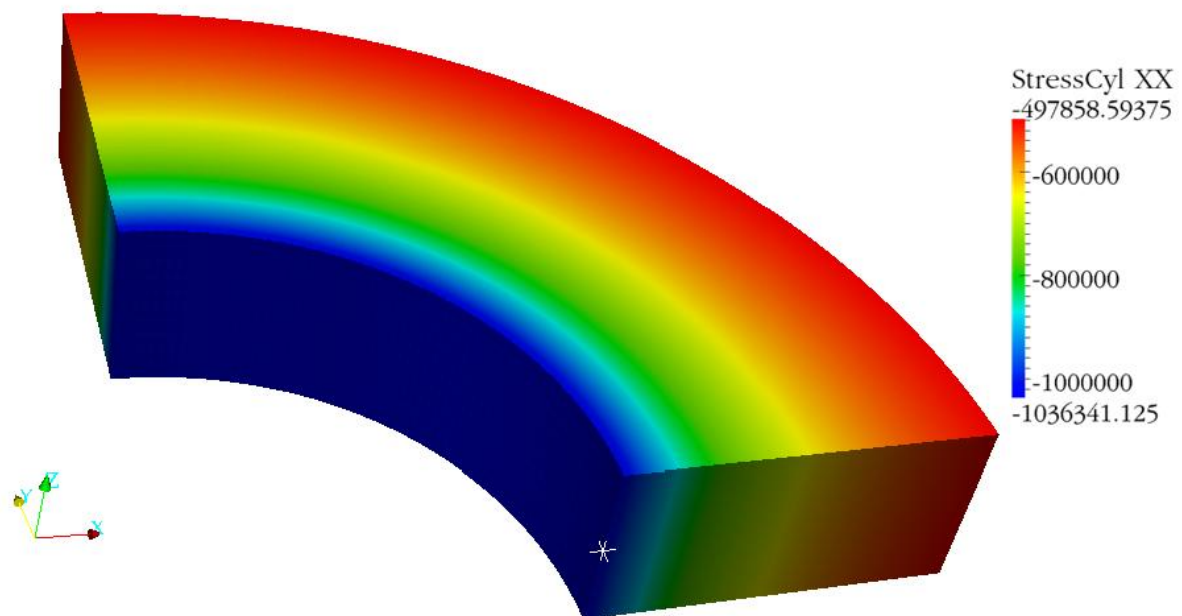
¹⁵ Анализ проводился на следующих сетках:

- тетраэдральной (тип элемента SOLID187, количество элементов 1 626 578, количество узлов 2 243 852);

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ¹⁶	
		Гексаэдры (HEX8)		Гексаэдры (HEX20)		Гексаэдры (HEX27)		Гексаэдры	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{rr} , МПа	-1	-0.999	0.1%	-0.999	0.1%	-0.979	2%	-0.999	0.1%
$\sigma_{\theta\theta}$, МПа	0.333	0.334	-0.22%	0.333	<0.01%	0.312	6.29%	0.334	0.35%
σ_{zz} , МПа	-0.200	-0.198	0.59%	-199 701	0.15%	-200 052	0.30%	-199 810	0.1%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS							
		Призмы (WEDGE6)		Призмы (WEDGE15)		Пирамиды (PYRAMID5)		Пирамиды (PYRAMID13)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{rr} , МПа	-1	-0.996	0.4%	-0.999	0.01%	-1	<0.01%	-0.998	0.2%
$\sigma_{\theta\theta}$, МПа	0.333	0.338	1.5%	0.332	0.03%	0.333	<0.01%	0.333	<0.01%
σ_{zz} , МПа	-0.200	-0.197	1.5%	-0.2	<0.01%	-0.200	<0.01%	-0.199	0.5%

- На картинке представлена исходная модель с полем распределения перемещений по оси R (цилиндрическая с/к), а так же точка N, в которой сравнивались аналитические и численные результаты:



¹⁶ Анализ проводился на следующих сетках:

- гексаэдральной (тип элемента SOLID185, количество элементов 1 620 000, количество узлов 1 682 358).



Тест 1.1.8: Растяжение балки

В задаче рассматривается подвешенная балка с квадратным сечением, закреплённая в верхней секции. Осевая растягивающая сила приложена к свободному концу балки.

Геометрическая модель:

- Высота балки $L = 10$ in
- Ширина балки $d = 2$ in

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей на плоскости $Y = 0$
- Осевая сила $P = 10\,000$ lb, приложенная во все узлы плоскости $Y = L$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 10.4 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

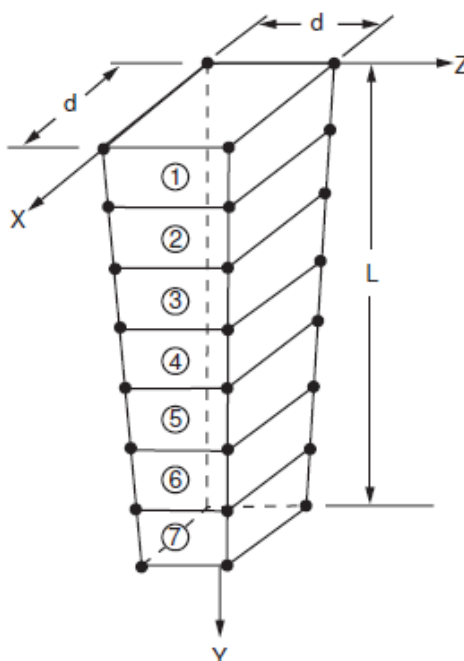
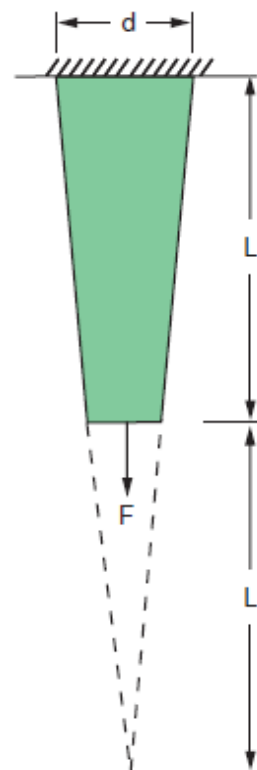
Сетка:

Рассматривалось два варианта расчетной схемы:

- 8-узловые гексаэдры Hex8 (7 элементов)
- Спектральные элементы гексаэдры Hex8s (четыре отдельных теста)
 - 3-ого порядка (7 элементов)
 - 4-го порядка (7 элементов)
 - 5-ого порядка (7 элементов)
 - 6-ого порядка (7 элементов)

Критерий прохождения теста [28]:

- Напряжение σ_{yy} в точке B (1;L/2;1) равно 4444 psi с точностью 1%



Результаты:

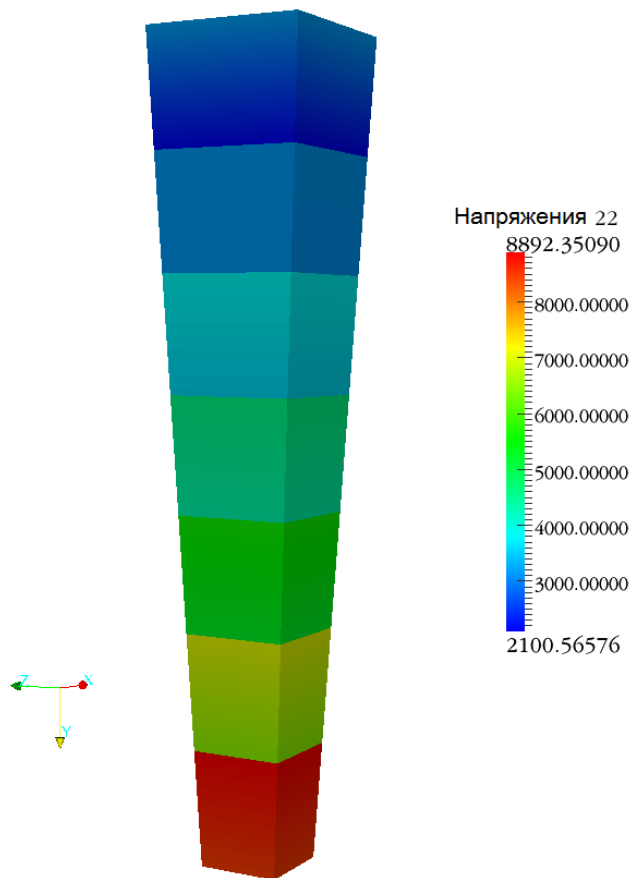
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS [28]:

Величина	Теоретическое значение	Объёмная схема (гексаэдры)			
		FIDESYS (HEX8) Гексаэдры		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{yy} , psi	4444	4431.8	0.27%	4441	1%

- Спектральные элементы:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS (HEX8s)							
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка		Элементы 5-го порядка		Элементы 6-го порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_{yy} , psi	4444	4458.41	0.32%	4464.19	0.45%	4461.8	0.4%	4464.15	0.45%

- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем распределения напряжений по оси Y:



Тест 1.1.9: Задача Буссинеска

В задаче рассматривается бесконечное упругое полупространство $z \geq 0$, в некоторой точке которой приложена сосредоточенная сила. Задача будет ограничена объёмом параллелепипеда 50мх25мх25м, в центр которого приложена точечная сила F , направленная по оси Z .

Геометрическая модель:

- Длина больших ребер параллелепипеда $L = 50$ м
- Высота ребер параллелепипеда $h = 25$ м
- Используются цилиндрические координаты
- Начало координат в точке M

Граничные условия:

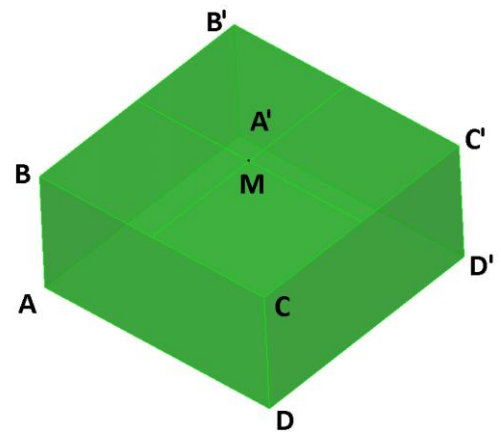
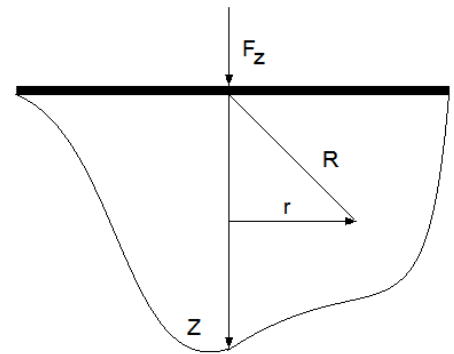
- Закрепление по всем перемещениям для плоскостей $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$ и $A'B'C'D'$.
- В точке M (середина стороны $ABCD$) приложена сила F величиной 100 кН, направленная по оси Z

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- 8-узловые гексаэдры (1 000 188 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Напряжение σ_z в точке (5, 0.3, 5) равно -337.619 Па с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [3]:

$$\sigma_z = \frac{3F z^3}{2\pi R^5}$$

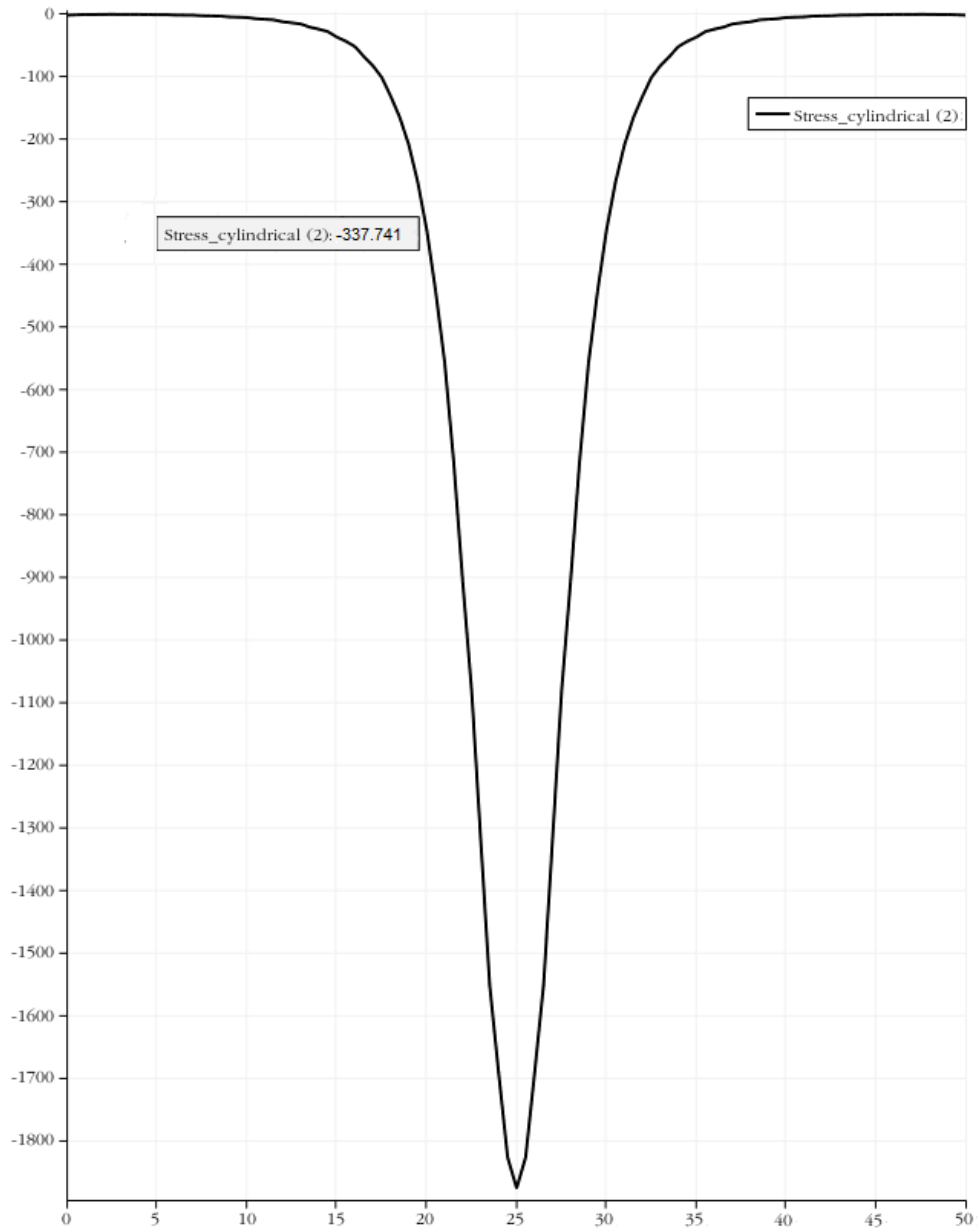
где $R = \sqrt{z^2 + r^2}$

Результаты:

- Полученные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ	
		FIDESYS	
		Значение, Па	Ошибка
σ_z	-337.619	-337.741	0.04 %

- На картинке ниже представлен график распределения напряжений σ_z вдоль линии $z=5$:

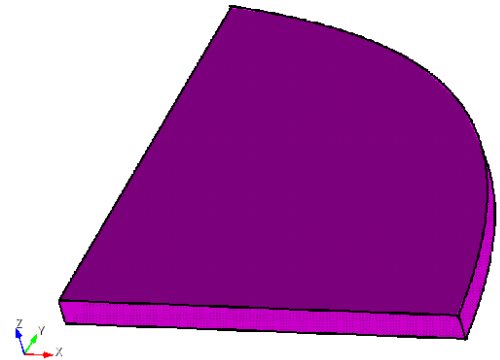


Тест 1.1.10: Равномерно нагруженная круглая пластина, защемленная по контуру

Рассматривается задача об изгибе круглой пластинки под действием равномерно распределенной по всей поверхности пластинки нагрузки.

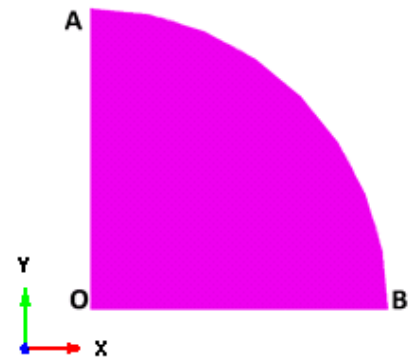
Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Радиус $R=1$ м
- Толщина $h=0.01$ м
- Используются сферические координаты



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Закрепление по всем перемещениям и поворотам на кривой AB
- Равномерно распределенная нагрузка по всей поверхности OAB $q=10$ кПа

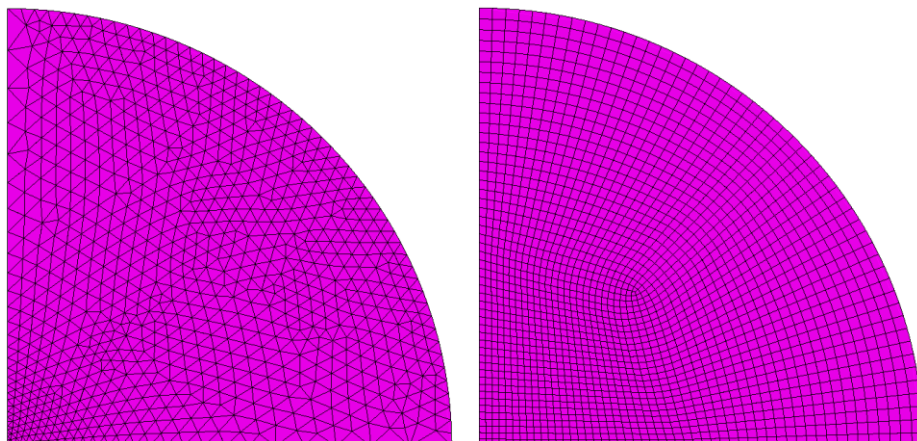


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая в окрестности точки O
- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 670 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (1 670 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (1 976 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (1 976 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (1 976 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Перемещения u_z в точке O (0, 0, 0) равно -8.53125 мм с точностью 3%
- Момент M_r в точке O (0, 0, 0) равен 812.5 Н с точностью 3%
- Момент M_r в точке B (1, 0, 0) равен -1 250 Н с точностью 3%
- Напряжение на верхней поверхности σ_R в точке B (1, 0, 0) равно 75 МПа с точностью 3%

Значения вычислены по следующим формулам [19]:

$$u_z|_{r=0} = -\frac{qR^4}{64D}, \text{ где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_r|_{r=0} = \frac{qR^2}{16}(1 + \nu),$$

$$M_r|_{r=R} = -\frac{qR^2}{8}, \quad \sigma_R|_{r=R} = \frac{3qR^2}{4h^2}.$$

Результаты:

- Полученные значения компонент тензора напряжений представлены в таблице:

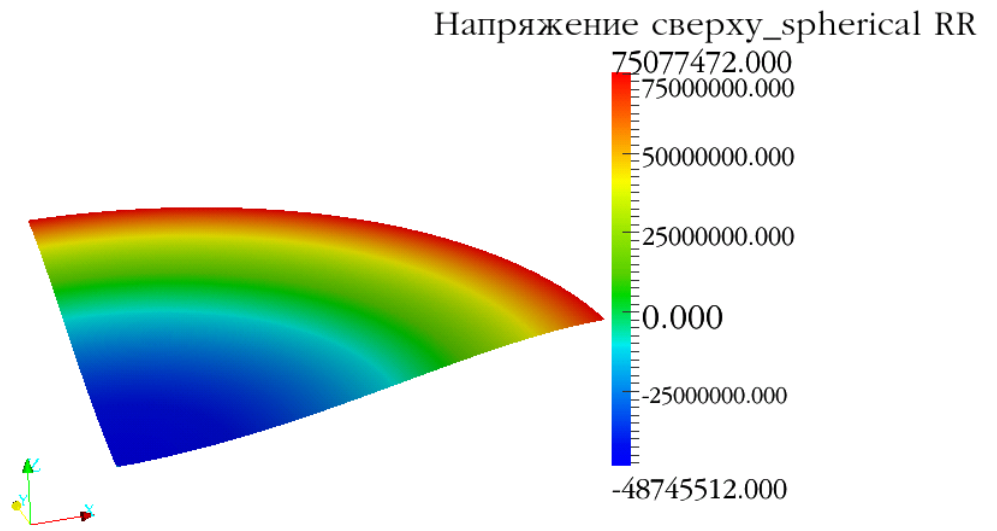
Величина	Теор. значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ¹⁷	
		TRISHELL3		TRISHELL6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{r=0}$, мм	-8.531	-8.54	<0.01%	-8.536	<0.01%	-8.468	0.74
$M_r _{r=0}$, Н	812.5	812.776	<0.01%	812.521	<0.01%	808.88	0.45%
$M_r _{r=R}$, Н	-1 250	-1 206.76	3.46%	-1277.91	0.02%	1 233.19	1.35%
$\sigma_R _{r=R}$, МПа	75	72.40	3.47%	76.67	0.02%	74.2	1.07%

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ¹⁸	
		SHELL4		SHELL8		SHELL9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{r=0}$, мм	-8.531	-8.435	1.13%	-8.551	0.23%	-8.535	< 0.01%	-8.468	0.74
$M_r _{r=0}$, Н	812.5	812.785	0.04%	812.473	<0.01%	816.428	0.5%	808.88	0.45%
$M_r _{r=R}$, Н	-1 250	-1 203.73	1.54%	-1 224.18	2%	-1250.92	0.1%	1 233.19	1.35%
$\sigma_R _{r=R}$, МПа	75	72.222	3.70%	73.451	2%	75.055	0.1%	74.2	1.07%

¹⁷ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 690 элементов).

¹⁸ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 690 элементов).

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения напряжений σ_R на верхней поверхности :



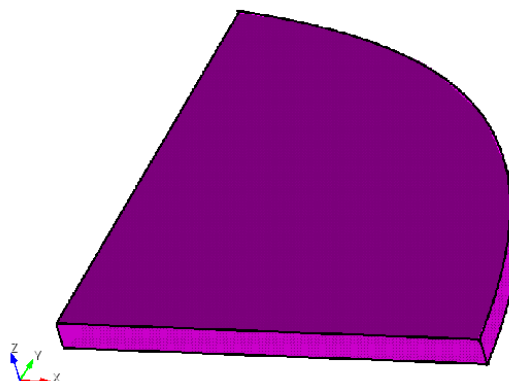


Тест 1.1.11: Равномерно нагруженная круглая пластина, свободно опертая по контуру

Рассматривается задача об изгибе круглой пластинки, свободно опертой по контуру, под действием равномерно распределенной по всей поверхности пластинки нагрузки.

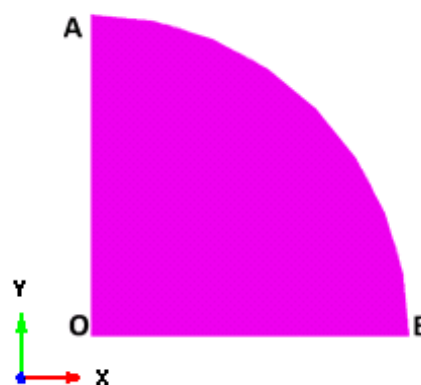
Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Радиус $R=1$ м
- Толщина $h=0.01$ м
- Используются сферические координаты



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Закрепление по всем перемещениям на кривой AB
- Равномерно распределенная нагрузка по всей поверхности OAB $q = 10$ кПа



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая в окрестности точки O
- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 670 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (1 670 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (1 976 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (1 976 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (1 976 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Перемещения u_z в точке O (0, 0, 0) равно -0.03478 м с точностью 1%
- Моменты M_r и M_t в точке O (0, 0, 0) равны 2062.5 Н с точностью 1%
- Напряжения на нижней поверхности σ_R и σ_θ в точке B (0, 0, 0) равны 123 МПа с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [19]:

$$u_z|_{r=0} = -\frac{(5+\nu)qR^4}{64(1+\nu)D}, \text{ где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$M_r|_{r=0} = M_t|_{r=0} = \frac{qR^2}{16}(3 + \nu),$$

$$\sigma_R|_{r=0} = \sigma_\theta|_{r=0} = \frac{3(3+\nu)qR^2}{8h^2}.$$

Результаты:

- Полученные значения представлены в таблицах:

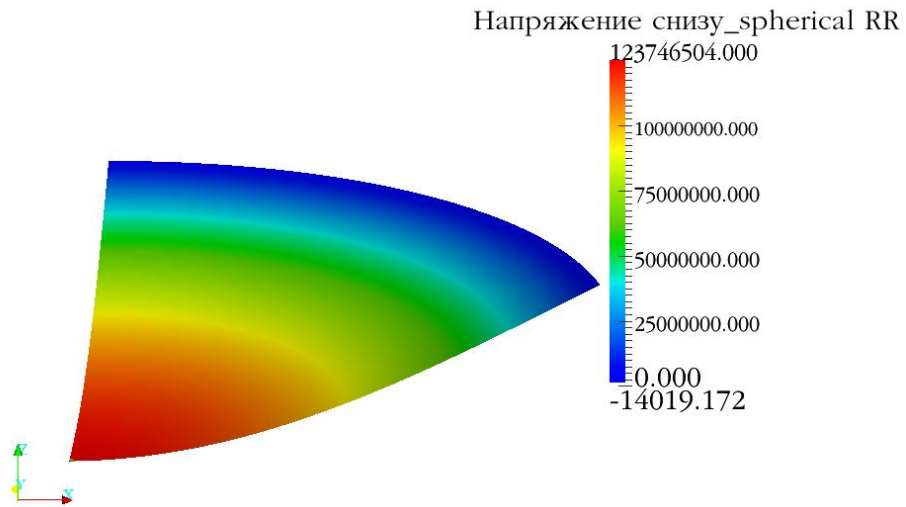
Величина	Теор. значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ¹⁹	
		TRISHELL3		TRISHELL6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{r=0}$, м	-0.034781	-0.034777	0.01%	-0.034788	0.02%	-0.03489	0%
$M_r _{r=0}$, Н	2 062.5	2 062.12	0.02%	2 062.64	0.01%	2 062.0	0.02%
$M_t _{r=0}$, Н	2 062.5	2 062.16	0.02%	2 062.62	0.01%	2 062.0	0.02%
$\sigma_R _{r=0}$, МПа	123	123.73	0.59%	123.76	0.62%	123.72	0.59%
$\sigma_\theta _{r=0}$, МПа	123	123.73	0.59%	123.76	0.62%	123.72	0.59%

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ²⁰	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{r=0}$, м	-0.034781	-0.03477	0.03%	-0.03479	0.03%	-0.034795	0.04%	-0.03489	0%
$M_r _{r=0}$, Н	2 062.5	2 062.57	<0.01%	2 062.72	0.01%	2 072.91	0.50%	2 062.0	0.02%
$M_t _{r=0}$, Н	2 062.5	2 062.57	<0.01%	2 062.72	0.01%	2 072.23	0.47%	2 062.0	0.02%
$\sigma_R _{r=0}$, МПа	123	123.755	0.61%	123.76	0.62%	124.375	1.12%	123.72	0.59%
$\sigma_\theta _{r=0}$, МПа	123	123.755	0.61%	123.76	0.62%	124.334	1.08%	123.72	0.59%

¹⁹ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 690 элементов).

²⁰ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 690 элементов).

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения напряжений σ_R на нижней поверхности :



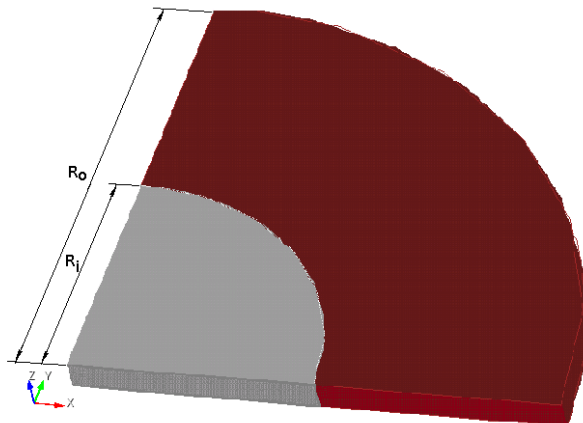


Тест 1.1.12: Круглая пластинка, нагруженная концентрически

Рассматривается задача об изгибе круглой пластинки под действием нагрузки, равномерно распределенной по внутренней части пластинки, ограниченной радиусом R_i .

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластинки
- Радиус $R=1$ м
- Радиус $R_i=0.5$ м
- Толщина $h=0.01$ м
- Используются сферические координаты



Граничные условия:

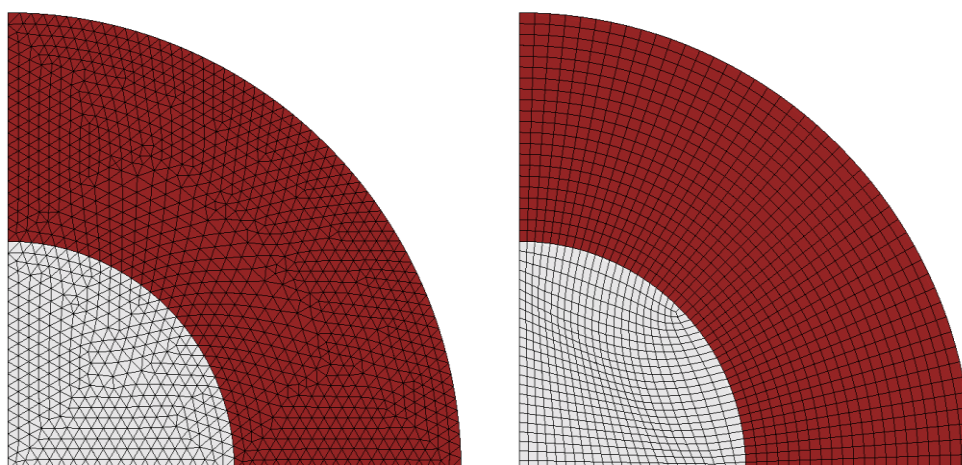
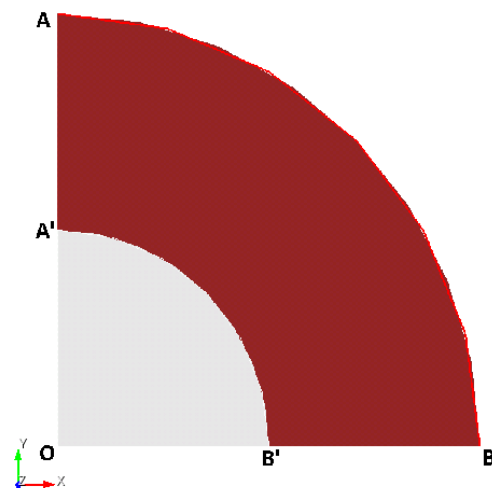
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Закрепление по всем перемещениям на кривой AB
- Равномерно распределенная нагрузка по поверхности OA'B' $q = 10$ кПа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 546 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (2 546 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (1 541 элемент)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (1 541 элемент)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (1 541 элемент)



Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_z в точке O (0, 0, 0) равно -0.016941 м с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [19]:

$$u_z|_{r=0} = -\frac{P}{16\pi D} \left[\frac{3+\nu}{1+\nu} R_o^2 + R_i^2 \ln \frac{R_i}{R_o} - \frac{7-3\nu}{4(1+\nu)} R_i^2 \right],$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $P = \pi R_i q$,

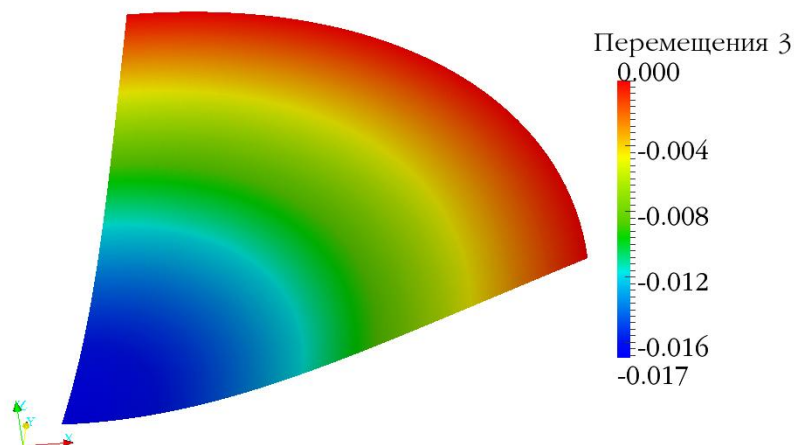
Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

Величина	Теор. значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ²¹	
		TRISHELL3		TRISHELL6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{r=0}, \text{ м}$	-0.01694	-0.01693	0.06%	-0.01694	<0.01%	-0.016937	0.02%

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ²²	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{r=0}, \text{ м}$	-0.01694	-0.016936	0.01%	-0.01694	<0.01%	-0.01695	0.06%	-0.016937	0.02%

На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_z на нижней поверхности :



²¹ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 951 элементов).

²² Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 1 951 элементов).

Тест 1.1.13: Квадратная пластина, защемленная по контуру и нагруженная в центре

Рассматривается задача об изгибе квадратной пластинки, защемленной по всему контуру, под действием сосредоточенной нагрузки, приложенной в центре пластинки.

Геометрическая модель:

- Сторона $a=1$ м
- Толщина $h=0.01$ м

Граничные условия:

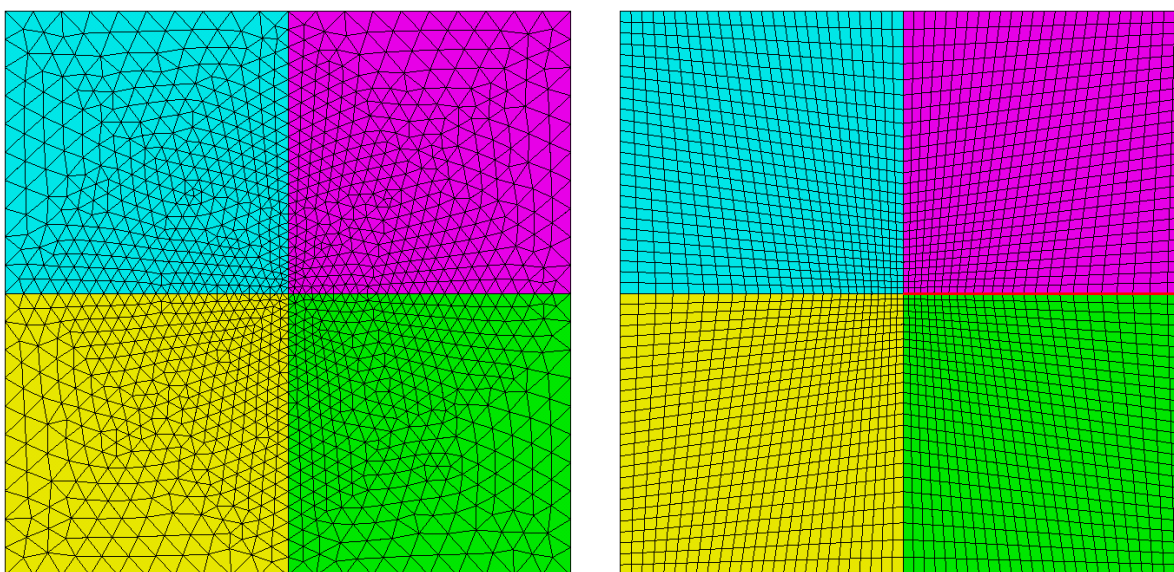
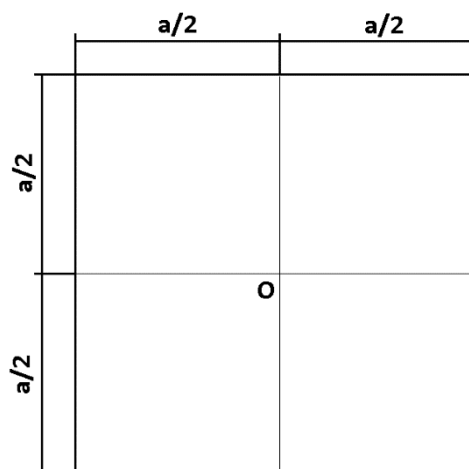
- Закрепление по всем перемещениям и поворотам на всех сторонах пластины
- Сосредоточенная сила в точке O $P=100$ кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая в окрестности точки O
- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 850 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (2 850 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (2 704 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (2 704 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (2 704 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_z в точке O (0, 0, 0) равно -0.030576 м с точностью 2%

Значения вычислены по следующим формулам [19]:

$$u_z|_{x=y=0} = -0.0056 \frac{Pa^2}{D}, \text{ где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

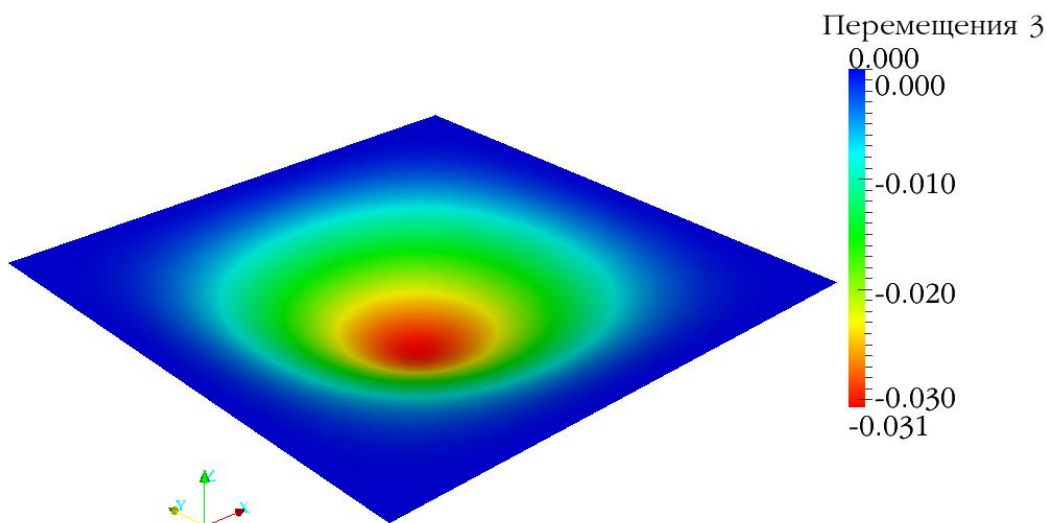
Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

Величина	Теор. значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ²³	
		TRISHELL3		TRISHELL6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _0, \text{ м}$	-0.030576	-0.0305	0.25%	-0.030922	1.13%	-0.03077	0.69%

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ²⁴	
		Shell4		Shell8		Shell8			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{x=y=0}, \text{ м}$	-0.030576	-0.03076	0.60%	-0.03087	0.96%	-0.03084	-0.86%	-0.03077	0.69%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_z :



²³ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 500 элементов).
 Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 500 элементов).

Тест 1.1.14: Квадратная пластинка, два противоположных края которой свободно оперты, два других свободны

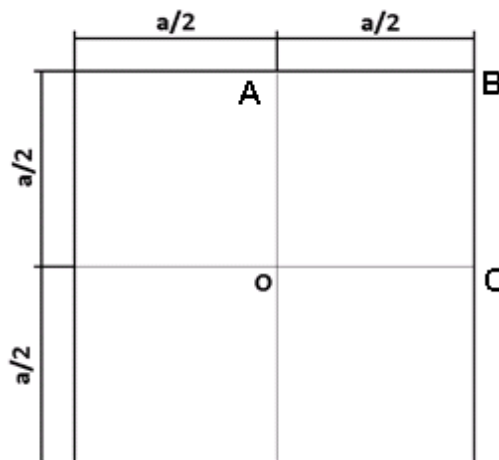
Рассматривается задача об изгибе квадратной пластинки, свободно опертой по двум противоположным краям и свободной по двум другим, под действием равномерно распределенной по всей поверхности пластинки нагрузки.

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Сторона $a=1$ м
- Толщина $h=0.01$ м

Граничные условия:

- Закрепление по всем перемещениям на стороне BC
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Равномерно распределенная нагрузка по всей поверхности OAB $q = 10$ кПа

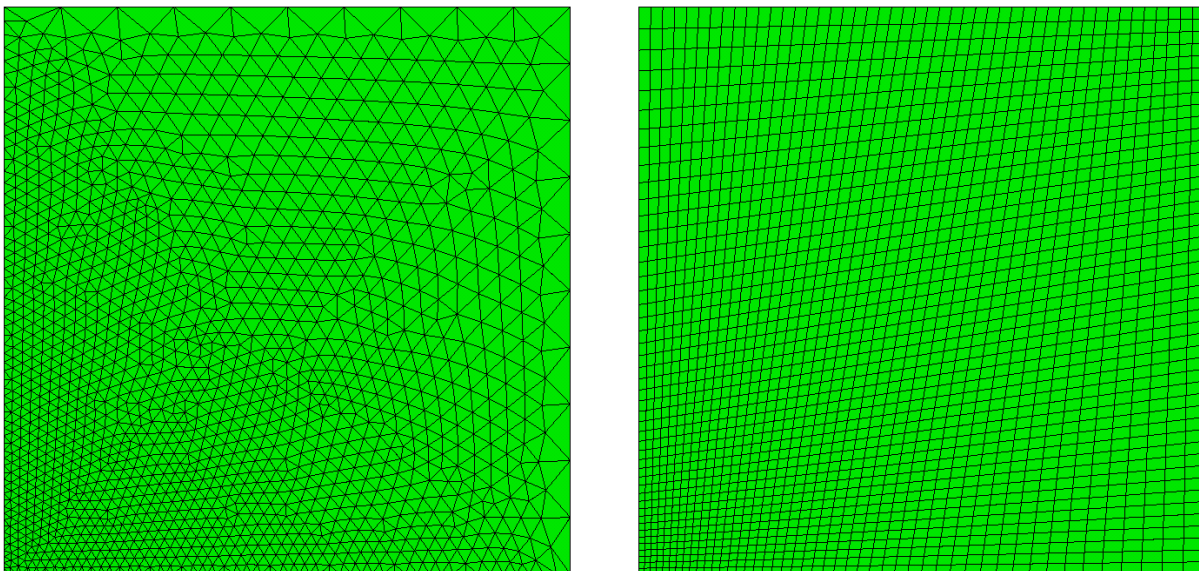


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая в окрестности точки O
- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 916 элементов)
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 916 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (3 025 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (3 025 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (3 025 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_z в точке O (0, 0, 0) равно -0.007147 м с точностью 1%
- Момент M_x в точке O (0, 0, 0) равен 1 225 Н с точностью 1%
- Момент M_y в точке O (0, 0, 0) равен 270 Н с точностью 1%
- Перемещение u_z в точке A (0, 0.5, 0) равно -0.008239 м с точностью 1%
- Момент M_x в точке A (0, 0.5, 0) равен 1 318 Н с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [19]:

$$u_z|_{x=y=0} = -0.1309 \frac{qa^4}{D}, \quad u_z|_{y=\frac{a}{2}, x=0} = -0.01509 \frac{qa^4}{D}, \quad \text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$M_x|_{x=y=0} = 0.1225qa^2, \quad M_y|_{x=y=0} = 0.0271qa^2,$$

$$M_x|_{y=\frac{a}{2}, x=0} = 0.1318qa^2.$$

Результаты:

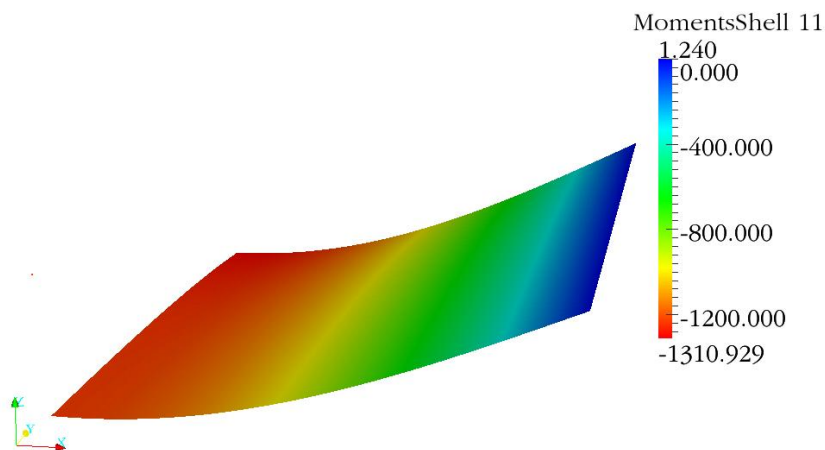
- Полученные значения представлены в таблице:

Величина	Теор. значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ²⁵	
		Trishell3		Trishell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{x=y=0}, \text{ м}$	-0.007147	-0.007148	0.01%	-0.007152	0.07%	-0.00715	0.04%
$M_x _{x=y=0}, \text{ Н}$	1 225	1 224.9	0.01%	1 225.28	-0.02%	-1 225.0	0%
$M_y _{x=y=0}, \text{ Н}$	271	270.038	0.35%	268.987	0.74%	-269.02	0.73%
$u_z _{y=\frac{a}{2}, x=0}, \text{ м}$	-0.008239	-0.00819	0.59%	-0.008214	0.30%	0.00821	0.035%
$M_x _{y=\frac{a}{2}, x=0}, \text{ Н}$	1 318	1 297.10	1.59%	1 312.69	0.40%	-1 307.6	0.79%

²⁵ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 500 элементов).

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ²⁶	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{x=y=0}, M$	-0.007147	-0.007149	0.03%	-0.007152	0.07%	-0.007151	-0.06%	-0.00715	0.04%
$M_x _{x=y=0}, H$	1 225	1 225.16	0.01%	1 225.34	0.03%	1 225.48	-0.04%	-1 225.0	0%
$M_y _{x=y=0}, H$	271	269.25	0.65%	269.20	0.66%	268.8	0.81%	-269.02	0.73%
$u_z _{y=\frac{a}{2}, x=0}, M$	-0.008239	-0.00821	0.35%	-0.008212	0.33%	-0.008215	0.29%	0.00821	0.035%
$M_x _{y=\frac{a}{2}, x=0}, H$	1 318	1 311.33	0.51%	1 308.94	0.69%	1 317.64	0.03%	-1 307.6	0.79%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения поля моментов M_x :



²⁶ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 852 элементов).



Тест 1.1.15: Квадратная свободно опертая пластина под совместным действием равномерно распределенной поперечной нагрузки и равномерного растяжения

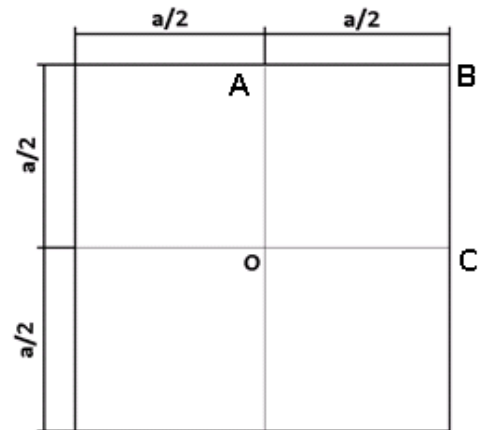
Рассматривается задача об изгибе квадратной пластинки, свободно опертой по двум противоположным краям и свободной по двум другим, под действием равномерно распределенной по всей поверхности пластинки нагрузки.

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Сторона $a=1$ м
- Толщина $h=0.01$ м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси Z на прямой BC
- Нулевые перемещения U_y и U_z на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Равномерно распределенная нагрузка по прямой BC вдоль оси X $P = 723\,048$ Н/м
- Равномерно распределенная нагрузка по всей поверхности OAB $q = 10$ кПа

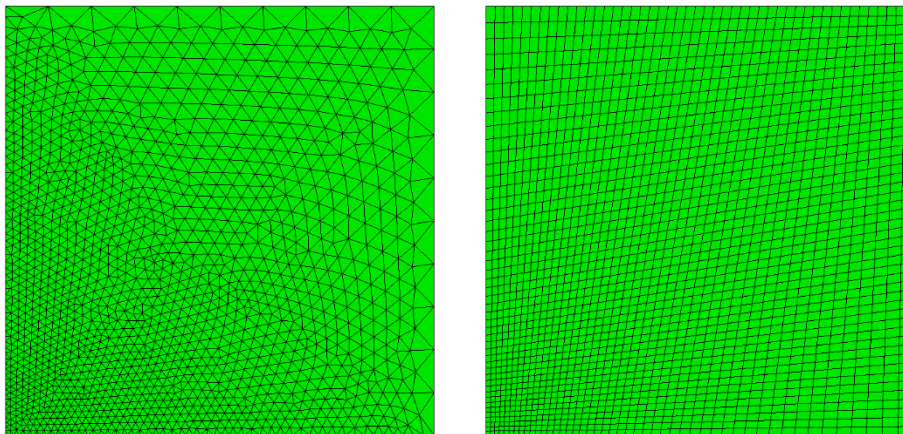


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Измельчённая в окрестности точки O
- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 916 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (2 916 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (3 025 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (3 025 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (3 025 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_z в точке O (0, 0, 0) равно -2.250 мм с точностью 1.5%
- Момент M_x в точке O (0, 0, 0) равен 480 Н с точностью 1.5%
- Момент M_y в точке O (0, 0, 0) равен 480 Н с точностью 1.5%

Значения вычислены по следующим формулам [19]:

$$u_z|_{x=y=0} = -0.045 \frac{qa^4}{Eh^3},$$

$$M_x|_{x=y=0} = 0.048qa^2, M_y|_{x=y=0} = 0.048qa^2,$$

Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

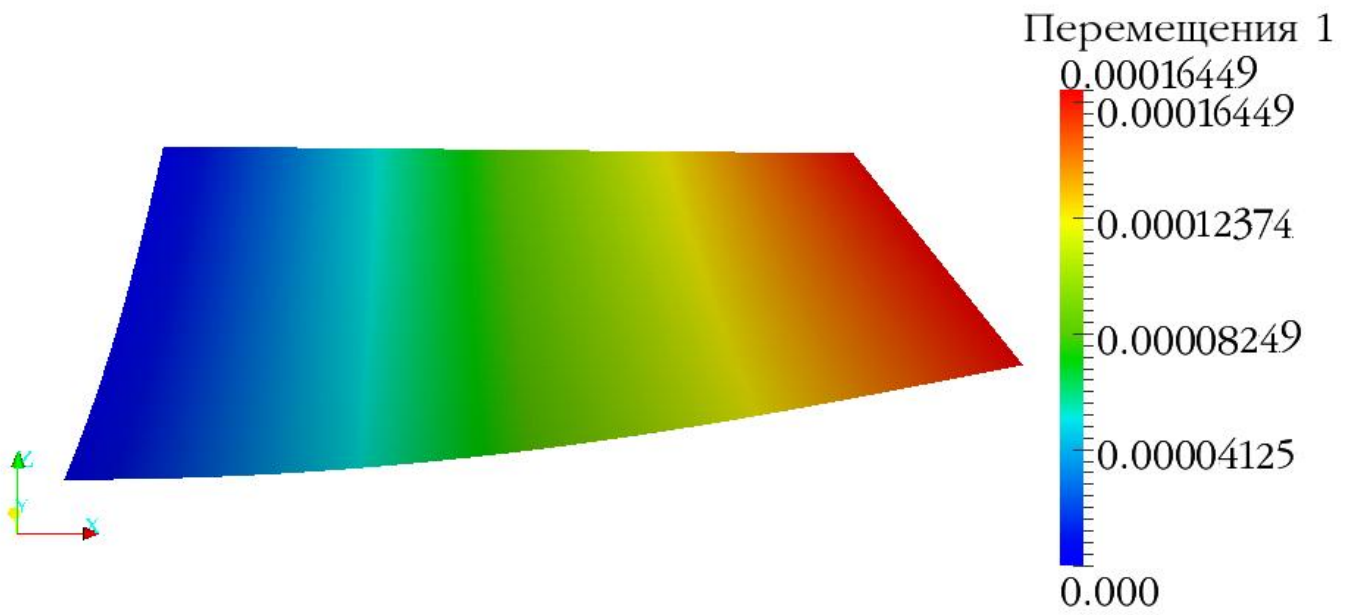
Величина	Теор. значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS ²⁷	
		Trishell3		Trishell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{x=y=0}$, мм	-2.250	-2.223	1.20%	-2.234	0.71%	-2.234	0.71%
$M_x _{x=y=0}$, Н	480	479.77	0.05%	481.29	0.27%	481.16	0.24%
$M_y _{x=y=0}$, Н	480	479.77	0.05%	481.29	0.27%	481.16	0.24%

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS ²⁸	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z _{x=y=0}$, мм	-2.250	-2.233	0.76%	-2.2331	0.75%	-2.2377	0.55%	-2.234	0.71%
$M_x _{x=y=0}$, Н	480	481.117	0.23%	481.091	0.23%	482.482	-0.52%	481.16	0.24%
$M_y _{x=y=0}$, Н	480	481.117	0.23%	481.091	0.23%	482.482	-0.52%	481.16	0.24%

²⁷ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 500 элементов).

²⁸ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 2 500 элементов).

- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений u_x :

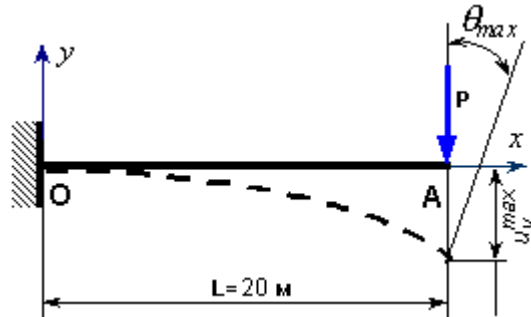




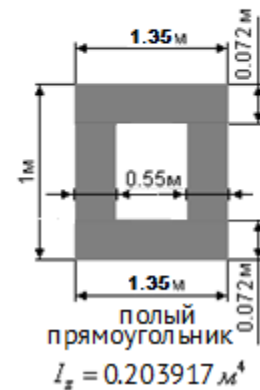
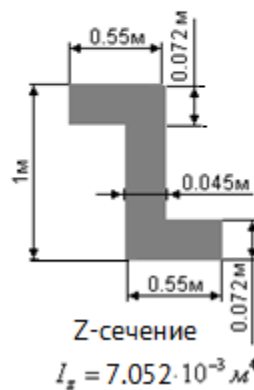
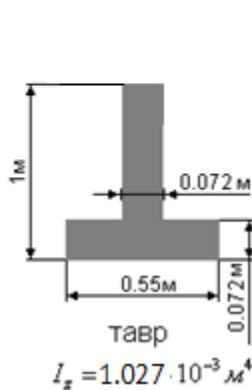
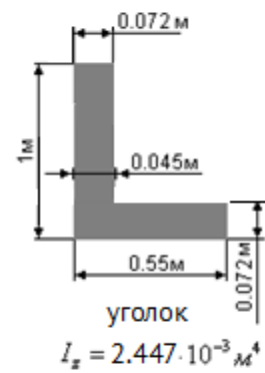
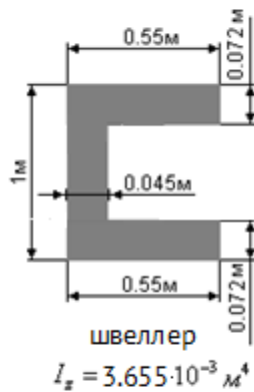
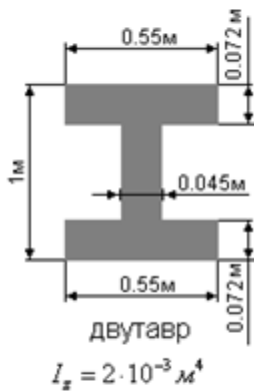
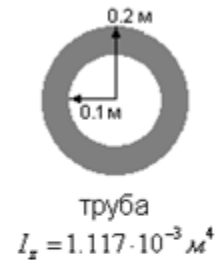
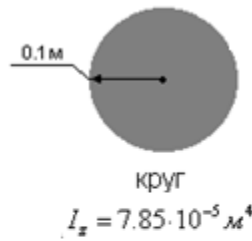
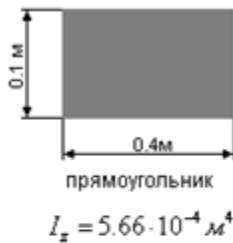
Тест 1.1.16: Консольная балка с сосредоточенной силой на свободном конце

Рассматривается задача об изгибе балки, заземленной на одном конце и приложенной сосредоточенной силой на другом. При этом приводятся решения для четырех видов поперечных сечений – прямоугольник, круг, труба, двутавр (четыре отдельных теста).

Геометрическая модель:



Сечение:



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты вдоль всех осей в точке O
- Сосредоточенная сила в точке A $P = 1$ кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Для прямоугольного сечения:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.025 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.0019 рад с точностью 1%
- Для круглого сечения:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.169851 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.012739 рад с точностью 1%
- Для сечения труба:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.011318 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.000849 рад с точностью 1%
- Для сечения двутавр:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -0.006667 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -0.000500 рад с точностью 1%
- Для сечения швеллер:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -3.65E-03 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -2.74E-04 рад с точностью 1%
- Для сечения уголок:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -5.45E-03 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -4.09E-04 рад с точностью 1%
- Для сечения тавр:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -1.30E-02 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен -9.74E-04 рад с точностью 1%
- Для Z-сечения:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно -1.89E-03 м с точностью 1%

- Угол поворота сечения θ в точке А (20, 0, 0) равен $-1.42E-04$ рад с точностью 1%
- Для сечения полый прямоугольник:
 - Перемещение u_y в точке А (20, 0, 0) равно $-6.54E-05$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (20, 0, 0) равен $-4.9040E-06$ рад с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [20]:

$$u_y|_{x=L} = -\frac{PL^3}{3EI_z}, \quad \theta_z|_{x=L} = -\frac{PL^2}{2EI_z}.$$

Результаты:

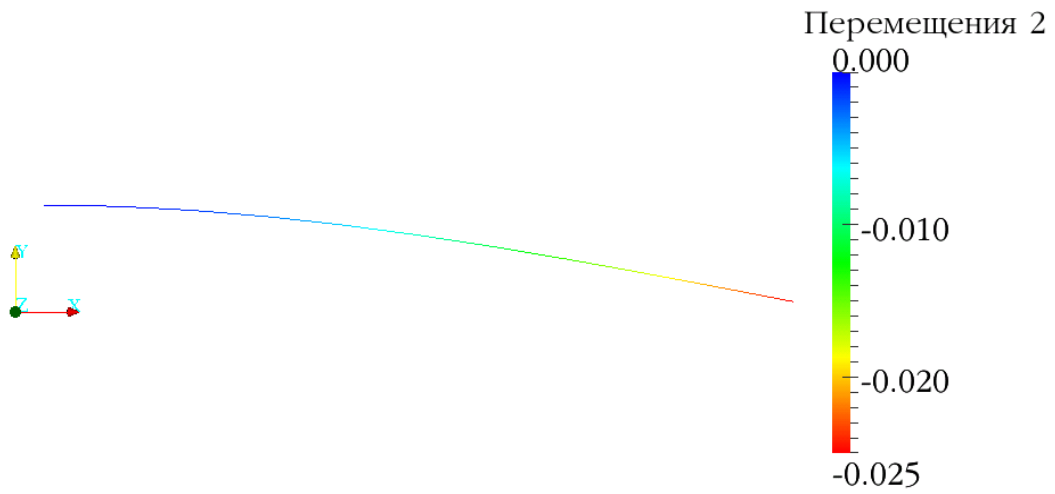
- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	Величина	Теор. значение	Численный анализ			
			FIDESYS		ANSYS ²⁹	
			Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Прямоугольник	$u_y _{x=L}$, М	-2.5E-02	-2.5000E-02	0%	-2.49E-02	0.40%
	$\theta_z _{x=L}$	-1.90E-03	-1.8750E-03	1.32%	-1.8750E-03	1.32%
Круг	$u_y _{x=L}$, М	-1.69E-01	-1.6977E-01	0.05%	-1.6978E-01	0.04%
	$\theta_z _{x=L}$	-1.2739E-02	-1.2732E-02	0%	-1.2759E-02	0.16%
Труба	$u_y _{x=L}$, М	-1.1318E-02	-1.1318E-02	0%	-1.1325E-02	0.06%
	$\theta_z _{x=L}$	-8.4900E-04	-8.4900E-04	0%	-8.51E-04	0.24%
Двутавр	$u_y _{x=L}$, М	-6.6670E-03	-6.6570E-03	0.15%	-6.6480E-03	0.28%
	$\theta_z _{x=L}$	-5.0000E-04	-4.9900E-04	0.20%	-4.99E-04	0.20%
Швеллер	$u_y _{x=L}$, М	-3.65E-03	-3.6480E-03	0.05%	-3.647E-03	0.08%
	$\theta_z _{x=L}$	-2.74E-04	-2.7360E-04	0.15%	-2.7358E-04	0.15%
Уголок	$u_y _{x=L}$, М	-5.45E-03	-5.4439E-03	0.11%	-5.4488E-03	0.02%
	$\theta_z _{x=L}$	-4.09E-04	-4.0829E-04	0.17%	-4.0866E-04	0.08%
Тавр	$u_y _{x=L}$, М	-1.30E-02	-1.2981E-02	0.14%	-1.3080E-02	-0.62%
	$\theta_z _{x=L}$	-9.74E-04	-9.7361E-04	0.04%	-9.7360E-04	0.04%
Z-сечение	$u_y _{x=L}$, М	-1.89E-03	-1.8906E-03	-0.03%	-1.8907E-03	-0.04%
	$\theta_z _{x=L}$	-1.42E-04	-1.4179E-04	0.15%	-1.4180E-04	0.14%
Полый прямоугольник	$u_y _{x=L}$, М	-6.54E-05	-6.5386E-05	0.02%	-6.6229E-05	-1.27%
	$\theta_z _{x=L}$	-4.90E-06	-4.9040E-06	-0.08%	-4.9040E-06	-0.08%

²⁹ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента BEAM4, 10 элементов).



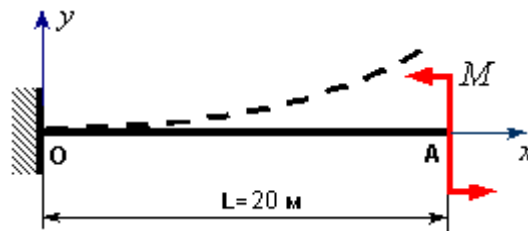
- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_y для прямоугольного сечения:



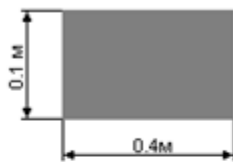
Тест 1.1.17: Консольная балка с сосредоточенным моментом на свободном конце

Рассматривается задача об изгибе балки, защемленной на одном конце и приложенным сосредоточенным моментом на другом. При этом приводятся решения для четырех видов поперечных сечений – прямоугольник, круг, труба, двутавр (четыре отдельных теста).

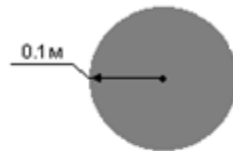
Геометрическая модель:



Сечение:



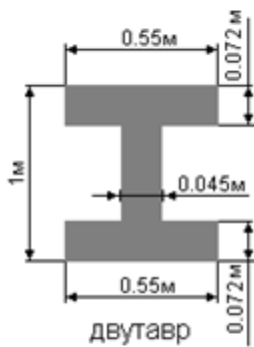
прямоугольник
 $I_z = 5.66 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$



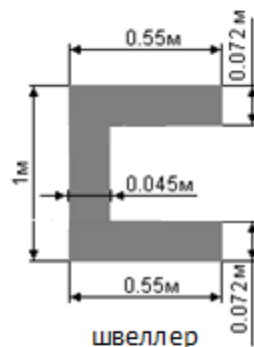
круг
 $I_z = 7.85 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$



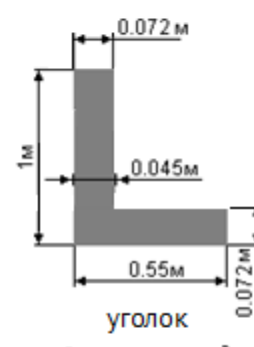
труба
 $I_z = 1.117 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$



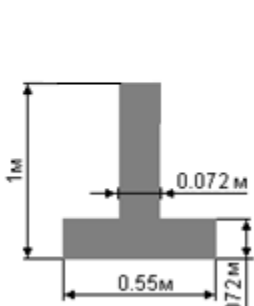
двутавр
 $I_z = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$



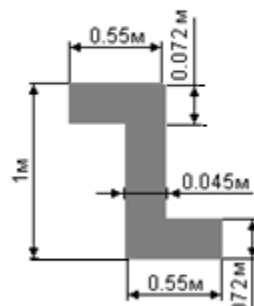
швеллер
 $I_z = 3.655 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$



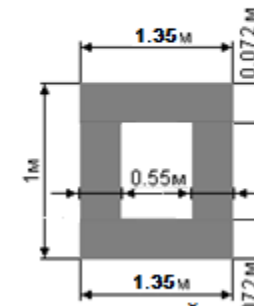
уголок
 $I_z = 2.447 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$



тавр
 $I_z = 1.027 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$



Z-сечение
 $I_z = 7.052 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4$



полюй
прямоугольник
 $I_z = 0.203917 \text{ м}^4$

Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты вдоль всех осей в точке O
- Сосредоточенный момент в точке A $M = 1$ кН·м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Для прямоугольного сечения:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $1.875E-03$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $1.875E-04$ рад с точностью 1%
- Для круглого сечения:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $1.274E-02$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $1.274E-03$ рад с точностью 1%
- Для сечения труба:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $8.950E-04$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $8.953E-05$ рад с точностью 1%
- Для сечения двутавр:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $5.000E-04$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $5.000E-05$ рад с точностью 1%
- Для сечения швеллер:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $2.740E-04$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $2.736E-05$ рад с точностью 1%
- Для сечения уголок:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $4.090E-04$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $4.087E-05$ рад с точностью 1%
- Для сечения тавр:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $9.740E-04$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $9.737E-05$ рад с точностью 1%
- Для Z-сечения:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $1.420E-04$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $1.418E-05$ рад с точностью 1%

- Для сечения полый прямоугольник:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно 5.000E-06 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен 4.900E-07 рад с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [20]:

$$u_y|_{x=L} = \frac{ML^2}{2EI_z}, \quad \theta_z|_{x=L} = -\frac{ML}{EI_z}.$$

Результаты:

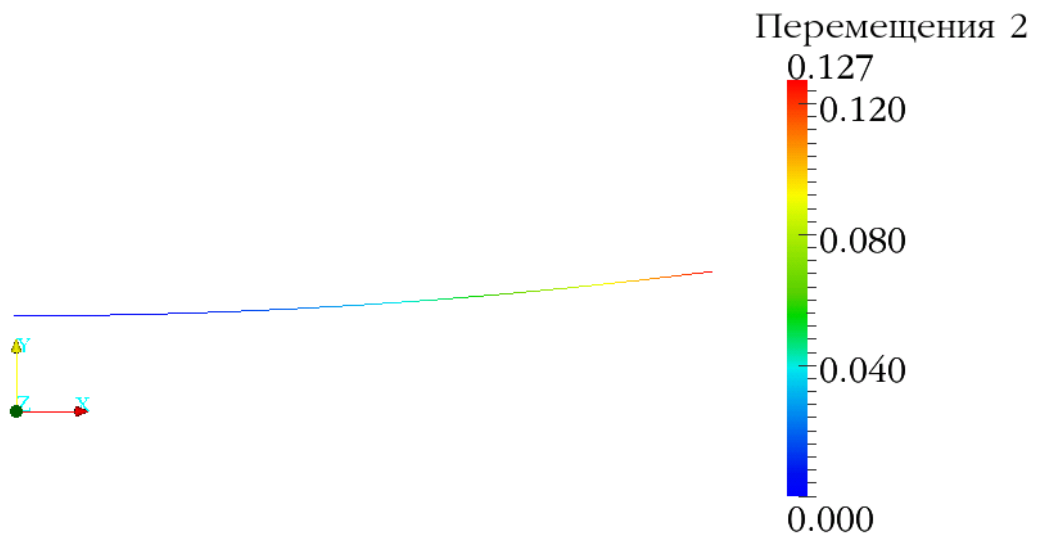
- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	Величина	Теор. значение	Численный анализ			
			FIDESYS		ANSYS ³⁰	
			Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Прямоугольник	$u_y _{x=L}$, м	1.875E-03	1.875E-03	<0.01%	1.875E-03	<0.01%
	$\theta_z _{x=L}$	1.875E-04	1.875E-04	<0.01%	1.875E-04	<0.01%
Круг	$u_y _{x=L}$, м	1.274E-02	1.273E-02	0.05%	1.276E-02	0.16%
	$\theta_z _{x=L}$	1.274E-03	1.273E-03	0.05%	1.276E-03	0.16%
Труба	$u_y _{x=L}$, м	8.950E-04	8.488E-04	5.16%	8.506E-04	4.96%
	$\theta_z _{x=L}$	8.953E-05	8.488E-05	5.19%	8.506E-05	4.99%
Двутавр	$u_y _{x=L}$, м	5.000E-04	4.993E-04	0.15%	4.993E-04	0.15%
	$\theta_z _{x=L}$	5.000E-05	4.993E-05	0.15%	4.993E-05	0.15%
Швеллер	$u_y _{x=L}$, м	2.740E-04	2.736E-04	0.15%	2.736E-04	0.15%
	$\theta_z _{x=L}$	2.736E-05	2.736E-05	0.01%	2.736E-05	0.01%
Уголок	$u_y _{x=L}$, м	4.090E-04	4.083E-04	0.17%	4.087E-04	0.08%
	$\theta_z _{x=L}$	4.087E-05	4.083E-05	0.10%	4.087E-05	0.01%
Тавр	$u_y _{x=L}$, м	9.740E-04	9.736E-04	0.04%	9.736E-04	0.04%
	$\theta_z _{x=L}$	9.737E-05	9.736E-05	0.01%	9.736E-05	0.01%
Z-сечение	$u_y _{x=L}$, м	1.420E-04	1.418E-04	0.15%	1.418E-04	0.14%
	$\theta_z _{x=L}$	1.418E-05	1.418E-05	<0.01%	1.418E-05	<0.01%
Полый прямоугольник	$u_y _{x=L}$, м	5.000E-06	4.904E-06	1.92%	4.904E-06	1.92%
	$\theta_z _{x=L}$	4.900E-07	4.904E-07	0.08%	4.904E-07	0.08%

³⁰ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента BEAM4, 10 элементов).



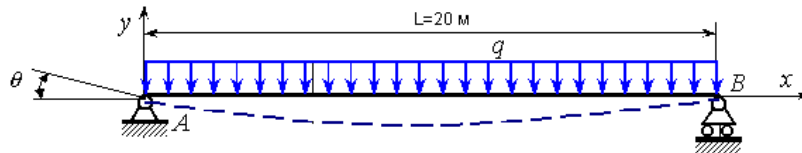
- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_y для круглого сечения:



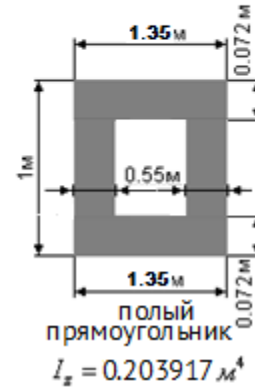
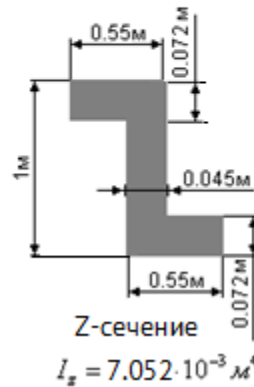
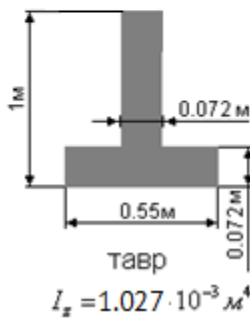
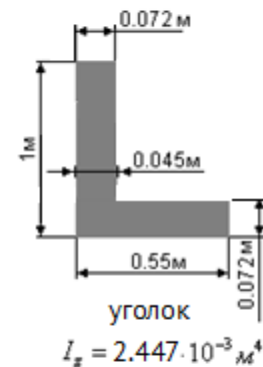
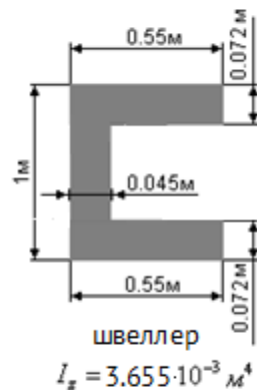
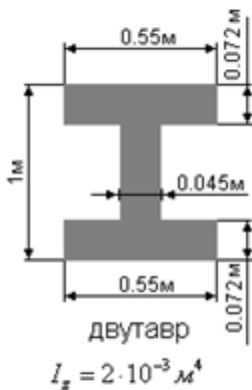
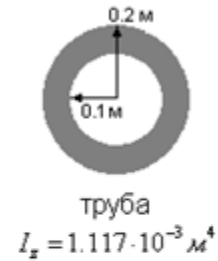
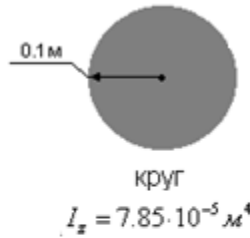
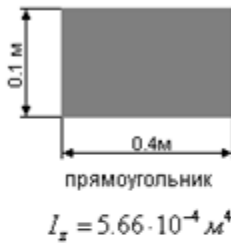
Тест 1.1.18: Балка с распределенной нагрузкой

Рассматривается задача об изгибе балки под действием равномерно распределенной нагрузки. При этом приводятся решения для четырех видов поперечных сечений – прямоугольник, круг, труба, двутавр (четыре отдельных теста).

Геометрическая модель:



Сечение:



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей в точках А и В
- Распределенная нагрузка на прямой АВ $q=1$ кН/м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Для прямоугольного сечения:
 - Перемещение u_y в точке С (10, 0, 0) равно $-1.950E-01$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (0, 0, 0) равен $-3.130E-02$ рад с точностью 1%
- Для круглого сечения:
 - Перемещение u_y в точке С (10, 0, 0) равно -0.1327 м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (0, 0, 0) равен $-2.120E-01$ рад с точностью 1%
- Для сечения труба:
 - Перемещение u_y в точке С (10, 0, 0) равно $-9.330E-02$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (0, 0, 0) равен $-1.490E-02$ рад с точностью 1%
- Для сечения двутавр:
 - Перемещение u_y в точке С (10, 0, 0) равно $-5.210E-02$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (0, 0, 0) равен $-8.330E-03$ рад с точностью 1%
- Для сечения швеллер:
 - Перемещение u_y в точке А (20, 0, 0) равно $-2.850E-02$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (20, 0, 0) равен $-4.560E-03$ рад с точностью 1%
- Для сечения уголок:
 - Перемещение u_y в точке А (20, 0, 0) равно $-4.260E-02$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (20, 0, 0) равен $-6.810E-03$ рад с точностью 1%
- Для сечения тавр:
 - Перемещение u_y в точке А (20, 0, 0) равно $-1.010E-01$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке А (20, 0, 0) равен $-1.620E-02$ рад с точностью 1%
- Для Z-сечения:
 - Перемещение u_y в точке А (20, 0, 0) равно $-1.480E-02$ м с точностью 1%

- Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $-2.360E-03$ рад с точностью 1%
- Для сечения полый прямоугольник:
 - Перемещение u_y в точке A (20, 0, 0) равно $-5.110E-04$ м с точностью 1%
 - Угол поворота сечения θ в точке A (20, 0, 0) равен $-8.170E-05$ рад с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [20]:

$$u_y|_{x=\frac{L}{2}} = -\frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI_z}, \quad \theta_z|_{x=0} = -\frac{1}{24} \frac{qL^3}{EI_z}.$$

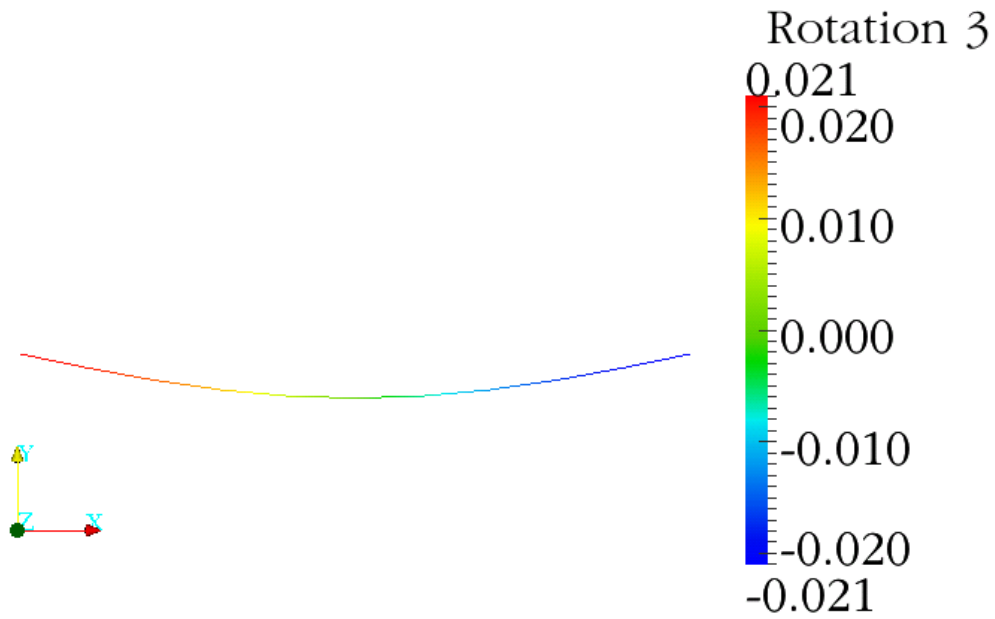
Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	Величина	Теор. значение	FIDESYS	
			Значение	Ошибка
Прямоугольник	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-1.950E-01	-1.933E-01	0.86%
	$\theta_z _{x=L}$	-3.130E-02	-3.093E-02	1.17%
Круг	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-1.330E+00	-1.313E+00	1.30%
	$\theta_z _{x=L}$	-2.120E-01	-2.101E-01	0.91%
Труба	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-9.330E-02	-8.752E-02	6.20%
	$\theta_z _{x=L}$	-1.490E-02	-1.400E-02	6.01%
Двутавр	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-5.210E-02	-5.147E-02	1.20%
	$\theta_z _{x=L}$	-8.330E-03	-8.237E-03	1.12%
Швеллер	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-2.850E-02	-2.821E-02	1.03%
	$\theta_z _{x=L}$	-4.560E-03	-4.514E-03	1.02%
Уголок	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-4.260E-02	-4.210E-02	1.18%
	$\theta_z _{x=L}$	-6.810E-03	-6.736E-03	1.08%
Тавр	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-1.010E-01	-1.004E-01	0.61%
	$\theta_z _{x=L}$	-1.620E-02	-1.606E-02	0.85%
Z-сечение	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-1.480E-02	-1.462E-02	1.22%
	$\theta_z _{x=L}$	-2.360E-03	-2.339E-03	0.87%
Полый прямоугольник	$u_y _{x=\frac{L}{2}, M}$	-5.110E-04	-5.056E-04	1.05%
	$\theta_z _{x=L}$	-8.170E-05	-8.091E-05	0.97%



- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения углов поворота сечения θ_z для круглого сечения:



Тест 1.1.19: Определение усилий в стержневой системе

Решается задача о статическом нагружении стержневой системы сосредоточенной силой.

Геометрическая модель:

- Длина стержней $l=1.414$ м
- Сечение балки эллипс $d=0.01$ м
- Углы $\alpha_1=\alpha_2=45^\circ$ $\alpha_p=90^\circ$

Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в точках А и В
- Сосредоточенная сила в точке В вдоль оси Y $F=-10^3$ Н

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2

Критерий прохождения теста:

- Усилие N_1 для первого стержня равно 707.106 Н с точностью 1%
- Усилие N_2 для второго стержня равно 707.106 Н с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [31]:

$$N_1 = -P \frac{\cos(\alpha_2 + \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad N_2 = P \frac{\cos(\alpha_1 - \alpha_p)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

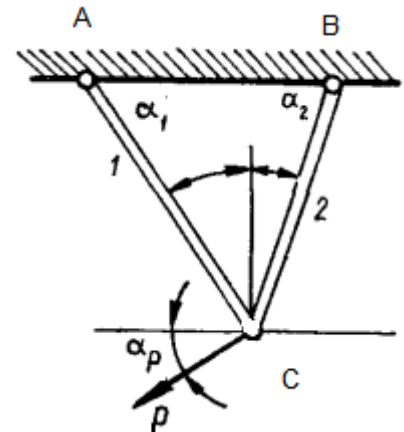
Для приведенных выше значений α_1 , α_2 и α_p

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ	
		FIDESYS	
		Значение	Ошибка
N_1 , Н	707.106	704.465	0.37%
N_2 , Н	707.106	704.465	0.37%

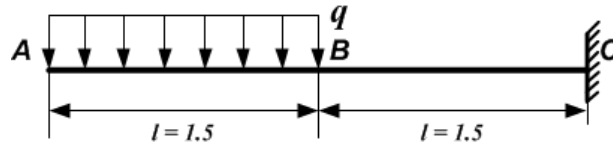




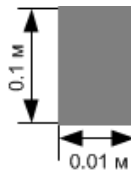
Тест 1.1.20: Консольная балка с распределенной нагрузкой на свободном конце

Рассматривается задача об изгибе консольной балки, половина которой нагружена распределенной нагрузкой. При этом приводится решение для прямоугольного поперечного сечения.

Геометрическая модель:



Сечение:



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты вдоль всех осей в точке С
- Распределенная нагрузка на прямой АВ $q=10$ кН/м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (400 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_y в точке А (0, 0, 0) равно -0.519 м с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [20]:

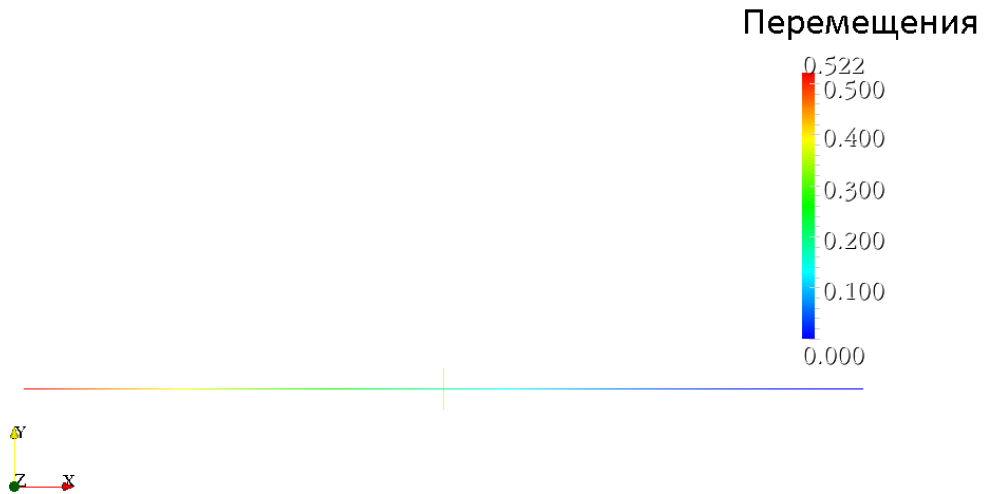
$$y_A = \frac{41}{24} * \frac{ql^4}{El_z}$$

Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	Величина	Теор. значение	Численный анализ	
			FIDESYS	
			Значение	Ошибка
Прямоугольник	u_A , м	-0.519	-0.522	0.58%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_y для прямоугольного сечения:



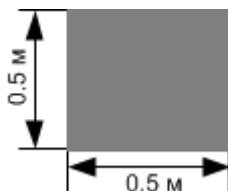
Тест 1.1.21: Вертикальный консольный стержень

Рассматривается задача об изгибе вертикального консольного стержня, нагруженного продольной и поперечной сосредоточенными нагрузками на свободном конце. При этом приводится решение для прямоугольного поперечного сечения.

Геометрическая модель:



Сечение:



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты вдоль всех осей на нижнем конце стержня
- Сосредоточенная продольная сила $N = 10\,000 \text{ кН}$ на верхнем конце стержня

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \text{ ГПа}$
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_y в точке A (0, 10, 0) равно -0.01333 м с точностью 1%
- Напряжение (балки) σ в точке A (0, 10, 0) равно $-4e7 \text{ Па}$ с точностью 1%

Значения вычислены по следующим формулам [20]:

$$u_y|_{x=L} = -\frac{Nl}{Ebh},$$

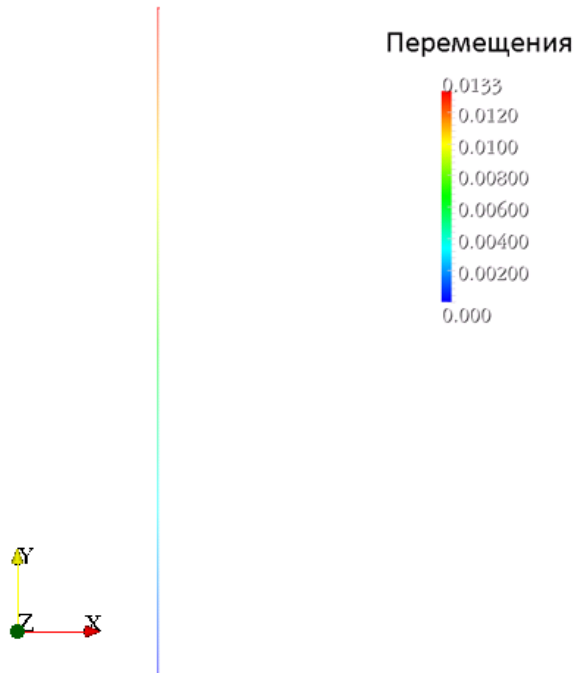
$$\sigma = -\frac{N}{bh}.$$

Результаты:

- Полученные значения представлены в таблице:

Сечение	Величина	Теор. значение	Численный анализ	
			FIDESYS	
			Значение	Ошибка
Прямоугольник	$u_y _{x=L}$, м	-0.01333	-0.01333	<0.01%
	$\sigma_y _{x=L}$, Па	-4e7	4e7	<0.01%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_y для прямоугольного сечения:



Тесты с известным численным решением

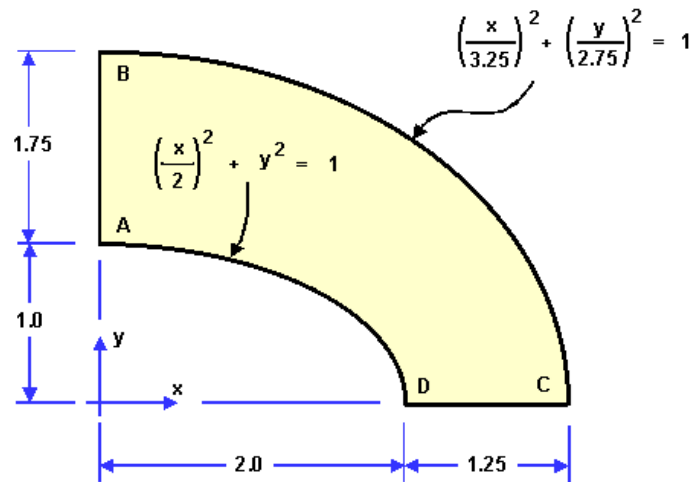
Тест 1.2.1: Напряжение эллипсоидальной пластинки (2D)

NAFEMS test "Elliptic Membrane", TestNoLE1, Date/Issue1986-07-01/1 [5].

Пример взят с сайта NAFEMS: http://www.caesarsystems.co.uk/NAFEMS_benchmarks/le1.html.

Решается задача о статическом нагружении двумерной эллипсоидальной пластинки.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на стороне AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на стороне CD
- Давление на сторону BC величиной 10 МПа

Параметры материала:

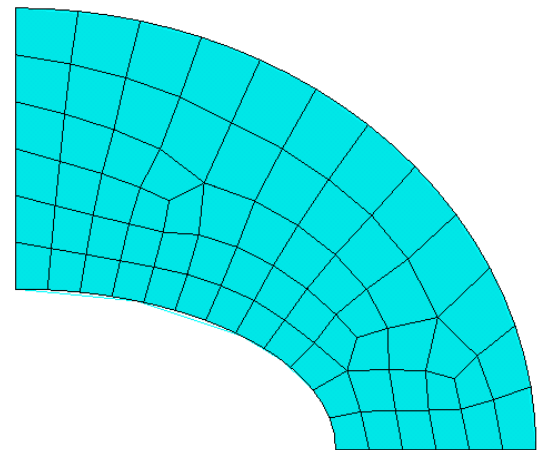
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- 8-узловые четырёхугольники Quad8 (68 элементов)

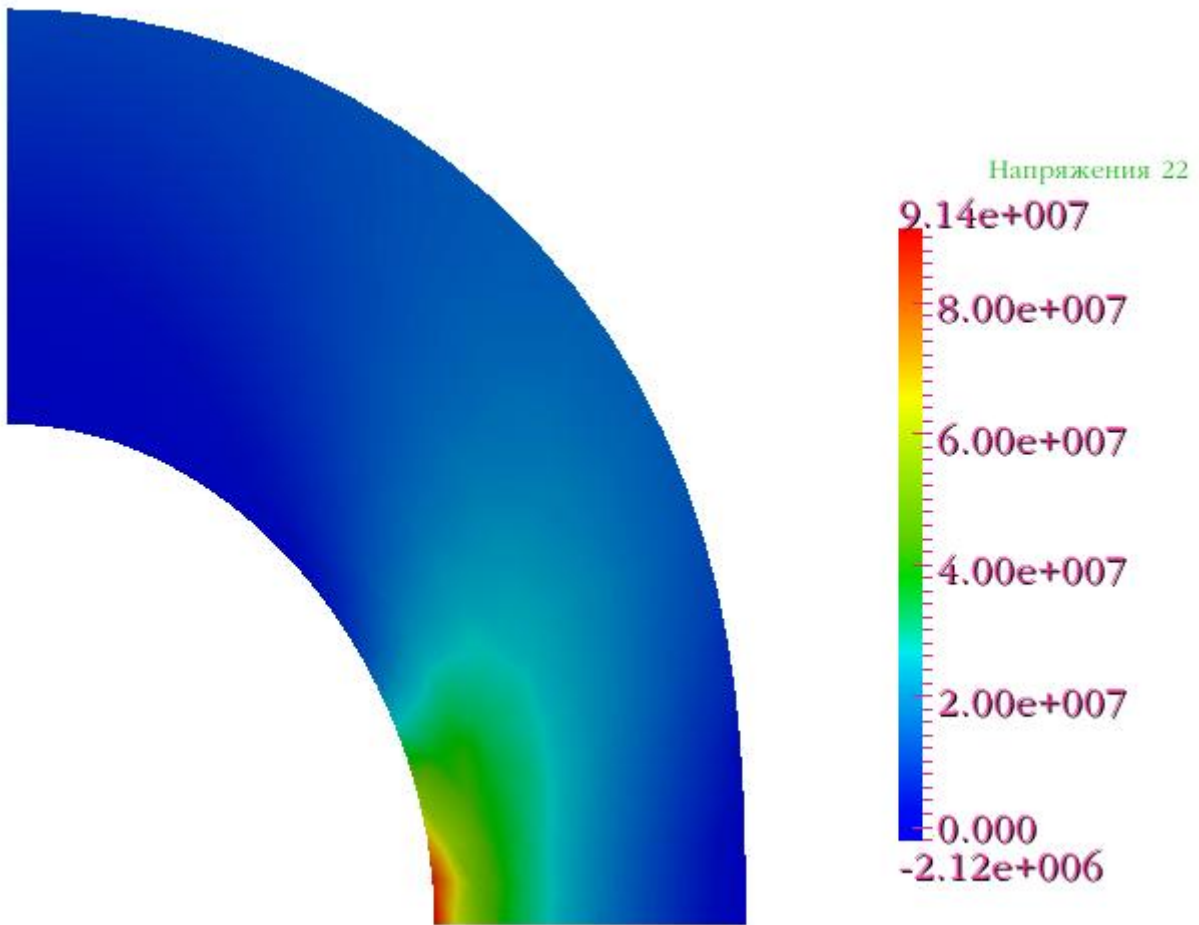
Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_{yy} в точке D равно 92.7 МПа [5] с точностью 2%



Результаты:

- Полученное значение σ_{yy} в точке D 91.37 МПа отличается от требуемого 92.7 МПа на 1.43%
- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем напряжения σ_{yy} :

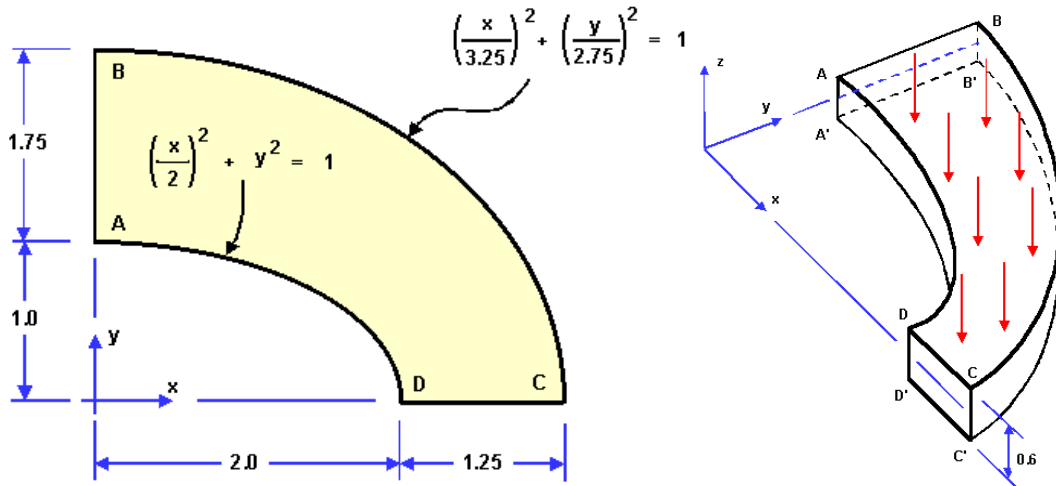


Тест 1.2.2: Нагружение эллипсоидальной пластинки (3D)

NAFEMS test "ThickPlatePressure", TestNoLE10, Date/Issue 1990-06-15/2 [5].

Решается задача о статическом нагружении эллипсоидальной пластинки.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на поверхности ABB'A'
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на поверхности CDD'C'
- Нулевые перемещения вдоль осей X и Y на поверхности CBB'C'
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на средней линии поверхности CBB'C'
- Давление на поверхность ABCD величиной 1 МПа

Параметры материала:

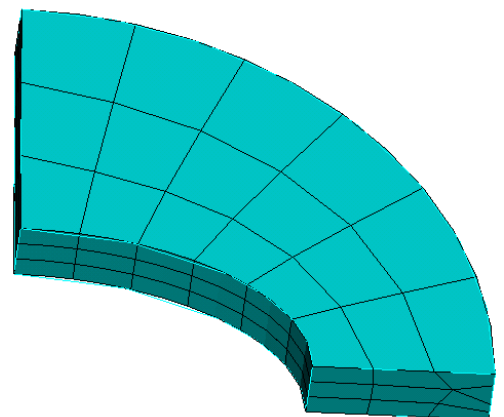
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- 20-узловые гексаэдры Hex20 (60 элементов)

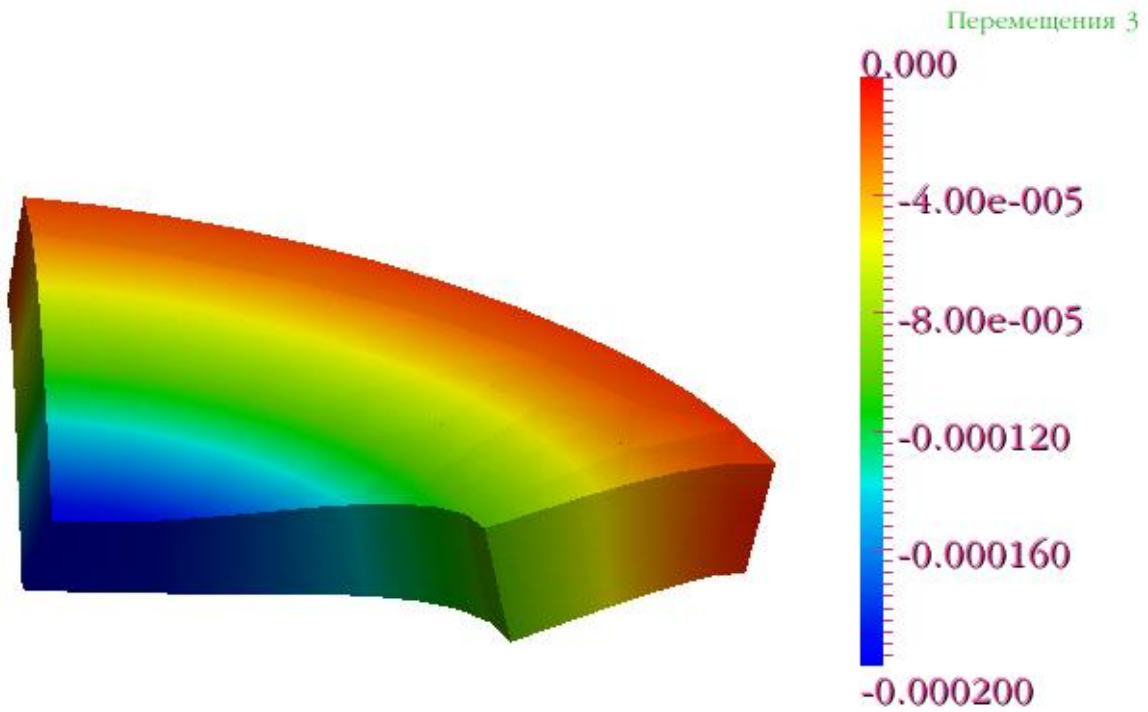
Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_{yy} в точке D равно -5.38 МПа [5] с точностью 2%



Результаты:

- Полученное значение σ_{yy} в точке D -5.2948 Мпа отличается от требуемого -5.38 МПа на 1.61%.
- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений по оси Z:



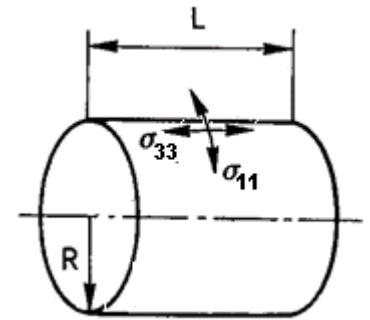
Тест 1.2.3: Цилиндр под внутренним давлением

R.J. Roark et W.C. Young, *Formulas for stress and strain*, 5e edition, New York, McGraw-Hill, 1975.

Решается задача о нагружении цилиндрической оболочки внутренним давлением.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть оболочки
- Длина $L=4$ м
- Радиус $R=1$ м
- Толщина $h=0.02$ м



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой DC ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Z в точке A
- Давление на поверхность ABCD величиной 10 кПа

Параметры материала:

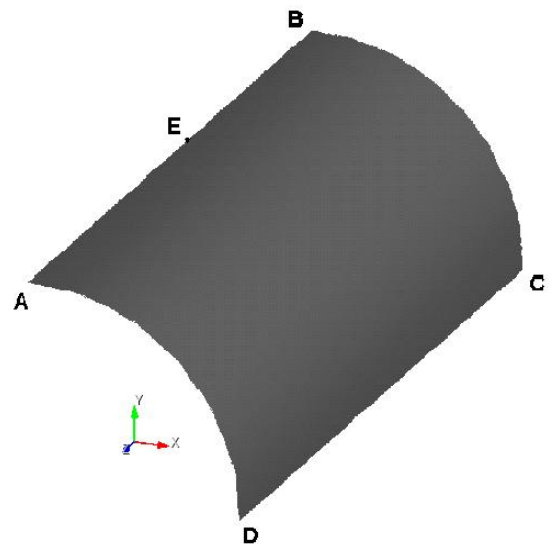
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 166 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (1 166 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (1 092 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (1 092 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (1 092 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_{33} в точке E (0,1,0) равно 0 Па с точностью 1%
- Напряжение σ_{11} в точке E (0,1,0) равно $5 \cdot 10^5$ Па с точностью 1%
- Перемещение u_2 в точке E (0,1,0) равно $2.38 \cdot 10^{-6}$ м с точностью 1%
- Перемещение u_3 в точке B (0,1,-2) равно $2.86 \cdot 10^{-6}$ м с точностью 1%



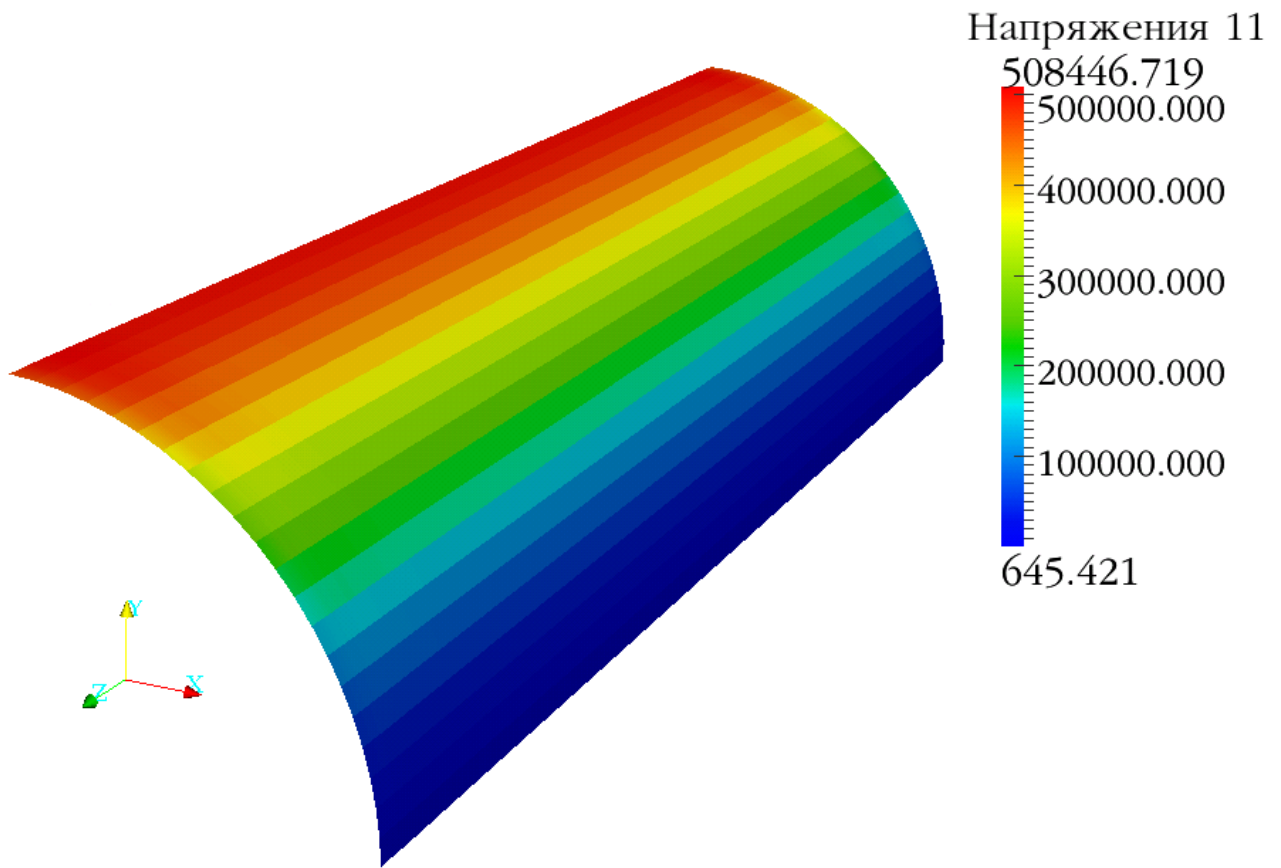
Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ЛИРА [8]:

Величина	Теор. значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ЛИРА	
		Trishell3		Trishell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{11} _E, \text{Па}$	$5 \cdot 10^5$	498354	0.33%	500824	0.16%	$4.957 \cdot 10^5$	0.86%
$u_2 _E, \text{м}$	$2.38 \cdot 10^{-6}$	$2.30431 \cdot 10^{-6}$	3.18%	$2.352 \cdot 10^{-6}$	1.18%	$2.3619 \cdot 10^{-6}$	0.76%
$u_3 _B, \text{м}$	$2.86 \cdot 10^{-6}$	$2.79248 \cdot 10^{-6}$	2.36%	$2.84216 \cdot 10^{-6}$	0.62%	$2.8327 \cdot 10^{-6}$	0.95%

Величина	Теор. значение	Численный анализ							
		FIDESYS						ЛИРА	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$\sigma_{11} _E, \text{Па}$	$5 \cdot 10^5$	498952	0.21%	500492	0.10%	499470	0.11%	$4.957 \cdot 10^5$	0.86%
$u_2 _E, \text{м}$	$2.38 \cdot 10^{-6}$	$2.379 \cdot 10^{-6}$	0.03%	$2.381 \cdot 10^{-6}$	0.04%	$2.381 \cdot 10^{-6}$	0.04%	$2.3619 \cdot 10^{-6}$	0.76%
$u_3 _B, \text{м}$	$2.86 \cdot 10^{-6}$	$2.855 \cdot 10^{-6}$	0.17%	$2.8571 \cdot 10^{-6}$	0.10%	$2.8571 \cdot 10^{-6}$	0.10%	$2.8327 \cdot 10^{-6}$	0.95%

- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем распределения напряжений σ_{11} :



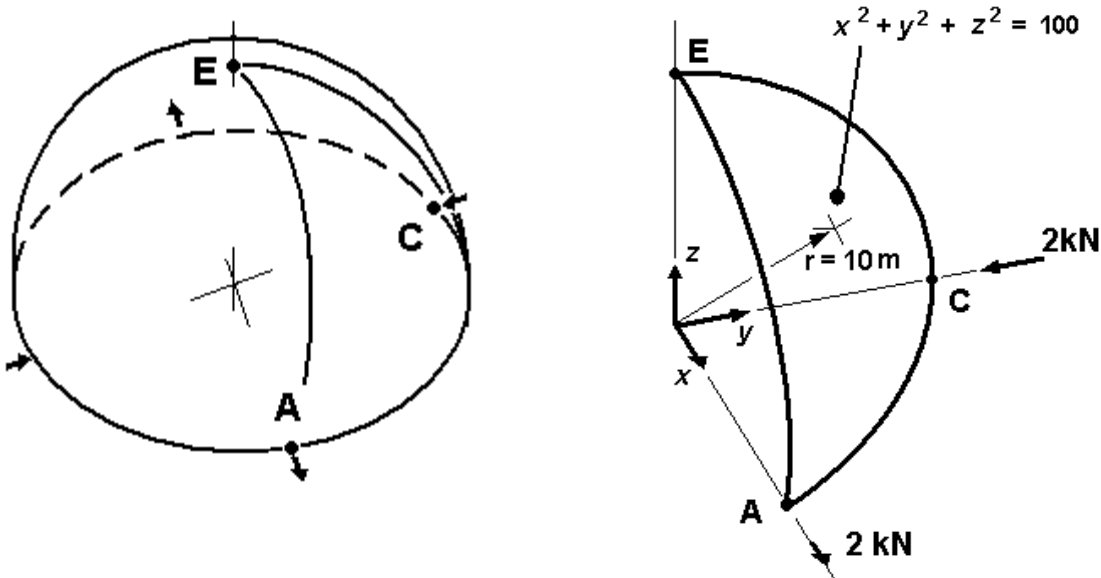


Тест 1.2.4: Нагружение сферической оболочки

NAFEMS test "ThickPlatePressure", TestNoLE10, Date/Issue1990-06-15/2 [5].

Решается задача о статическом нагружении сферической оболочки.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

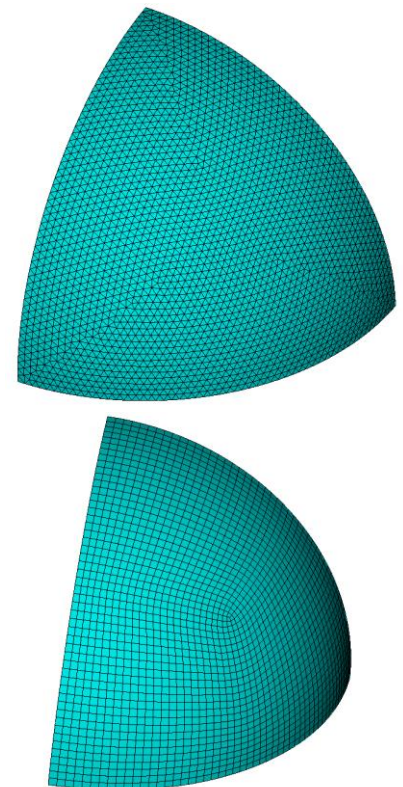


Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой CE
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой AE
- Нулевые перемещения вдоль оси Z в точке E
- Сосредоточенная сила в точке A вдоль оси X $F_A = 2\text{ kN}$
- Сосредоточенная сила в точке C вдоль оси Y $F_C = -2\text{ kN}$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 68.25 \cdot 10^3\text{ МПа}$
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Толщина 0.04



Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (5 422 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (5 422 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (4 800 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (4 800 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (4 800 элементов)

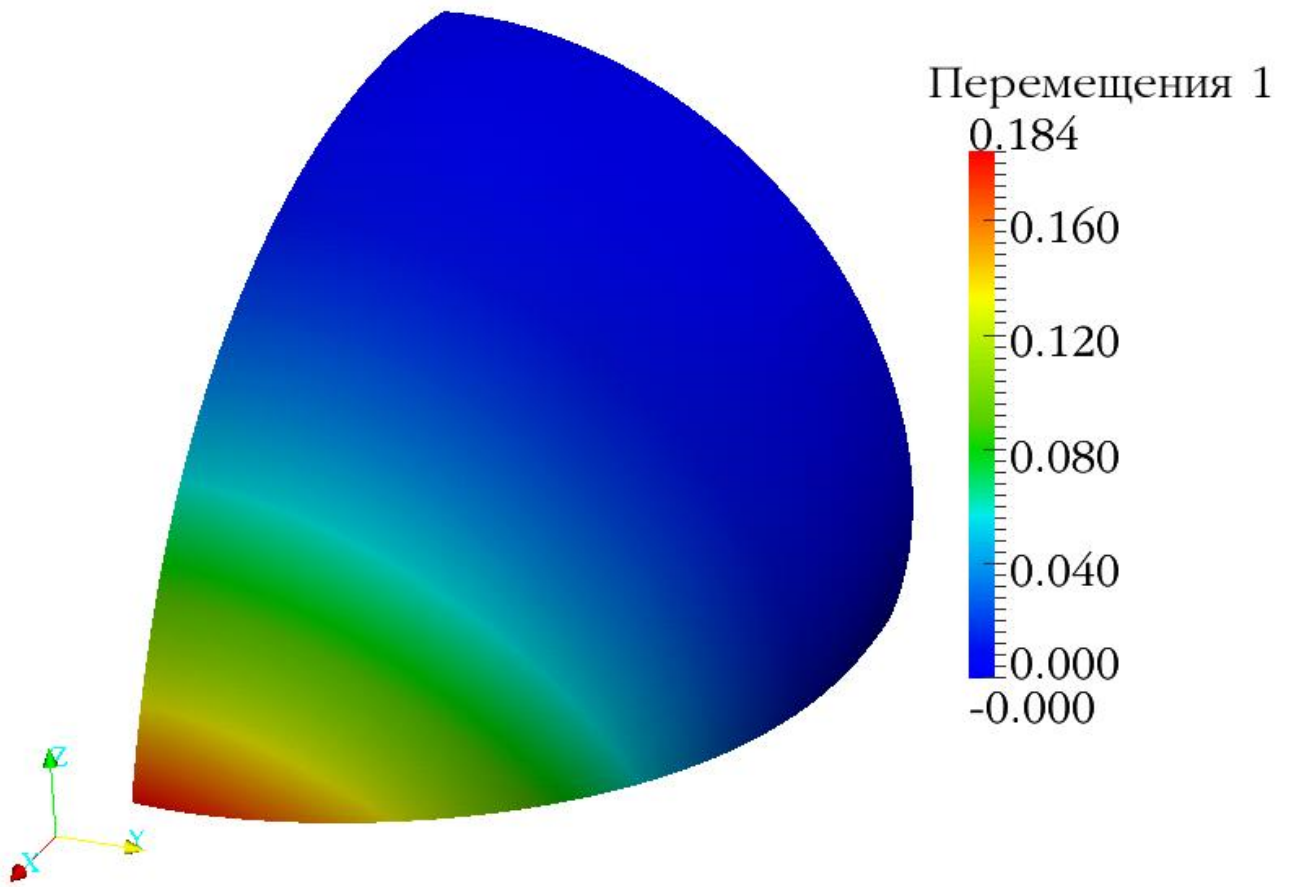
Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке А равно 0.185 [5] с точностью 1.5%

Результаты:

- Полученное значение u_x в точке А при разбиении на 3-узловые треугольные оболочки 0.184106 отличается от требуемого 0.185 м на 0.48%
- Полученное значение u_x в точке А при разбиении на 6-узловые четырёхугольные оболочки 0.185046 отличается от требуемого 0.185 м на 0.02%
- Полученное значение u_x в точке А при разбиении на 4-узловые четырёхугольные оболочки 0.184834 отличается от требуемого 0.185 м на 0.09%
- Полученное значение u_x в точке А при разбиении на 8-узловые четырёхугольные оболочки 0.184934 отличается от требуемого 0.185 м на 0.04%
- Полученное значение u_x в точке А при разбиении на 8-узловые четырёхугольные оболочки 0.185044 отличается от требуемого 0.185 м на 0.02%

- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений по оси X:





Тест 1.2.5: Осевая нагрузка для тонкостенного цилиндра

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique, 1990.) Test No. SSL507/89 [6].

Решается задача о нагружении цилиндрической оболочки нагрузкой, действующей вдоль оси цилиндра.

Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается 1/8 часть цилиндра
- Длина $L = 8$ м, радиус $R = 1$ м
- Толщина оболочки $t = 0.02$ м

Граничные условия:

- На стороне CD перемещения $u_y = R_x = R_z = 0$
- На стороне CB $u_x = R_y = R_z = 0$
- На стороне AD $u_z = R_x = R_y = 0$
- $q = 500\,000$ Н/м²

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

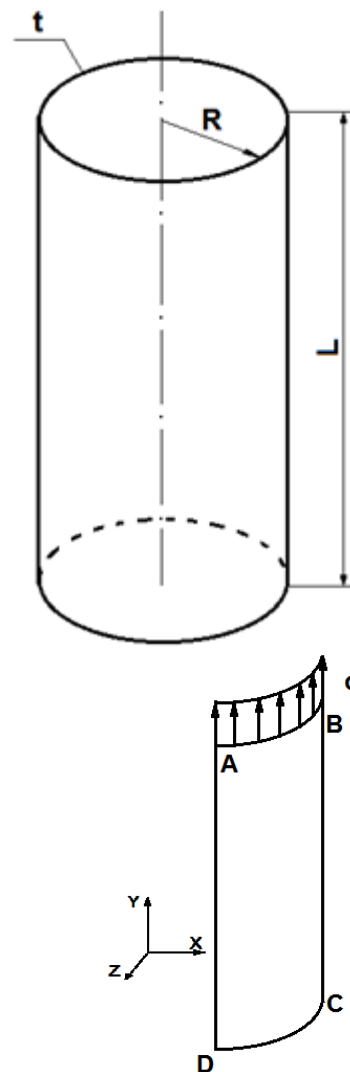
- 4-узловые четырехугольные элементы Shell4 (200 элементов)
- 8-узловые четырехугольные элементы Shell8 (200 элементов)
- 9-узловые четырехугольные элементы Shell9 (200 элементов)

Критерий прохождения теста [6]:

- Перемещение u_z в точке А равно $-7.140 \cdot 10^{-7}$ м с точностью 3%
- Перемещение u_y в точке А равно $9.520 \cdot 10^{-6}$ м с точностью 3%
- Напряжение σ_{11} в точке А равно 0 Па с точностью 3%
- Напряжение σ_{22} в точке А равно $5 \cdot 10^5$ Па с точностью 3%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:



Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ							
		FIDESYS						ЛИРА	
		Shell4		Shell8		Shell9		Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка		
$u_z, \text{ м}$	$-7.140 \cdot 10^{-7}$	$-7.1428 \cdot 10^{-7}$	0.04%	$-7.001 \cdot 10^{-7}$	1.95%	$-7.002 \cdot 10^{-7}$	1.97%	0.202	0%
$u_y, \text{ м}$	$9.520 \cdot 10^{-6}$	$9.5238 \cdot 10^{-6}$	0.04%	$9.5238 \cdot 10^{-6}$	0.04%	$9.5238 \cdot 10^{-6}$	0.04%	$4.957 \cdot 10^5$	0.86%
$\sigma_{11}, \text{ Па}$	0	$3.6 \cdot 10^{-9}$	<0.01%	-	-	-	-	$2.3619 \cdot 10^{-6}$	0.76%
$\sigma_{22}, \text{ Па}$	$5 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	0%	$5.001 \cdot 10^5$	0.03%	5.002	0.03%	$2.8327 \cdot 10^{-6}$	0.95%

Тест 1.2.6: Точечная сила для цилиндрической оболочки

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique, 1990.) Test No. SSLS20/89 [6].

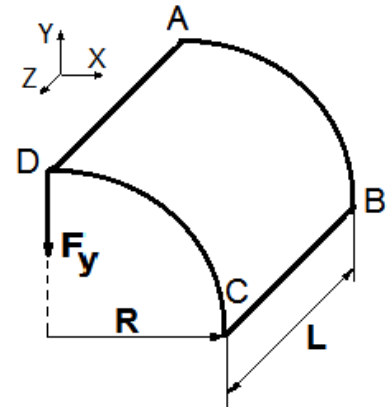
Решается задача о нагружении цилиндрической оболочки точечной силой.

Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается 1/8 часть модели
- Длина $L = 5.175$ м, радиус $R = 4.953$ м
- Толщина оболочки $t = 0.094$ м

Граничные условия:

- На стороне CD перемещения $u_z = R_x = R_y = 0$
- На стороне CB $u_x = R_y = R_z = 0$
- На стороне AD $u_y = R_x = R_z = 0$
- $F_y = -25$ Н



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 10.5 \cdot 10^6$ Па
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3125$

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (562 элемента)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (562 элемента)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (247 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (247 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (247 элементов)

Критерий прохождения теста [6]:

- Перемещение u_y в точке D равно $-113.9 \cdot 10^{-3}$ м с точностью 3%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:



Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TRISHELL3		TRISHELL6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_y \cdot 10^{-3}, \text{ м}$	-113.9	-112.826	0.94%	-114.089	0.17%	-114.4	0.44%

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_y, \text{ м}$	$-113.9 \cdot 10^{-3}$	-0.113002	0.79%	-0.113929	-0.03%	-0.113854	0.04%	-113.3	0.53%

Тест 1.2.7: Гидростатическое давление для тонкостенного цилиндра

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique, 1990.) Test No. SSL508/89 [32].

Решается задача о нагружении цилиндра гидростатическим давлением.

Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается 1/8 часть модели
- Радиус $R = 1$ м
- Толщина оболочки $t = 0.002$ м
- Высота оболочки $L = 4$ м

Граничные условия:

- На стороне AB перемещения $u_z = R_x = R_y = 0$
- На стороне AC $u_x = R_y = R_z = 0$
- На стороне BD $u_y = R_x = R_z = 0$
- Давление на поверхности ABCD $p = -20000 \cdot z/L$ Па

Параметры материала:

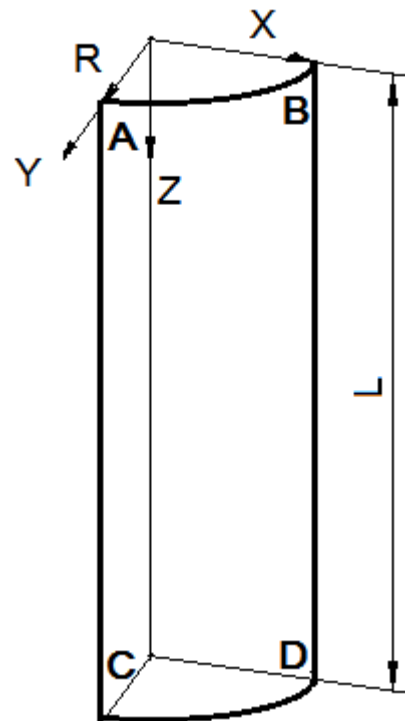
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2.1 \cdot 10^{11}$ Па
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- 8-узловые четырехугольные элементы Shell8 (200 элементов)
- 9-узловые четырехугольные элементы Shell9 (200 элементов)

Критерий прохождения теста [6]:

- Напряжение σ_x в точке $(0, R, L/2)$ равно $5.0 \cdot 10^5$ Па с точностью 1%
- Перемещение u_y в точке $(0, R, L/2)$ равно $2.38 \cdot 10^{-6}$ м с точностью 1%
- Перемещение u_z в точке $(0, R, L)$ равно $-2.86 \cdot 10^{-6}$ м с точностью 1%

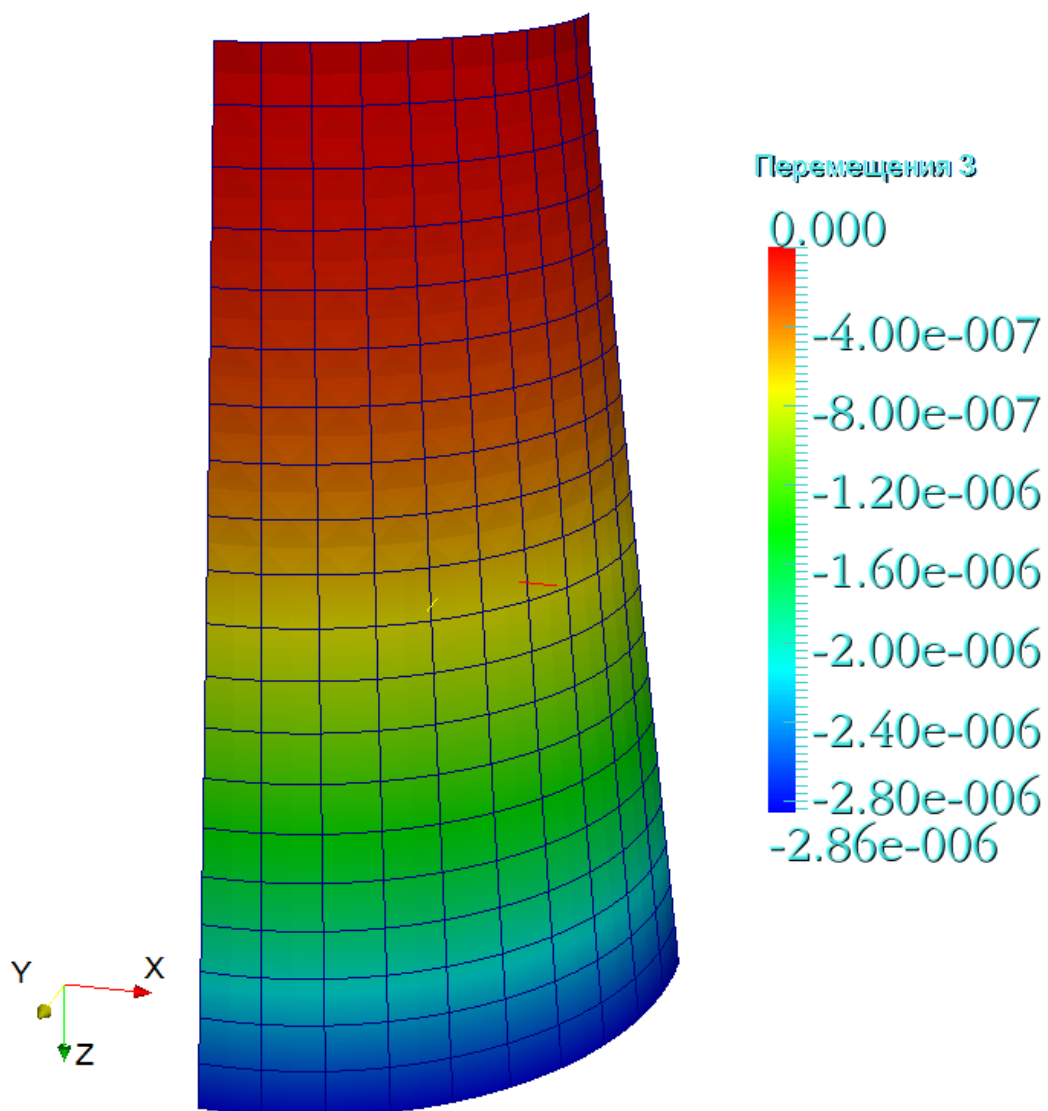


Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и I-DEAS[32]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ					
		FIDESYS				I-DEAS	
		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_x , Па	$5.0 \cdot 10^5$	$5.0206 \cdot 10^5$	0.41%	$4.97731 \cdot 10^5$	0.45%	$4.98 \cdot 10^5$	0.4%
u_y , м	$2.38 \cdot 10^{-6}$	$2.3809 \cdot 10^{-6}$	0.04%	2.38085	0.04%	$2.38 \cdot 10^{-6}$	<0.01%
u_z , м	$-2.86 \cdot 10^{-6}$	$-2.85709 \cdot 10^{-6}$	0.10%	$-2.85679 \cdot 10^{-6}$	0.11%	$-2.86 \cdot 10^{-6}$	<0.01%

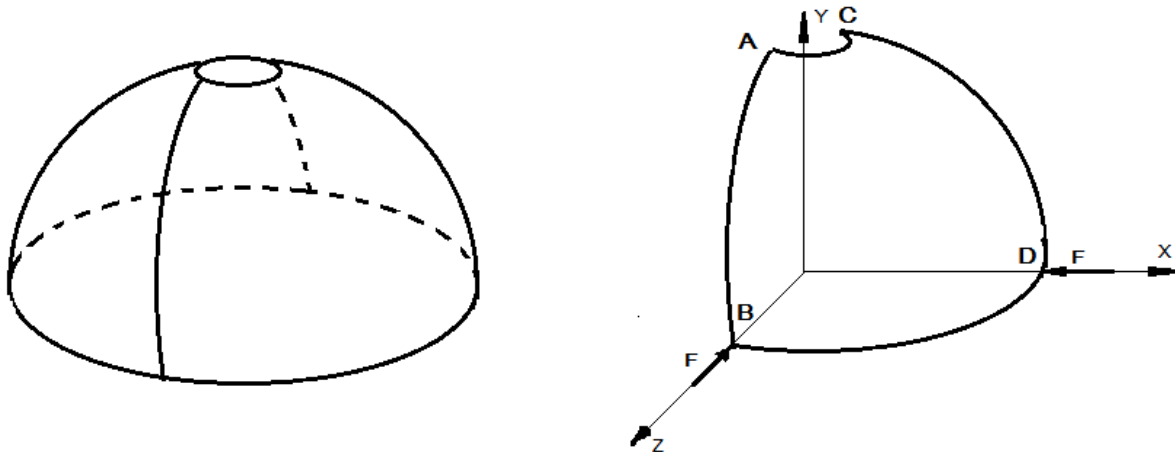
- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений по оси Z:



Тест 1.2.8: Усеченная сферическая оболочка

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique, 1990.) Test No. SSL521/89 [6].

Решается задача о нагружении усеченной сферической оболочки двумя уравновешивающими силами.

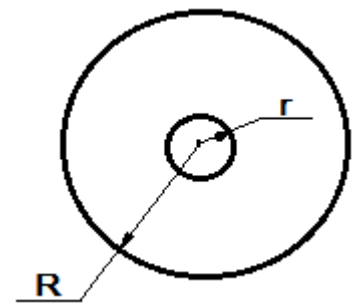


Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается 1/8 часть модели
- Радиус $R = 10$ м
- Радиус $r = 1.8$ м
- Толщина оболочки $t = 0.04$ м

Граничные условия:

- На стороне CD перемещения $u_z = R_x = R_y = 0$
- На стороне AB $u_x = R_y = R_z = 0$
- На стороне BD $u_y = R_x = R_z = 0$
- $F = 2$ Н
- В силу симметрии прикладывается половина указанного значения силы



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 6.285 \cdot 10^7$ Па
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (688 элемента)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (234 элемента)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (100 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (100 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (100 элементов)

Критерий прохождения теста [6]:

- Перемещение u_z в точке В равно $9.4 \cdot 10^{-2}$ м с точностью 3%

Результаты:

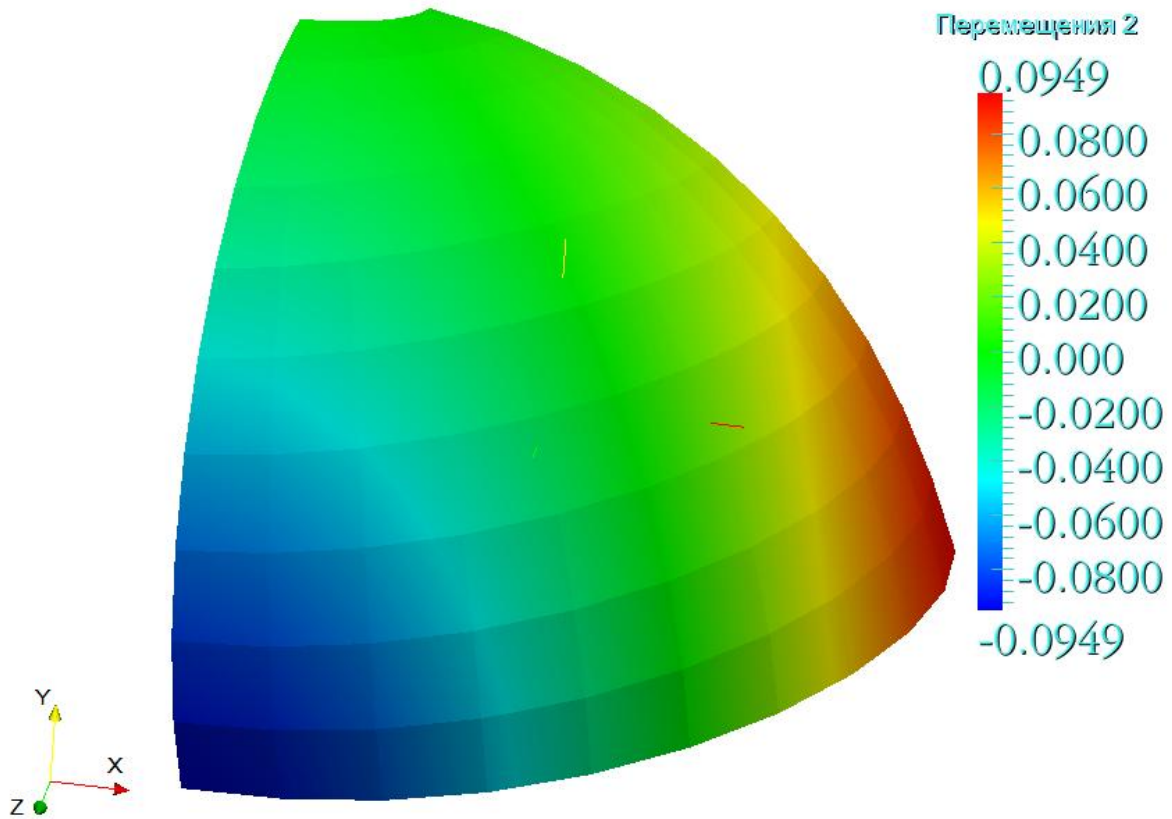
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TRISHELL3		TRISHELL6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z \cdot 10^{-2}, \text{м}$	9.4	8.8	6.4%	9.73209	3.53%	10.2	8.5%

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z \cdot 10^{-2}, \text{м}$	9.4	9.56903	1.80%	9.14153	2.75%	9.14209	2.74%	10.2	8.5%



- На картинке ниже представлена деформированная модель с полем распределения перемещений по оси Y:





Тест 1.2.9: Арка с шарнирным опиранием

P.Delius, Resistance des materiaux, Paris, Technique et Vulgarisation, 1958

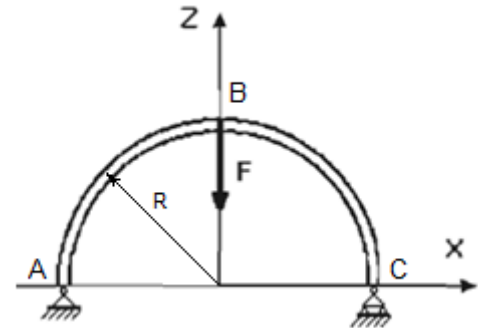
Решается задача о статическом нагружении арки сосредоточенной силой.

Геометрическая модель:

- Радиус арки $R=1$ м
- Сечение балки труба ($d_H=0.02$ м $d_B=0.016$ м $I_x=4.637 \cdot 10^{-9}$ м⁴)

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей в точке А
- Нулевые перемещения вдоль осей Y и Z в точке С
- Сосредоточенная сила в точке В вдоль оси Z $F=-0.1$ кН

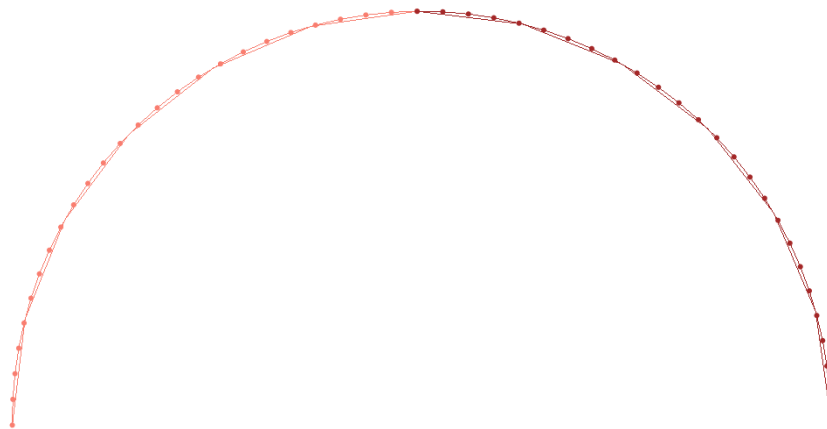


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (50 элементов)



Критерий прохождения теста:

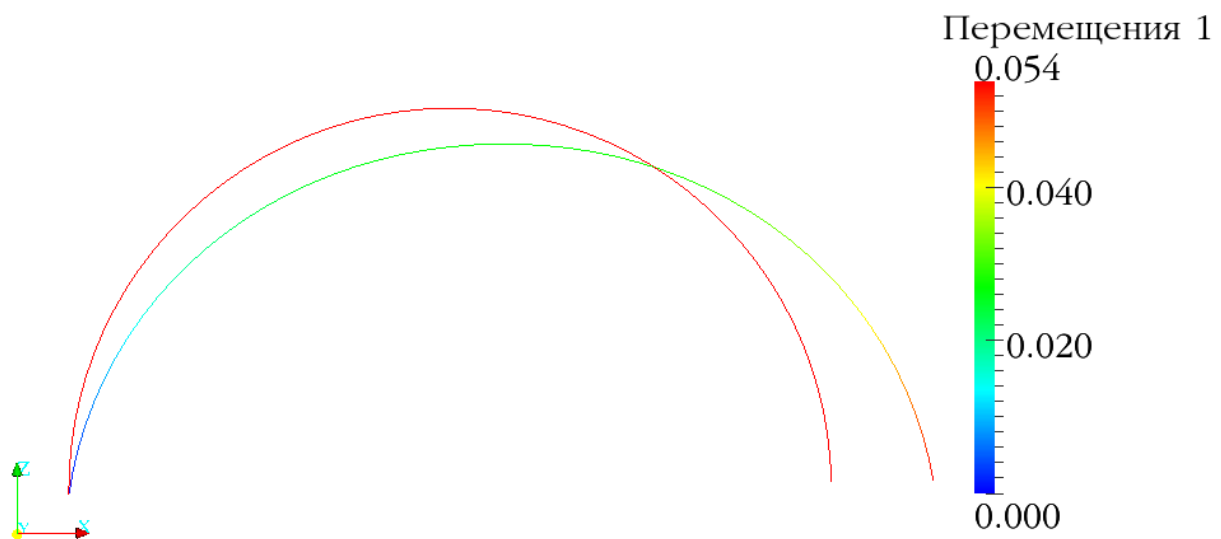
- Перемещение u_z в точке С (0,0,1) равно $-1.9206 \cdot 10^{-2}$ м с точностью 1.5%
- Угол поворота сечения θ_y в точке А (-1,0,0) равен $-3.0774 \cdot 10^{-2}$ рад с точностью 1.5%
- Перемещение u_x в точке В (1,0,0) равно $5.3912 \cdot 10^{-2}$ м с точностью 1.5%
- Угол поворота сечения θ_y в точке В (1,0,0) равен $-3.0774 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-2}$ рад с точностью 1.5%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, SCAD [21]

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		SCAD ³¹	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_z, \text{м}$	$-1.9206 \cdot 10^{-2}$	$-1.9210 \cdot 10^{-2}$	0%	$-1.7248 \cdot 10^{-2}$	10.19%
$\theta_y _{x=-1}$	$-3.0774 \cdot 10^{-2}$	$-3.0787 \cdot 10^{-2}$	0.04%	$-2.85513 \cdot 10^{-2}$	7.2%
$u_x, \text{м}$	$5.3912 \cdot 10^{-2}$	$5.3903 \cdot 10^{-2}$	0.2%	$4.9581 \cdot 10^{-2}$	8%
$\theta_y _{x=1}$	$-3.0774 \cdot 10^{-2}$	$3.0787 \cdot 10^{-2}$	0.04%	$2.85513 \cdot 10^{-2}$	7.2%

- На картинке ниже представлены недеформированная модель и деформированная модель с полем распределения перемещений по оси X:



³¹ Анализ проводился для модели из 50 элементов типа 10

Тест 1.2.10: Арка с заземлением

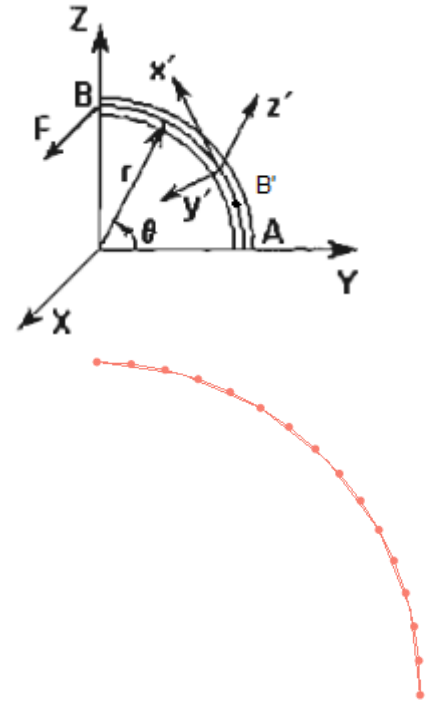
S.Timoshenko, *Strength of materials, Part: Elementary theory and problem*, 3eed, 1955,

R.J. Roark, *Formulas of stress and strain*, 4eed, New York, McGraw-Hill, 1965

Решается задача о статическом нагружении арки сосредоточенной силой.

Геометрическая модель:

- Радиус арки $r=1$ м
- Сечение балки труба ($d_H=0.02$ м $d_B=0.016$ м $I_x=4.637 \cdot 10^{-9}$ м⁴)



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в точке А
- Сосредоточенная сила в точке В вдоль оси X $F=0.1$ кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (15 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке В (0,0,1) равно 0.13462 м с точностью 1.5%
- Момент M_x в точке В' (0,0.9659, 0.25882) равен -74.1180 Н с точностью 1.5%
- Момент M_z в точке В' (0,0.9659, 0.25882) равен 96.5925 Н с точностью 1.5%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, SCAD [21]

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		SCAD	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_x , м	0.13462	0.135808	0.88%	0.133939	0.5%
M_x	74.1180	71.5642	3.45%	72.5754	2.08%
M_z	96.5925	98.499	1.97%	94.7573	1.9%

Тест 1.2.11: Консольная рама

Campana, R. Chappert et R. Picand, La mecanique par les problemes, fasc. 4: Resistance des materiaux, Paris Foucher, 1987

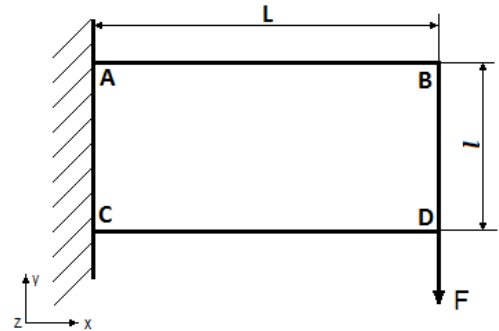
Решается задача о статическом нагружении консольной рамы сосредоточенной силой.

Геометрическая модель:

- Длина рамы $L=2$ м
- Высота рамы $l=0.2$ м
- Сечение балки квадрат (сторона квадратного сечения $2 \cdot 10^{-2}$ м $I_z=1.333 \cdot 10^{-8}$ м⁴)

Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в точках А и С
- Сосредоточенная сила в точке D $F=1$ кН



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (3 элемента)



Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_y в точке B (2,0,2,0) равно -0.125 м с точностью 1.5%
- Перемещение u_y в точке D (2,0,0) равно -0.125 м с точностью 1.5%
- Момент M_z в точке A (0,0,2,0) равен -500 Н с точностью 1.5%
- Момент M_z в точке C (0,0,0) равен -500 Н с точностью 1.5%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, SCAD [21] и SolidWorks [22]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ					
		FIDESYS		SCAD ³²		SolidWorks ³³	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_x _B$, м	-0.125	-0.132325	5.6%	-0.1249	0.008%	-0.123	1.6%
$u_x _D$, м	-0.125	-0.132325	5.6%	-0.1249	0.008%	-0.123	1.6%
$M_z _A$, Н	-500	-509.8	1.96%	-500	0%	-497.5	0.5%
$M_z _C$, Н	-500	-509.8	1.96%	-500	0%	-500	0%

³² Решение проводилось для трех линейных балочных элементов типа 10

³³ Решение проводилось для 357 линейных балочных элементов

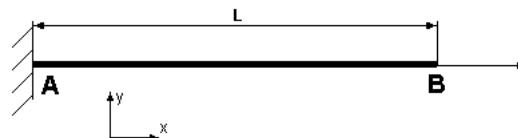
Тест 1.2.12: Деформация балки под действием осевой силы

“Axial Distributed Load on a Linear Beam”. Beer and Johnston *Mechanics of Materials* New York: McGraw-Hill, Inc., 1992.

Решается задача о статическом нагружении балки осевой силой.

Геометрическая модель:

- Длина балки $L=300$ in
- Сечение балки квадрат (сторона квадратного сечения 3 in $I=6.75$ in⁴)



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в точке A
- Осевая распределенная сила в точке B $F=1000$ lb/in

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (30 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке B (300,0,0) равно 0.01111 in с точностью 1.5%
- Сила реакции F_x в точке A (0,0,0) равна -10000 lb с точностью 1.5%
- Интенсивность напряжений по Мизесу³⁴ σ_i в точке A (0,0,0)

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [6]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		NX Nastran	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_x , in	0.01111	0.01111	0%	0.01093	1.53%
F_x , lb	-10000	-10000	0%	-10000	0%
σ_i , psi	1111	1111	0%	1111	0%

³⁴ Значение вычисляется для одноосного растяжения балки при помощи компоненты σ_{11} [20]

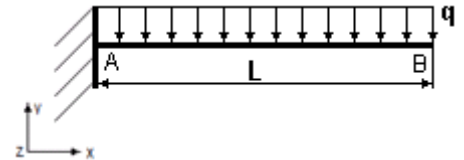
Тест 1.2.13: Консольная балка с распределенной нагрузкой

“Distributed Load on a Cantilever Beam” Beer and Johnston. *Mechanics of Materials*. New York: McGraw-Hill, Inc., 1992. p. 716.

Решается задача о статическом нагружении консольной балки распределенной по длине силой.

Геометрическая модель:

- Длина балки $L=480$ in
- Сечение балки квадрат (сторона квадратного сечения 30 in $I_y=I_z=67500$ in⁴)



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в точке A
- Распределенная нагрузка по всей длине AB $q=250$ lb/in

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (100 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_y в точке C (240,0,0) равно -0.819 in с точностью 1.5%
- Сила реакции F_y в точке A (0,0,0) равна $1.2 \cdot 10^5$ lb с точностью 1.5%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [6]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		NX Nastran	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_y , in	-0.819	-0.83015	1.36%	-0.822	0.36
F_y , lb	$1.2 \cdot 10^5$	$1.2 \cdot 10^5$	0%	$1.2 \cdot 10^5$	0%

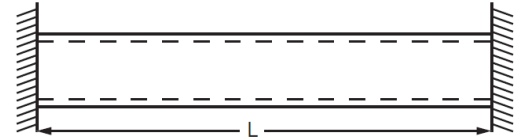
Тест 1.2.14: Изгиб тонкостенной трубы под собственным весом (балки)

R.J. Roark, *Formulas for stress and Strain*, 4th Edition, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1965, pg. 112, no. 33. [28]

Решается задача об изгибе жестко закрепленной на обоих концах трубы под собственным весом. Используются балочные элементы.

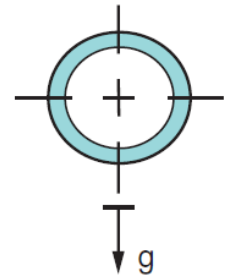
Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается 1/2 длины трубы
- Длина трубы $L=200$ in
- Сечение – труба ($d_H=2$ in $d_B=1$ in)



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей правом конце
- На левом конце трубы нулевые перемещения U_y и U_z , а также все углы поворота
- $g=386$ in/sec²



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.0$
- Плотность $\rho=0.00073$ lb-sec/in⁴

Сетка:

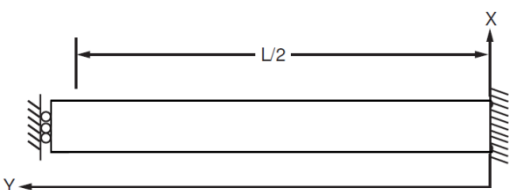
- Линейные балочные элементы Beam2 (12 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Максимальное перемещение u_x равно -0.12524 in [28] с точностью 1.5%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[28]:



Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_x , in	-0.12524	-0.125235	<0.01%	-0.12529	<0.01%

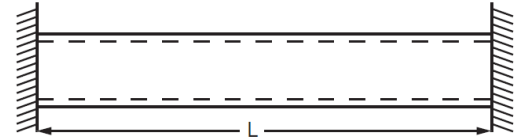
Тест 1.2.15: Изгиб тонкостенной трубы под собственным весом (оболочки)

R.J. Roark, *Formulas for stress and Strain*, 4th Edition, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1965, pg. 112, no. 33. [28]

Решается задача об изгибе жестко закрепленной на обоих концах трубы под собственным весом. Используются оболочечные элементы.

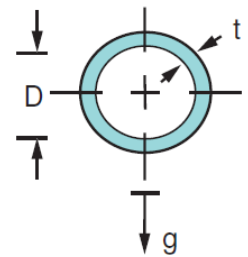
Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается 1/2 длины трубы
- Длина $L=250$ in
- Диаметр – $d=2$ in
- Толщина оболочки $t=0.1$ in



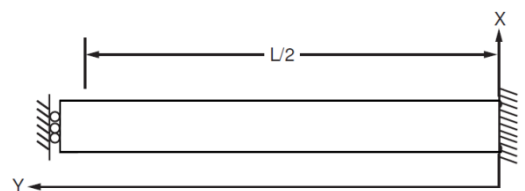
Граничные условия:

- Нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей в правом конце
- На левом конце трубы нулевые перемещения U_y и U_z , а также все углы поворота
- $g=386$ in/sec²



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.0$
- Плотность $\rho=0.00073$ lb-sec/in⁴



Сетка:

- 4-узловые четырехугольные элементы Shell4 (50 000 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Максимальное перемещение u_x равно -0.19062 in [28] с точностью 2%
- Максимальное напряжение σ_z равно $3\,074.3$ psi [28] с точностью 2%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[28]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ							
		FIDESYS						ANSYS	
		Shell4		Shell8		Shell9		Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка		
u_x , in	-0.19062	-0.191602	0.52%	-0.191602	0.52%	-0.190906	0.15%	-0.19079	0.1%
σ_z , psi	3 074.3	3 115.97	1.4%	3 123.89	1.6%	3 126.26	1.69%	3 059.1	0.5%

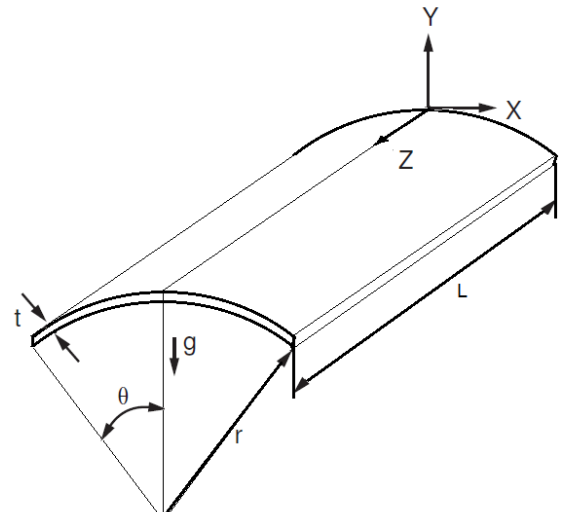
Тест 1.2.16: Свод крыши под собственным весом

R.D. Cook, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 2nd Edition, John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 1981, pp. 284-287 [28]

Решается задача об изгибе цилиндрической оболочки крыши под собственным весом.

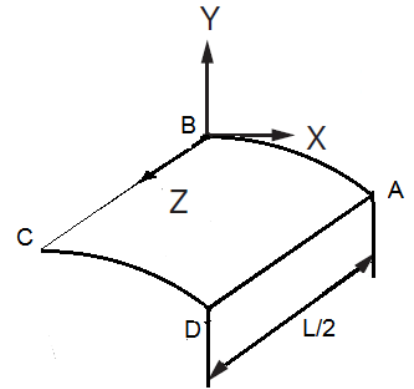
Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается ¼ часть крыши
- Длина $L = 50$ м
- Радиус $r = 25$ м
- $\theta = 40^\circ$
- Толщина оболочки $t = 0.25$ м



Граничные условия:

- На стороне CD перемещения $u_x = u_y = 0$
- На стороне CB $u_x = R_y = R_z = 0$
- На стороне AB $u_z = R_x = R_y = 0$
- $g = 9.8$ м/с²

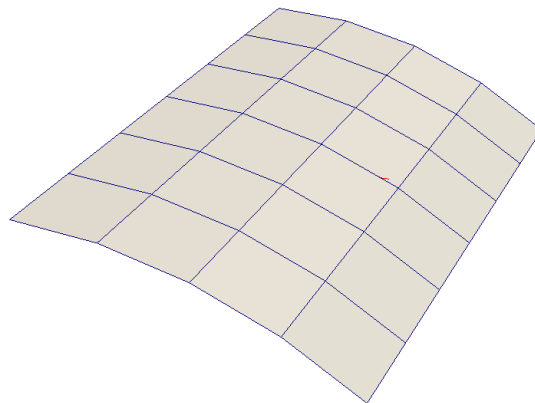


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 4.32 \cdot 10^8$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.0$
- Плотность $\rho = 36.7347$ кг/м³

Сетка:

- 4-узловые четырехугольные элементы Shell4 (24 элемента)



Критерий прохождения теста:

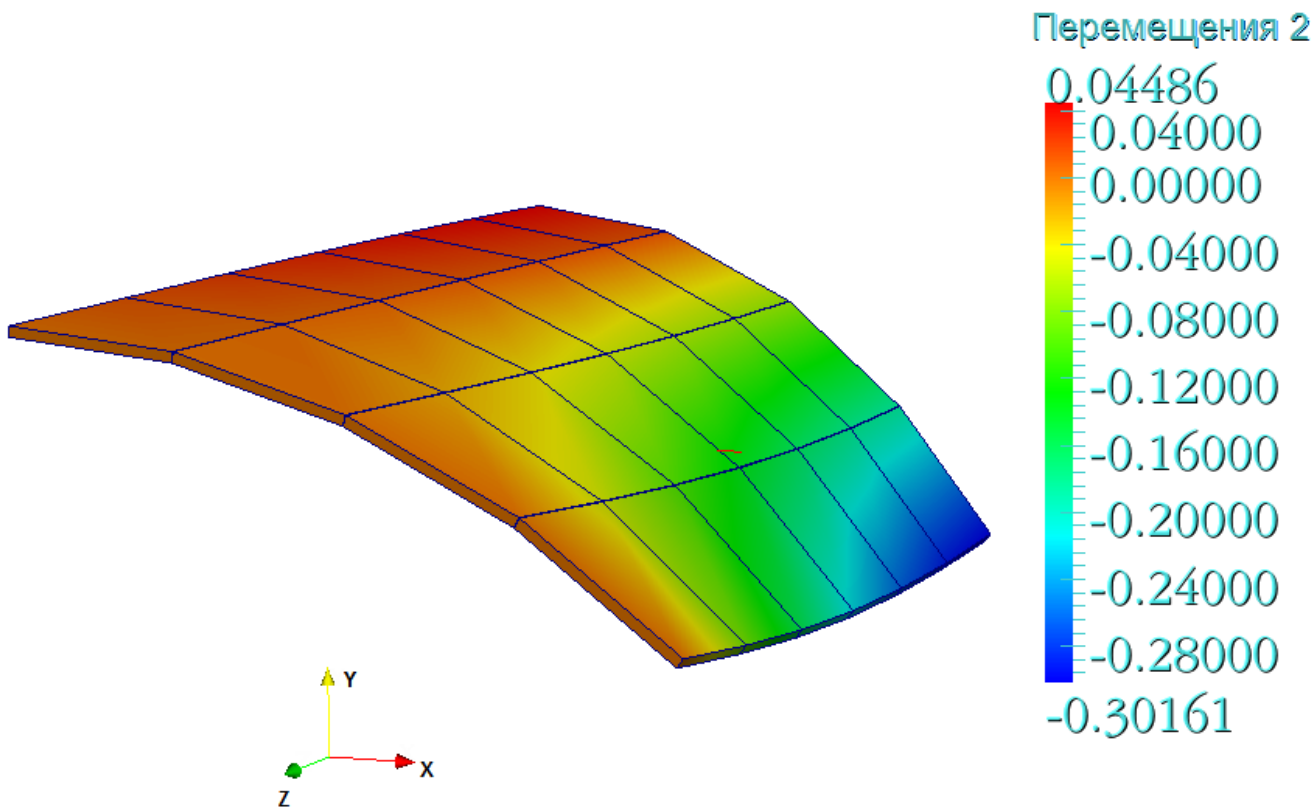
- Перемещение u_x в точке А равно -0.1593 м [28] с точностью 5%
- Перемещение u_y в точке А равно -0.3019 м [28] с точностью 5%
- Напряжение σ_z (верх оболочки) в точке А равно 215 570 Па с точностью 5%
- Напряжение σ_z (низ оболочки) в точке А равно 340 700 Па с точностью 5%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[28]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS(Shell4)		ANSYS (Shell181)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_x , м	-0.1593	-0.15871	0.37%	-0.1661	4.27%
u_y , м	-0.3019	-0.30161	0.1%	-0.316	4.67%
$\sigma_z _{z=\frac{t}{2}}$, Па	215 570	210 262.15	2.46%	205 333.3	4.75%
$\sigma_z _{z=-\frac{t}{2}}$, Па	340 700	331 786.16	2.6%	336 983.7	1.05%

- На картинке ниже представлен деформированный 3D-вид модели с полем перемещения u_y :



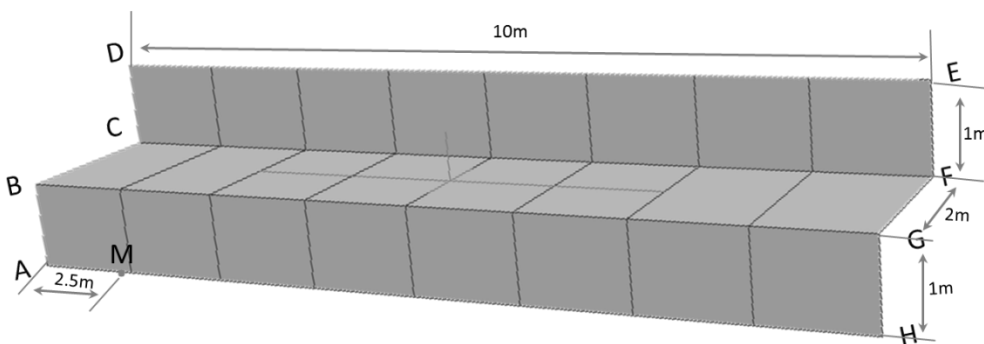
Тест 1.2.17: Пространственная пластинчатая система (3D)

NAFEMS Finite Element Methods & Standards, The Standard NAFEMS Benchmarks, Test No. LE5. Glasgow: NAFEMS, Rev. 3, 1990.

Рассматривается задача о пластинчатой системе с одной закрепленной стороной при действии давления на ее две противоположные грани.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Пластинчатая система представляет собой объединение трех двумерных пластин. Геометрические размеры модели, а так же ее расположение в пространстве приведены на рисунках ниже
- Толщина оболочки = 0.1м



Граничные условия:

- Закрепление по всем перемещениям и поворотам на грани ABCD
- Равномерно распределенные нагрузки по грани EF и GH вдоль оси Y, противоположные по направлению, $q = 0.6 \text{ МН}$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210 \text{ ГПа}$
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Три типа элементов (три отдельных теста):
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (24 элемента)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (24 элемента)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (24 элемента)

Критерий прохождения теста:

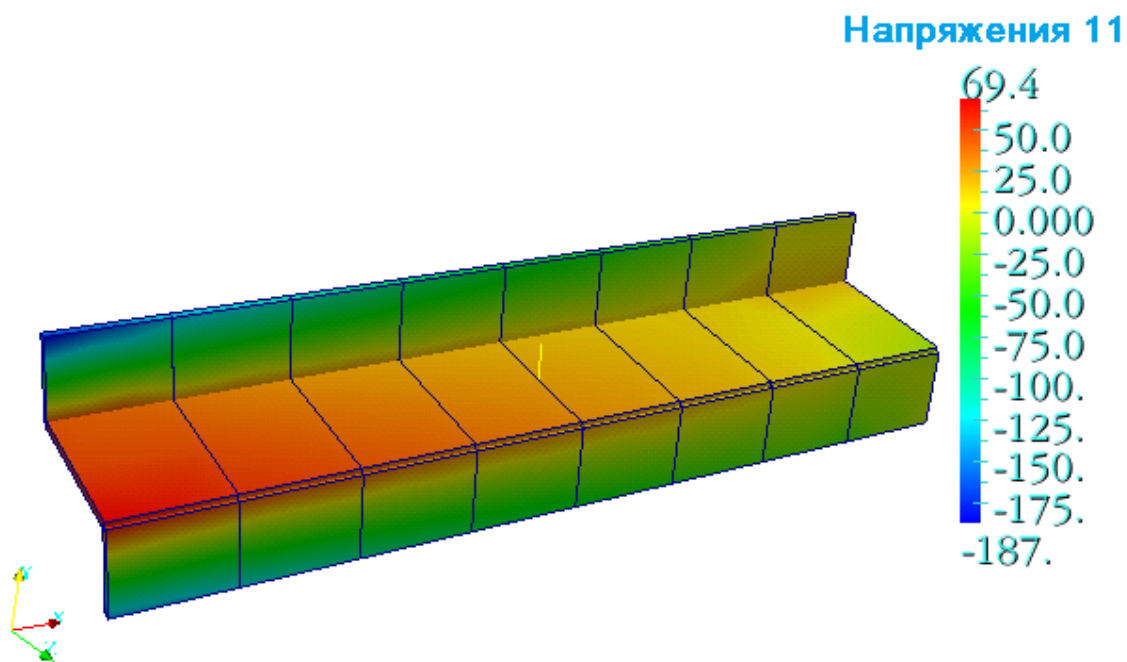
- Напряжение σ_x в точке M (-2.51;-1; 2) равно -108 МПа с точностью 1%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ FIDESYS					
		Shell4		Shell8		Shell9	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
σ_x , МПа	108	-107.892	0.10%	-109.311	1.21%	-109.285	1.19%

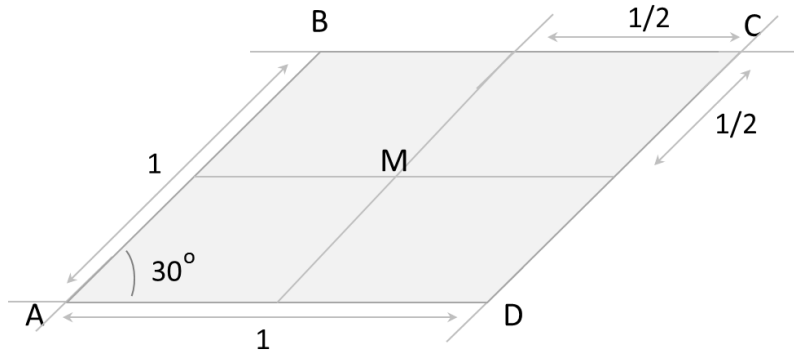
- На картинке ниже представлен 3D-вид модели с полем напряжения σ_x для элементов shell8:



Тест 1.2.18: Равномерно нагруженная пластина, защемленная по контуру

NAFEMS Finite Element Methods & Standards, The Standard NAFEMS Benchmarks, (Glasgow: NAFEMS, Rev. 3, 1990.) Test No. LE6.

Рассматривается задача о нагружении пластинки в форме параллелограмма, свободно опертой по всему контуру, под действием равномерно распределенной по всей поверхности пластинки нагрузки.



Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Сторона $a=1$ м
- Угол $\alpha = 30^\circ$
- Толщина $h=0.01$ м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси Z по всему контуру
- Равномерно распределенная нагрузка по всей поверхности $q = -700$ Па

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Два типа элементов (два отдельных теста):
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (16 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (16 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (16 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Напряжение σ_y в точке $M(0.933013, 0.25, 0)$ равно 0.802 МПа с точностью 5%

Результаты:

- Значение σ_y в точке M для элементов Shell4 0.679028 МПа отличается от требуемого на 15.3%

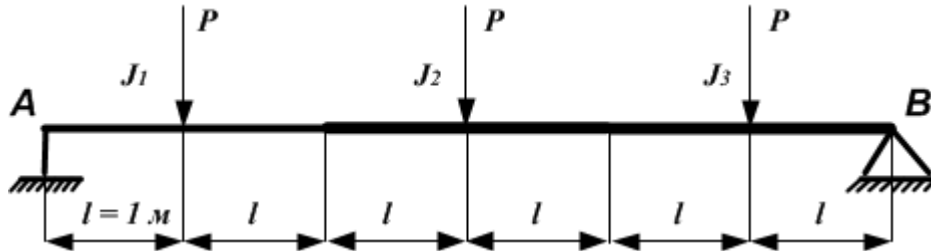


- Значение σ_y в точке М для элементов Shell8 0.758300 МПа отличается от требуемого на 5.5%
- Значение σ_y в точке М для элементов Shell9 0.747554 МПа отличается от требуемого на 6.79%

Тест 1.2.19: Трехступенчатая шарнирно опертая балка, нагруженная сосредоточенными силами

Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. Изд. 2-е, переработанное и дополненное. Киев Наукова Думка 1988.

Рассматривается задача об изгибе трехступенчатой шарнирно опертой балки нагруженной сосредоточенными силами.



Геометрическая модель:

- Длина $l=1$ м
- Площадь поперечного сечения $F_1 = 0.01$ м²
- Момент инерции поперечного сечения балки $J_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ м⁴
- $F_1 : F_2 : F_3 = 1 : 2 : 3$
- $J_1 : J_2 : J_3 = 1 : 2 : 3$

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси Y и Z в точке A
- Нулевые перемещения вдоль всех осей в точке B
- $P = 1$ МПа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (12 элементов)

Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_y в точке A (1, 0, 0) равно 3.02 м с точностью 1%
- Перемещение u_y в точке A (3, 0, 0) равно 4.4 м с точностью 1%
- Перемещение u_y в точке A (5, 0, 0) равно 2.23 м с точностью 1%

Результаты:

- В таблице приведены результаты Fidesys и MicroFE [18]:

Величина	Теор. значение	Численный анализ			
		FIDESYS		MicroFE	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_y _{(1.0.0)}, \text{ м}$	3.02	3.02	<0.01%	3.02	<0.01%
$u_y _{(3.0.0)}, \text{ м}$	4.4	4.94	12.3%	4.4	<0.01%
$u_y _{(5.0.0)}, \text{ м}$	2.23	2.23	<0.01%	2.23	<0.01%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_y для прямоугольного сечения:



Тест 1.2.20: Определение силы реакции балки

S.H. Crandall, N.C. Dahl, *An Introduction to the Mechanics of Solids*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1959, pg. 389, ex. 8.9 (case 1)

Решается задача о статическом нагружении балки квадратного сечения.

Геометрическая модель:

- Рассматривается балка состоящая из двух частей
- $a = 50$ in
- Сечение – квадрат со стороной 1 in

Граничные условия:

- Правый конец жестко закреплен
- На левом конце трубы нулевые перемещения U_y и U_z
- $F_y = -1000$ lb

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (2 элемента)

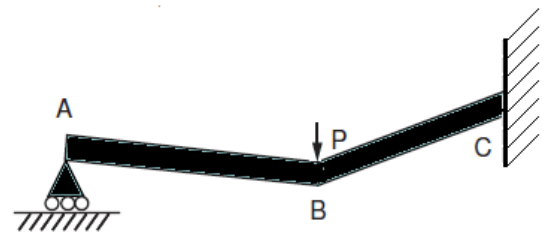
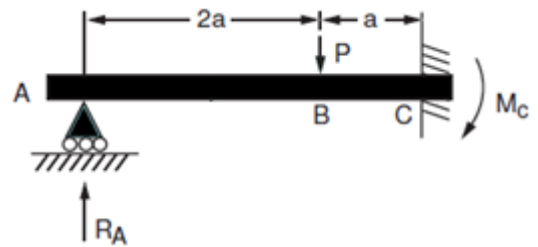
Критерий прохождения теста:

- Сила реакции R_A в точке A равно 148.15 lb с точностью 1%
- Момент реакции в точке C равен 27 778 in-lb с точностью 1%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[28]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
R_A , lb	148.15	148.148	<0.01%	148.25	<0.01%
M_C , in-lb	27 778	27 777.8	<0.01%	27 762.817	<0.1%



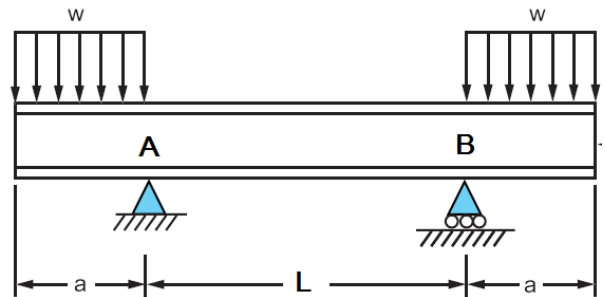
Тест 1.2.21: Определение напряжений для балки

S. Timoshenko, *Strength of Material, Part I, Elementary Theory and Problems, 3rd Edition*, D. Van Nostrand Co., Inc., New York, NY, 1955, pg. 98, problem 4.

Решается задача об изгибе двутавровой балки под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной на вылетах. Балка расположена вдоль оси Ox . В результате решения сравниваются напряжения и перемещения.

Геометрическая модель:

- $L = 240$ in
- $a = 120$ in
- $h = 30$ in
- Сечение – двутавр ($I_z = 7892$ in⁴, $A = 50.65$ in²)



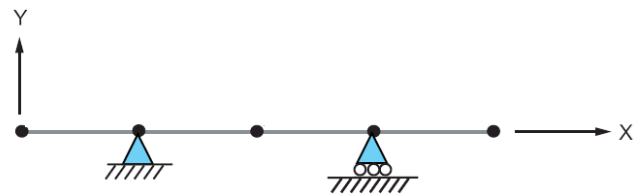
Граничные условия:

- В точке A $U_x = U_y = U_z = 0$
- В точке B $U_y = U_z = 0$
- Распределенная нагрузка $w = 10000/12$ lb/in



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$



Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (4 элемента)

Критерий прохождения теста:

- Максимальное перемещение U_y в центре балки равно 0.182 in с точностью 1%
- Максимальное напряжение $Stress_{beam}$ для балки равно -11 400 psi с точностью 1%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[28]:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ			
		FIDESYS		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
U_y , in	0.182	0.182	<0.01%	0.182	<0.01%
$Stress_{beam}$, psi	-11 400	-11 404	0.04%	-11 440.746	0.36%

Тест 1.2.22: Изгиб конической пластины

Решается задача об изгибе конической пластины под действием точечной силы. Сравниваются напряжения и перемещения.

Геометрическая модель:

- $L = 20$ in
- $d = 3$ in
- $t = 0.5$ in

Граничные условия:

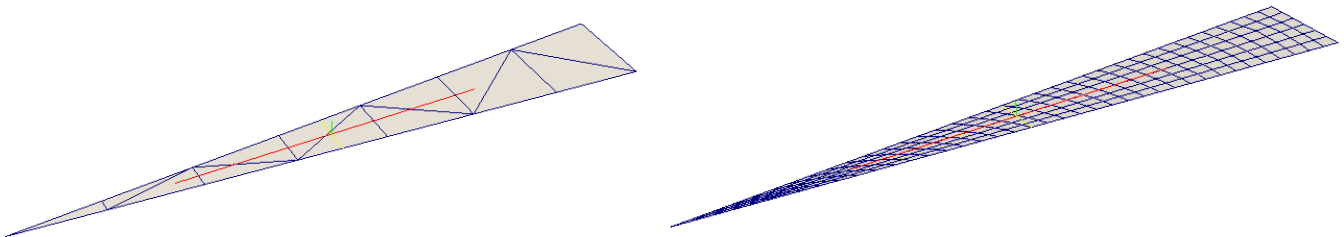
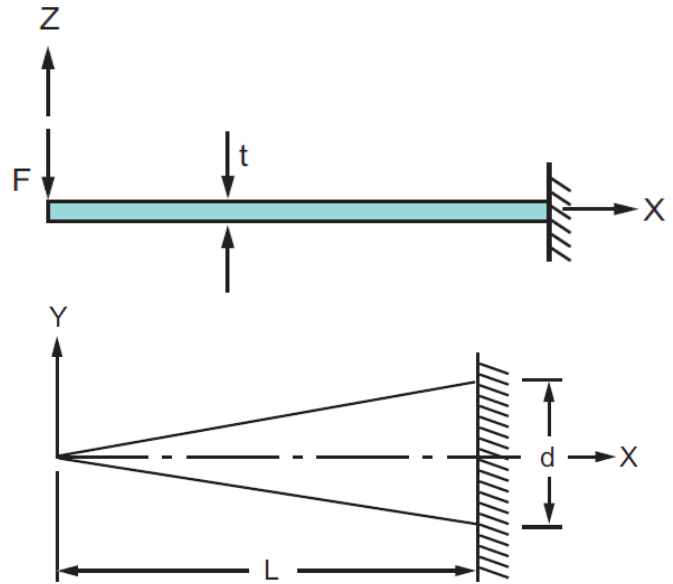
- Жестко закреплено основание
- На вершину действует сила $F = 10$ lbs

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30 \cdot 10^6$ psi
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.0$

Сетка:

- 5 типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые четырёхугольные оболочки TriShell3 (13 элемента)
 - 6-узловые четырёхугольные оболочки TriShell6 (13 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (215 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (215 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (215 элементов)



Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_z для вершины конуса равно -0.042667 in с точностью 1%
- Напряжение σ_x равно 1600 psi с точностью 1%

Результаты:

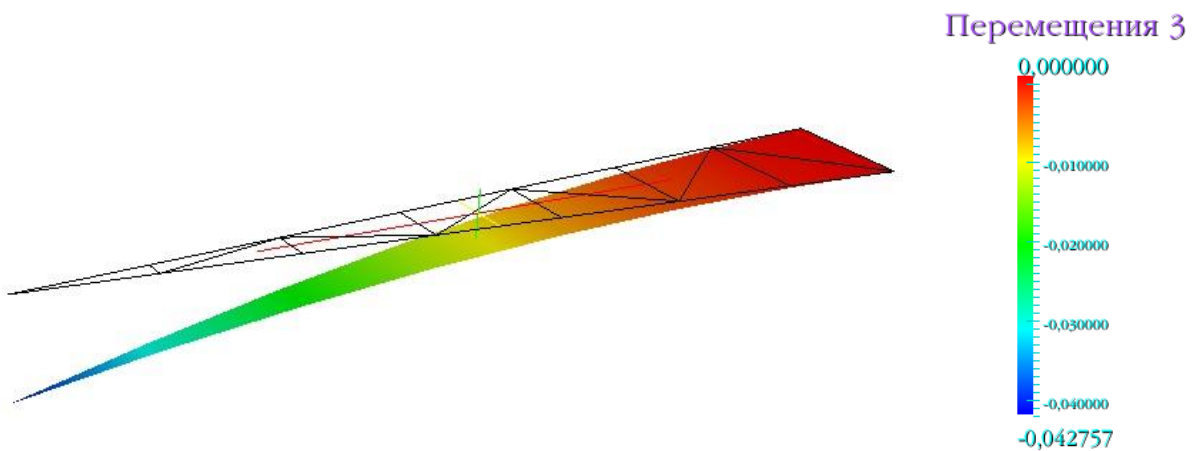
- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS[28]:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS	
		TriShell3		TriShell6		SHELL63	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_z, in	-0.042667	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%	-0.042	1.6%
σ_x, psi	1 600.00	1 602.29	0.1%	1 619.97	1.2%	1 600.450	<0.01%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ			
		FIDESYS (SHELL4)		ANSYS (SHELL181)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_z, in	-0.042667	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%
σ_x, psi	1 600.00	1 611.09	0.7%	1 600.00	<0.01%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				ANSYS	
		SHELL8		SHELL9		SHELL281	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
u_z, in	-0.042667	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%	-0.043	0.8%
σ_x, psi	1 600.00	1 616.13	1%	1 591.020	0.6%	1 604.376	0.3%

- На картинке ниже представлен деформированный вид модели с полем перемещения u_z для элементов TriShell3



Динамическое нагружение

Тесты с точным аналитическим решением

Тест 2.1.1: Задача Стокса

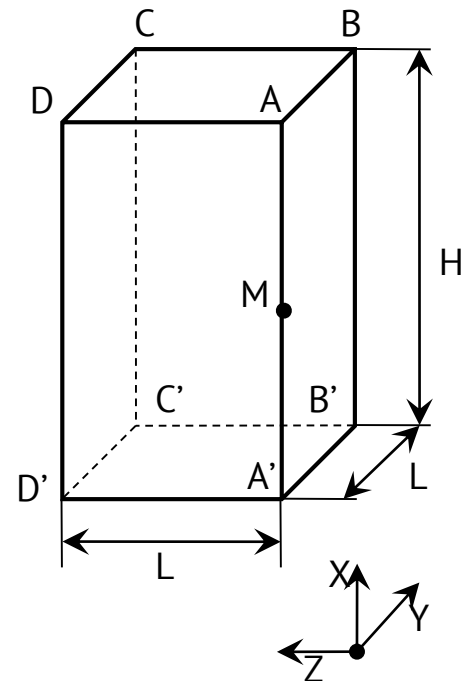
В этой задаче рассматривается распространение волн в бесконечной упругой среде, вызываемых действием сосредоточенной силы. Задача будет ограничена объемом куба с длиной ребра равной 4 м.

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть куба – параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$
- Высота параллелепипеда $H = 4$ м
- Длина и ширина $L = 2$ м

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости $AA'D'D$ вдоль оси Y
- Нулевое перемещение плоскости $AA'B'B$ вдоль оси Z
- Нулевое перемещению ребра CC' вдоль оси X
- В точке M (середины ребра AA') приложена сила величиной 100 кН, направленная по оси X
- Зависимость силы от времени – гармоническая, циклическая частота 20 000 Гц

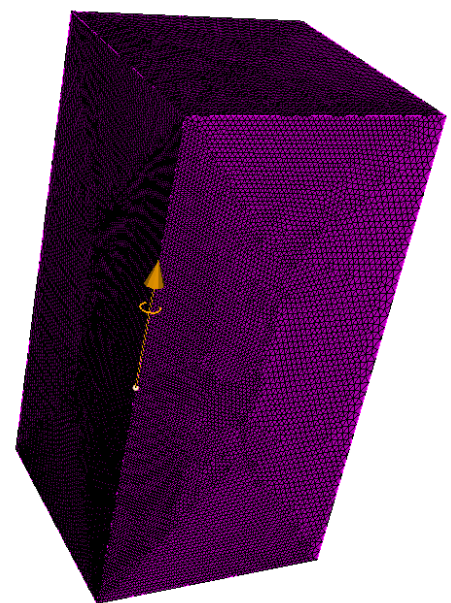


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7900$ кг/м³

Сетка:

- Измельчённая вдоль ребра AA'
- Элементы следующих типов (отдельные тесты):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (1 121 480 элементов)
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (1 024 000 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 1-го, 3-го и 5-го порядков (везде 53 944 элемента)



Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке $(1, 0, 0)$ в момент времени $t = 0.0003$ с равно $2.318 \cdot 10^{-7}$ м с точностью 1%

- Перемещение u_x в точке (0, 0.6, 0) в момент времени $t = 0.0003$ с равно $5.353 \cdot 10^{-7}$ м с точностью 1%
- Перемещение u_z в точке (0.231, 0, 0.283) в некоторый момент времени $t = 0.0003$ с равно $-3.609 \cdot 10^{-7}$ м с точностью 1%

Значения перемещений вычислены по следующей формуле [4]:

$$u_i(\mathbf{r}, t) = \frac{(3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{4\pi\rho r^3} \int_{r/\alpha}^{r/\beta} \tau f(t - \tau) d\tau + \frac{\gamma_i\gamma_j}{4\pi\rho r\alpha^2} f\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) - \frac{(\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij})}{4\pi\rho r\beta^2} f\left(t - \frac{r}{\beta}\right)$$

Результаты:

- Для тестов с линейными элементами Tet4 и Hex8 результаты расчетов приведены в таблице:

Величина	Теоретическое значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Численный анализ					
		Fidesys				Ansys ³⁵	
		Гексаэдральная сетка		Тетраэдральная сетка		Тетраэдральная сетка	
		Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Ошибка	Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Ошибка	Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Ошибка
u_x	2.318	2.328	0.41 %	2.321	0.13 %	2.322	0.17 %
u_x	5.353	5.333	-0.39 %	5.342	-0.33 %	5.395	0.78 %
u_z	-3.609	-3.625	0.45 %	-3.641	0.89 %	-3.683	2.05 %

- Результаты тестов со спектральными элементами сведены в отдельную таблицу:

Величина	Теоретическое значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Численный анализ Fidesys					
		Элементы 1-го порядка		Элементы 2-го порядка		Элементы 3-го порядка	
		Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Ошибка	Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Ошибка	Значение, $\cdot 10^{-7}$ м	Ошибка
u_x	2.318	2.114	-8.80 %	2.314	-0.17 %	2.307	-0.47 %
u_x	5.353	4.936	-7.79 %	5.292	-1.14 %	5.312	-0.77 %
u_z	-3.609	-3.637	0.78 %	-3.567	1.16 %	-3.647	1.06 %

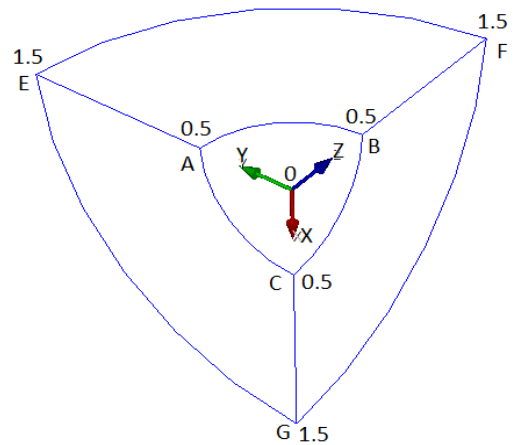
³⁵ Анализ проводился на тетраэдральной сетке (тип элемента SOLID168, количество элементов 864 796, количество узлов 1 197 306).

Тест 2.1.2: Взрывное давление в сферической полости

Задача рассматривает поведение упругой бесконечной среды со сферической полостью после приложения давления к поверхности полости. Решение проводилось для явной схемы.

Геометрическая модель:

- Рассматриваемая область среды ограничена объемом сферы радиусом 1.5 м
- Полость расположена в центре сферы и имеет радиус 0.5 м
- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/8 исходного объема



Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости ABFE вдоль оси X
- Нулевое перемещение плоскости BCGF вдоль оси Y
- Нулевое перемещение плоскости ACGE вдоль оси Z
- На поверхность сферической полости ABC приложено давление, изменяющееся от времени по закону

$$p(t) = 10^8 \sin(40000t)$$

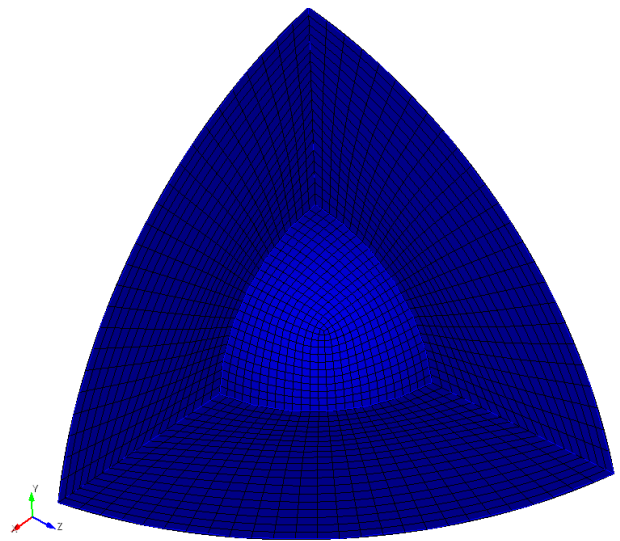
- Время расчета $t = 1.35 \cdot 10^{-4}$ с

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7900$ кг/м³

Сетка:

- Два типа конечных элементов (два отдельных теста):
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (элемента)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (9 620 элементов)
- Два типа спектральных элементов порядков (два отдельных теста):
 - 27-узловые гексаэдры Hex27s 2го порядка (элементов)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27s 4го порядка (элементов)



Критерии прохождения теста:

- Перемещение u_R в точке $R=0.75$ м в последний момент времени равно $4.08106 \cdot 10^{-5}$ м с точностью 1%
- Напряжение σ_R в точке $R=0.75$ м в последний момент времени равно 48.75 МПа с точностью 1%

- Напряжение σ_θ в точке R=0.75 м в последний момент времени равно 36.44 МПа с точностью 1%

Значения перемещений и напряжений вычислены по следующим формулам [3]:

$$\tau = t - \frac{r-a}{c},$$

$$f(\tau) = \frac{a}{(\beta-\alpha)\rho} \int_0^\tau p(\xi) [e^{\alpha(\tau-\xi)} - e^{\beta(\tau-\xi)}] d\xi,$$

$$u_R = -\frac{-f'(\tau)}{c \cdot r} - \frac{f(\tau)}{r^2},$$

$$\sigma_R = \frac{\rho}{r} f''(\tau) + 2 \frac{\rho c}{r^2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [f'(\tau) + \frac{c}{r} f(\tau)],$$

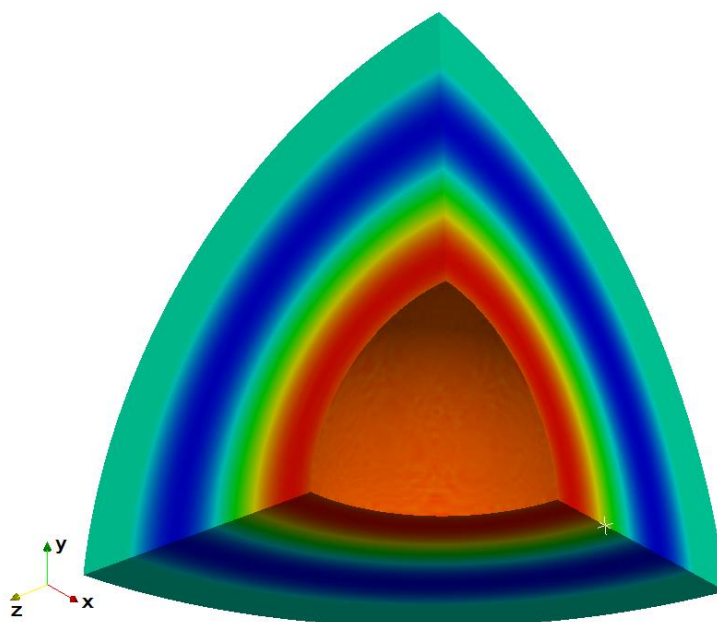
$$\sigma_\theta = \frac{\rho}{r} \frac{\nu}{1-\nu} f''(\tau) - \frac{\rho c}{r^2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [f'(\tau) + \frac{c}{r} f(\tau)]$$

Результаты:

- Полученные значения перемещения и напряжений для конечных элементов представлены в таблице:

Величина, ед. измерения	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS					
		HEX27		HEX27s (2-го порядка)		HEX27s (4-го порядка)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_R, \cdot 10^{-5}$ м	4.08106	4.14403	1.54%	4.13617	1.35%	4.1059	0.6%
σ_R , МПа	48.75	49.37	1.27%	44.016	9.7%	47.773	2%
σ_θ , МПа	36.44	35.57	2.39%	34.054	6.55%	36.16	0.77%

- На рисунке ниже представлена исходная модель с полем распределения радиальных напряжений σ_R в момент времени $t = 1.35 \cdot 10^{-4}$ с и с отмеченной точкой, в которой сравнивались значения напряжений и перемещения



Анализ собственных частот

Тесты с известным аналитическим или экспериментальным решением

Тест 3.1.1: Собственные частоты квадратной пластинки с защемлённой стороной

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки, одна сторона которой защемлена.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 1$ м
- Толщина: $t = 0.01$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = R_z = 0$ во всех узлах сетки
- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на прямой $X = 0$ м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³

Сетка:

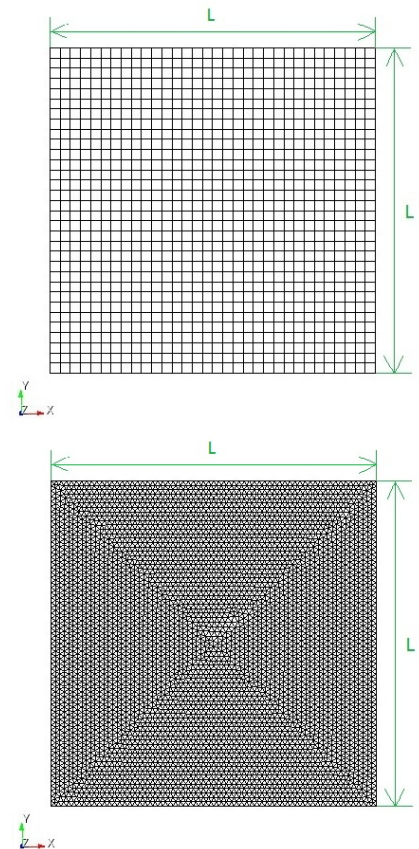
- Пять типов сетки (пять отдельных тестов):
 - Линейные треугольные оболочки Trishell3 (64*64)
 - Линейные треугольные оболочки Trishell6 (64*64)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*64)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8(64*64)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9(64*64)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 6)

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [9]:

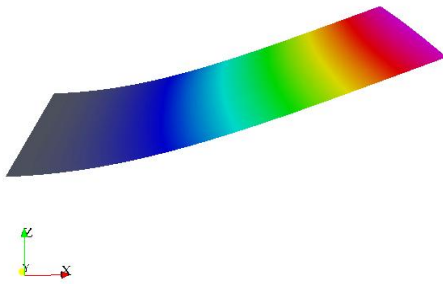


№	Аналитическое решение	FIDESYS, Trishell3		FIDESYS, Trishell6	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	8.73	8.67	0.69%	8.67	0.67%
2	21.30	21.22	0.38%	21.19	0.51%
3	53.56	53.17	0.73%	53.13	0.81%
4	68.30	67.91	0.57%	67.83	0.69%
5	77.74	77.23	0.66%	77.08	0.85%
6	136.05	135.13	0.68%	134.74	0.96%

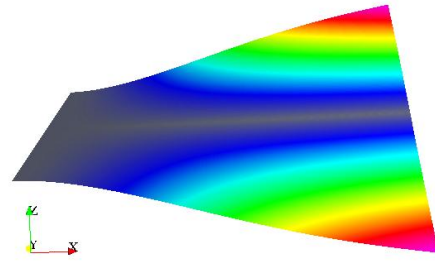
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Shell8		FIDESYS, Shell9	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	8.73	8.67	0.69%	8.67	0.67%	8.67	0.67%
2	21.30	21.22	0.38%	21.21	0.40%	21.20	0.48%
3	53.56	53.17	0.73%	53.13	0.80%	53.14	0.79%
4	68.30	67.9	0.59%	67.86	0.64%	67.84	0.67%
5	77.74	77.22	0.68%	77.16	0.75%	77.11	0.81%
6	136.05	135.06	0.74%	134.91	0.83%	134.81	0.91%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

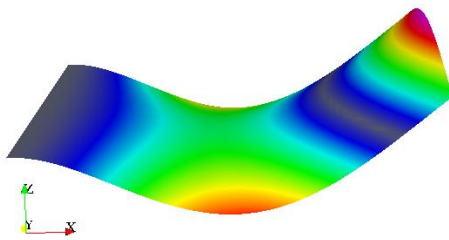
1 собственное значение



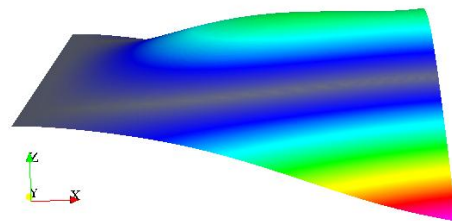
2 собственное значение



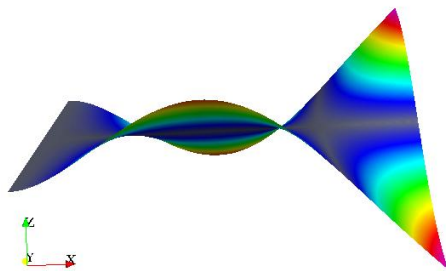
3 собственное значение



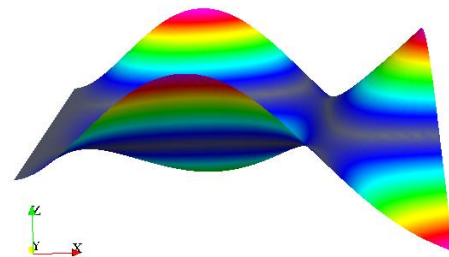
4 собственное значение



5 собственное значение



6 собственное значение



- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS³⁶, CODE_ASTER [10] и ЛИРА [8]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		ANSYS		CODE_ASTER		ЛИРА	
		Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	8.73	8.67	0.69%	8.67	0.6%	8.67	0.6%	8.66	0.7%
2	21.30	21.22	0.38%	21.22	0.4%	21.29	0.1%	21.20	0.5%
3	53.56	53.17	0.73%	53.17	0.7%	53.10	0.9%	52.94	1.1%
4	68.30	67.9	0.59%	67.90	0.6%	67.93	0.5%	67.46	1.2%
5	77.74	77.22	0.68%	77.21	0.7%	77.43	0.4%	76.92	1.1%
6	136.05	135.06	0.74%	135.04	0.7%	135.76	0.2%	134.05	1.5%

³⁶ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента Shell181, количество элементов 4096).

Тест 3.1.2: Собственные частоты свободной квадратной пластинки

Решается задача о нахождении собственных частот свободной квадратной пластинки.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 1$ м
- Толщина: $t = 0.01$ м

Граничные условия:

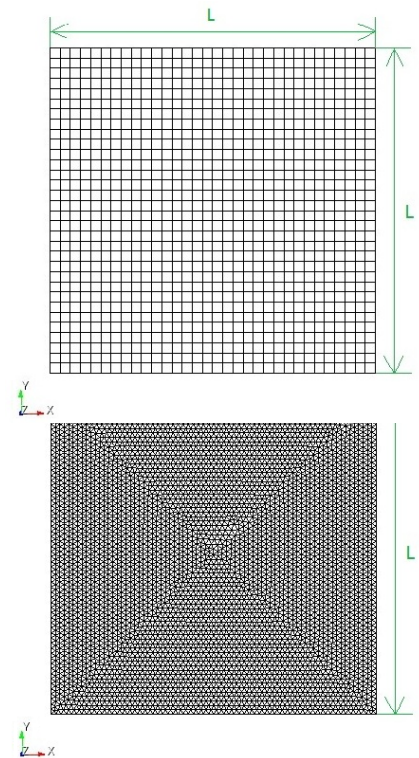
- $U_x = U_y = R_z = 0$ во всех узлах сетки

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³

Сетка:

- Пять типов сетки (пять отдельных тестов):
 - Линейные треугольные оболочки Trishell3 (64*64)
 - Линейные треугольные оболочки Trishell6 (64*64)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*64)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8(64*64)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9(64*64)



Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 4 по 8)

Анализ результатов

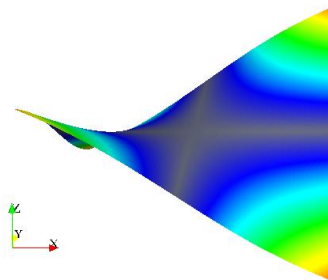
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [9]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Trishell3		FIDESYS, Trishell6	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
4	33.71	33.59	0.36%	33.52	0.56%
5	49.46	48.96	1.01%	48.95	1.03%
6	61.05	60.64	0.67%	60.61	0.71%
7	87.52	86.79	0.83%	86.60	1.05%
8	87.52	86.79	0.83%	86.60	1.05%

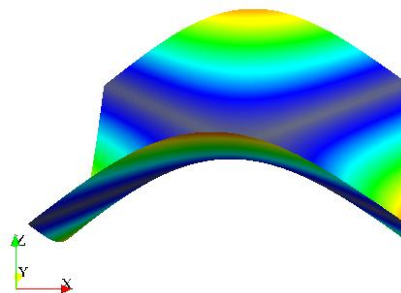
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Shell8		FIDESYS, Shell9	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
4	33.71	33.58	0.39%	33.58	0.40%	33.53	0.53%
5	49.46	48.97	0.99%	48.95	1.03%	48.95	1.03%
6	61.05	60.65	0.66%	60.61	0.71%	60.62	0.71%
7	87.52	86.77	0.86%	86.73	0.90%	86.63	1.01%
8	87.52	86.77	0.86%	86.73	0.90%	86.63	1.01%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

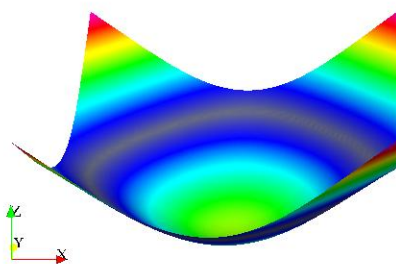
4 собственное значение



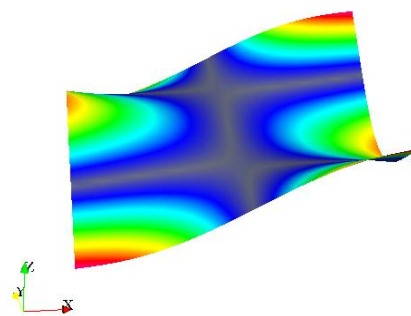
5 собственное значение



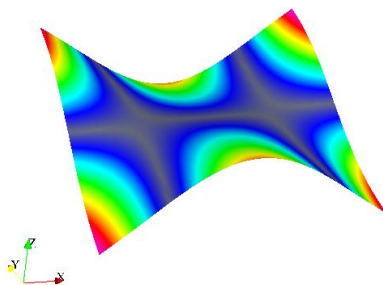
6 собственное значение



7 собственное значение



8 собственное значение



- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS³⁷, CODE_ASTER [10] и ЛИРА [8]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		ANSYS		CODE_ASTER		ЛИРА	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
4	33.71	33.58	0.39%	33.58	0.4%	33.68	0.1%	33.55	0.5%
5	49.46	48.97	0.99%	48.97	1.0%	48.94	1.1%	48.56	1.8%
6	61.05	60.65	0.66%	60.65	0.7%	60.58	0.8%	60.25	1.3%
7	87.52	86.77	0.86%	86.77	0.9%	87.10	0.5%	86.21	1.5%
8	87.52	86.77	0.86%	86.77	0.9%	87.10	0.5%	86.21	1.5%

³⁷ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента Shell181, количество элементов 4096).



Тест 3.1.3: Собственные частоты квадратной пластинки с защемлением по периметру

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки с защемлением по периметру.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 1$ м
- Толщина: $t = 0.002$ м

Граничные условия:

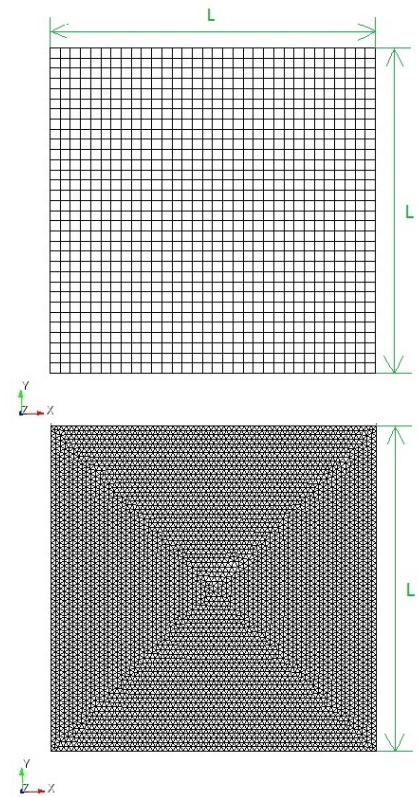
- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ по периметру

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 207$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7850$ кг/м³

Сетка:

- Пять типов сетки (пять отдельных тестов):
 - Линейные треугольные оболочки Trishell3 (64*64)
 - Линейные треугольные оболочки Trishell6 (64*64)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*64)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8(64*64)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9(64*64)



Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 6)

Анализ результатов

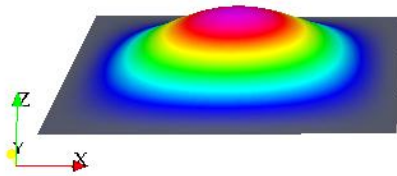
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [15]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Trishell3		FIDESYS, Trishell6	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	17.80	17.83	0.17%	17.7937	0.04%
2	36.30	36.4	0.28%	36.2825	0.05%
3	36.30	36.4	0.28%	36.2825	0.05%
4	53.53	53.76	0.43%	53.4846	0.08%
5	65.09	65.34	0.38%	65.0252	0.10%
6	65.39	65.66	0.41%	65.3349	0.08%

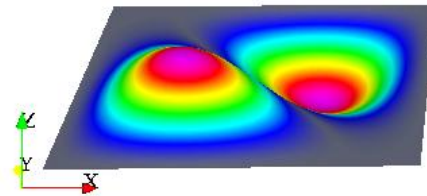
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Shell8		FIDESYS, Shell9	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	17.80	17.81	0.06%	17.80	0.01%	17.80	0.01%
2	36.30	36.36	0.17%	36.30	0.01%	36.30	0.00%
3	36.30	36.36	0.17%	36.30	0.01%	36.30	0.00%
4	53.53	53.61	0.15%	53.52	0.03%	53.52	0.02%
5	65.09	65.3	0.32%	65.07	0.03%	65.08	0.02%
6	65.39	65.61	0.34%	65.38	0.02%	65.39	0.01%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

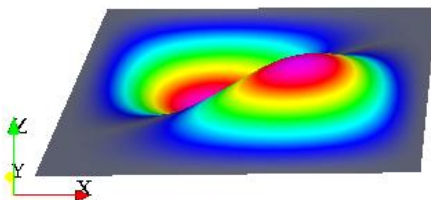
1 собственное значение



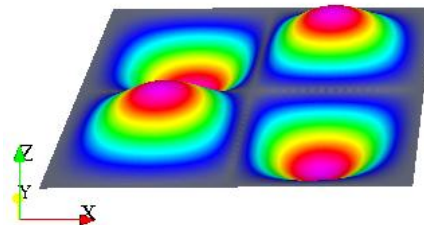
2 собственное значение



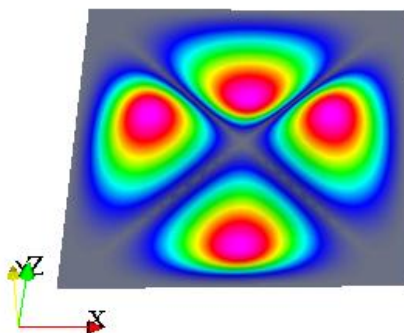
3 собственное значение



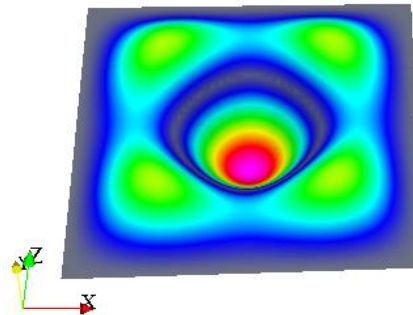
4 собственное значение



5 собственное значение



6 собственное значение



Тест 3.1.4: Собственные частоты тонкой пластики в плоскости

Решается задача о нахождении собственных частот тонкой стенки, закреплённой в основании.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $H = 60.96$ м, $L = 15.24$ м
- Толщина: $t = 0.2286$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на прямой AD
- $U_z = 0$ во всех узлах сетки

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 34.474$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.11$
- Плотность $\rho = 568.7$ кг/м³

Сетка:

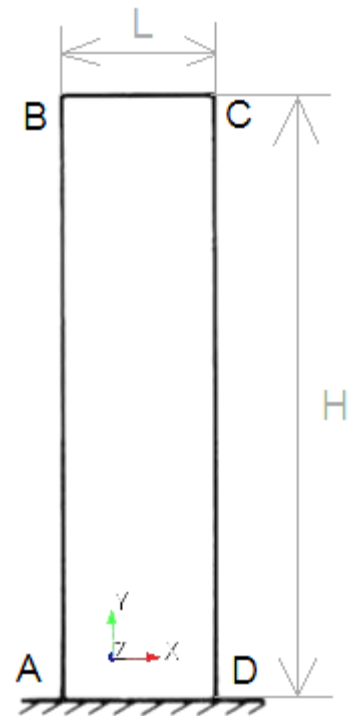
- Два типа сетки (два отдельных теста):
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*256)
 - 3-узловые треугольные оболочки Trishell3 (64*256)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 5)

Анализ результатов

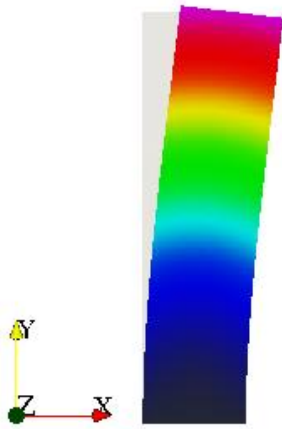
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [15]:



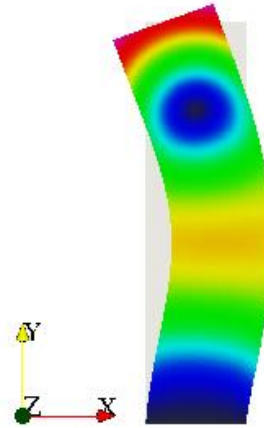
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Trishell3	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	4.97	4.95	0.40%	4.95	0.40%
2	26.39	25.57	3.11%	25.57	3.11%
3	31.94	31.94	0.00%	31.94	0.00%
4	62.07	59.33	4.41%	59.34	4.40%
5	95.83	95.76	0.07%	95.76	0.07%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

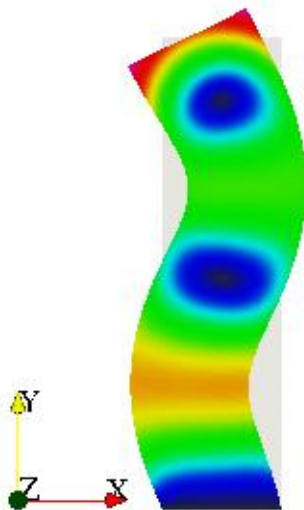
1 собственное значение



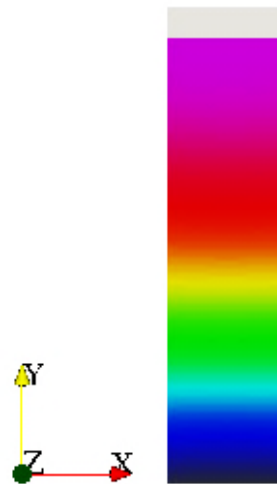
2 собственное значение



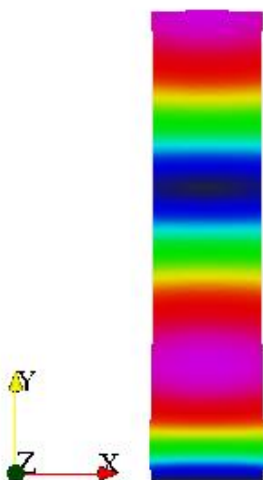
3 собственное значение



4 собственное значение



5 собственное значение



Тест 3.1.5: Собственные частоты консольной пластины с разными толщинами

Решается задача о нахождении собственных частот пластины с разными толщинами, закреплённой в основании.

Геометрическая модель:

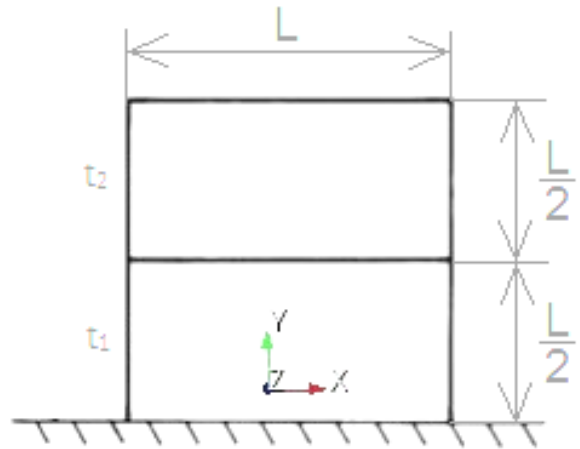
- Размеры пластинки: $L = 0.4572$ м
- Толщины: $t_1 = 6.185$ мм, $t_2 = 3.028$ мм

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ в основании

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 206.84$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7853$ кг/м³



Сетка:

- Два типа сетки (два отдельных теста):
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*256)
 - 3-узловые треугольные оболочки Trishell3 (64*256)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 9)

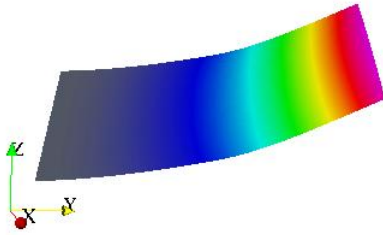
Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на треугольных и четырёхугольных оболочечных элементах (Shell4 и Trishell3) в сравнении с аналитическим решением [15]:

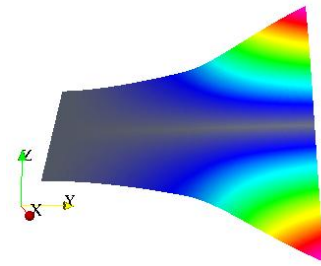
№	Экспериментальное значение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Trishell3	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	29.50	30.16	2.24%	30.16	2.24%
2	56.60	55.48	1.98%	55.49	1.96%
3	102.70	105.87	3.09%	105.86	3.08%
4	129.80	127.96	1.42%	128	1.39%
5	149.80	150.6	0.53%	150.63	0.55%
6	264.40	262.98	0.54%	262.98	0.54%
7	269.90	270.51	0.23%	270.64	0.27%
8	308.50	315.73	2.34%	315.56	2.29%
9	344.50	351.3	1.97%	351.24	1.96%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

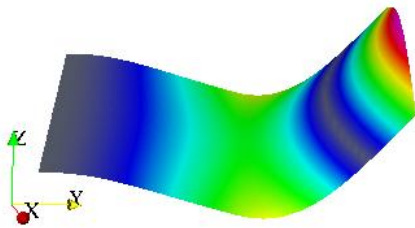
1 собственное значение



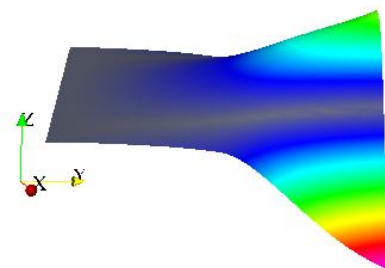
2 собственное значение



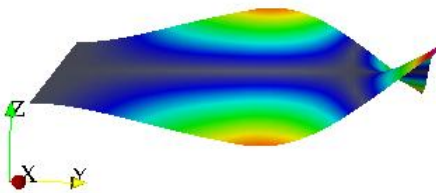
3 собственное значение



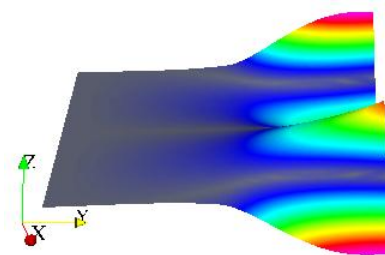
4 собственное значение



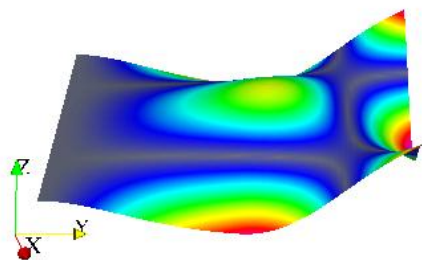
5 собственное значение



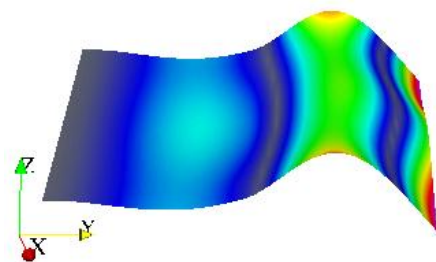
6 собственное значение



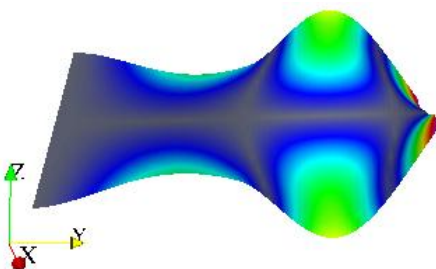
7 собственное значение



8 собственное значение



9 собственное значение



Тест 3.1.6: Собственные частоты сферической оболочки

Решается задача о нахождении собственных частот сферической оболочки, закреплённой с одной стороны.

Геометрическая модель:

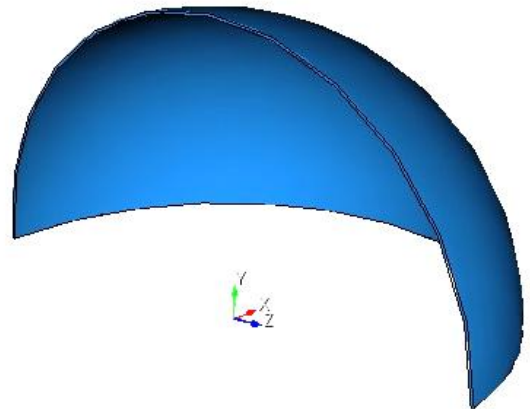
- Размеры сферы: радиус $R = 0.3$ м, толщина $t = 0.003$ м
- В силу симметрии задачи рассматривается половина полусферы

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на поверхности $Y = 0$
- $U_x = 0$ на поверхности $X = 0$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.28$
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³



Сетка:

- Два типа сетки (два отдельных теста):
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4(64*256)
 - 3-узловые треугольные оболочки Trishell3 (64*256)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 5)

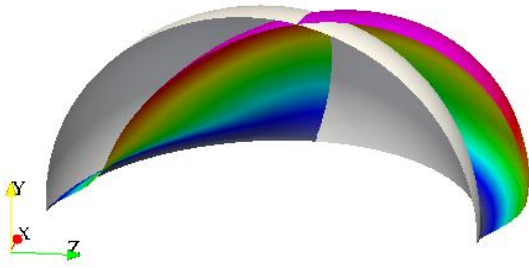
Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [16]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Shell4		FIDESYS, Trishell3	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	1564.70	1573.65	0.57%	1573.65	0.57%
2	2115.30	2105.15	0.48%	2105.56	0.46%
3	2455.40	2466.23	0.44%	2466.57	0.45%
4	2465.40	2487.69	0.90%	2487.75	0.91%
5	2590.40	2586.98	0.13%	2587.45	0.11%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

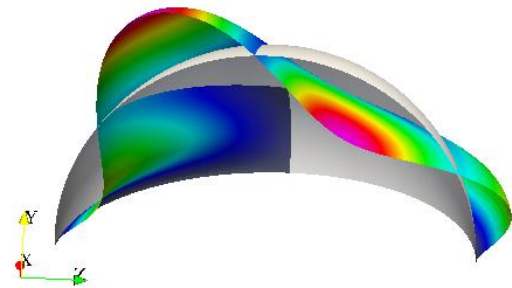
1 собственное значение



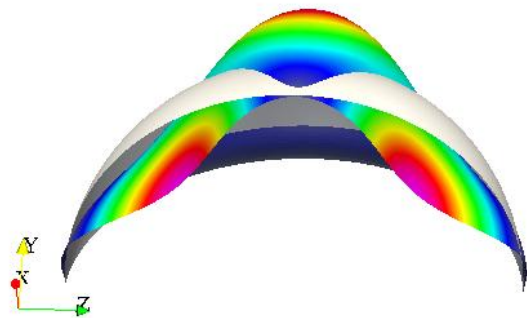
2 собственное значение



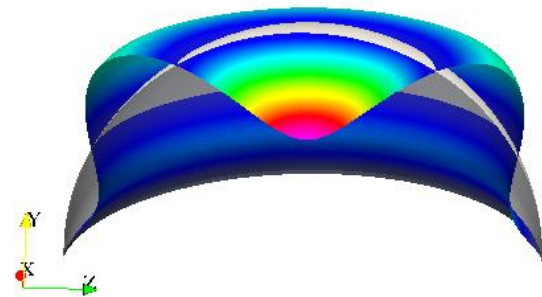
3 собственное значение



4 собственное значение



5 собственное значение



Тест 3.1.7: Собственные частоты колена поллой трубы

Решается задача о нахождении собственных частот колена поллой трубы.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 2$ м, $R = 1$ м, $\theta = 90^\circ$
- Сечение: круг с отверстием, внешний радиус $R_e = 0.01$ м, внутренний радиус $R_i = 0.008$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ в точках А и D
- $U_y = U_z = 0$ в точке В
- $U_x = U_z = 0$ в точке С

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³

Сетка:

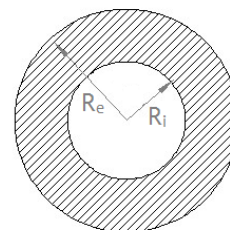
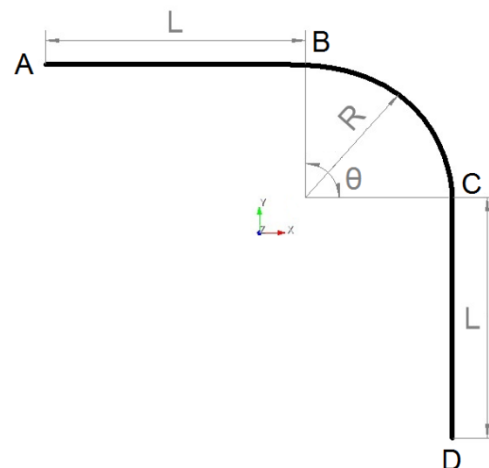
- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
- 150 элементов (по 50 элементов на каждом звене балки: АВ, ВС и CD)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 4)

Анализ результатов

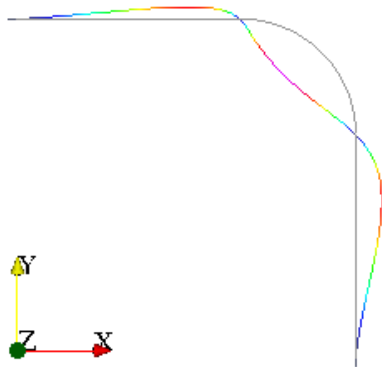
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на балочных элементах (Beam2) в сравнении с аналитическим решением [14]:



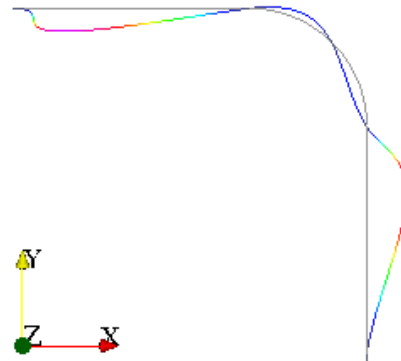
№	Аналитическое решение	FIDESYS	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка
1	17.90	17.65	1.4%
2	24.80	24.43	1.5%
3	25.30	24.95	1.4%
4	27.00	26.73	1.0%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

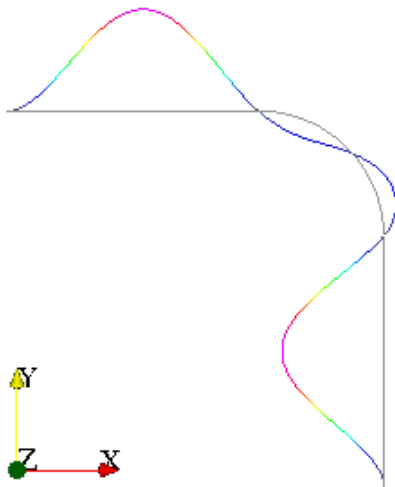
1 собственное значение



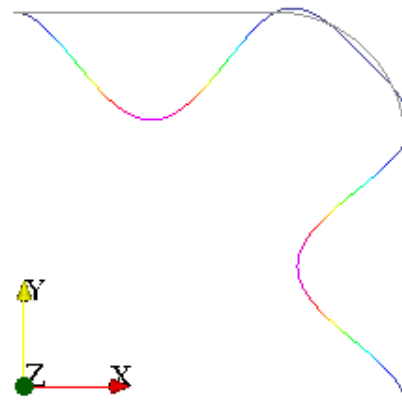
2 собственное значение



3 собственное значение

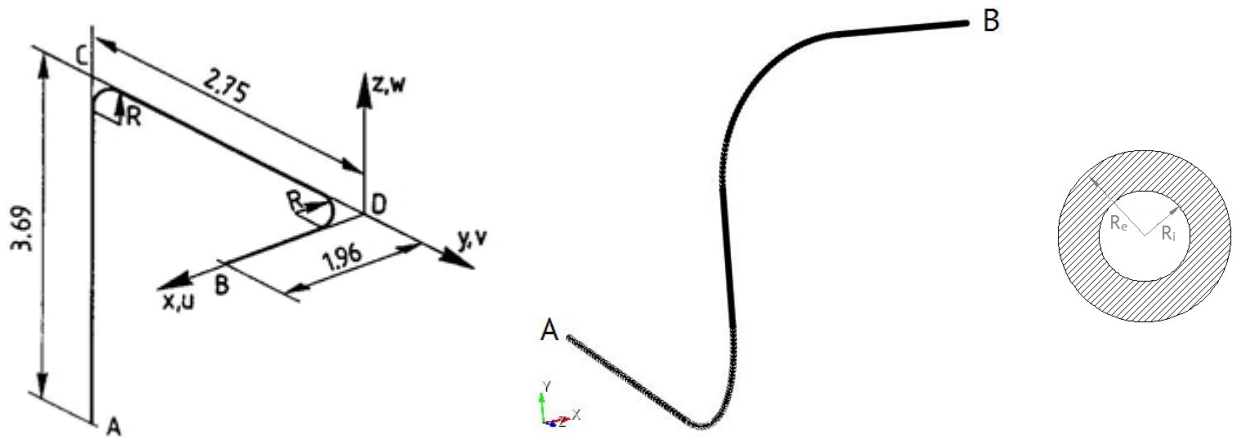


4 собственное значение



Тест 3.1.8: Собственные частоты изогнутого пространственного стержня (задача Ховгаарда)

Решается задача о нахождении собственных частот изогнутой трубы, заполненной водой, с защемлёнными концами.



Геометрическая модель:

- Геометрические размеры модели, а так же её расположение в пространстве приведены на рисунках выше
- Сечение: круг с отверстием, внешний радиус $R_e = 0.0925$ м, внутренний радиус $R_i = 0.08638$ м; моменты инерции:
 - $I_y = I_z = 0.1377 \times 10^{-4}$ м⁴ (прямые элементы)
 - $I_y = I_z = 0.5887 \times 10^{-5}$ м⁴ (изогнутые элементы)

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ в точках A и B

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 165.8$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 13404.106$ кг/м³ (труба заполнена водой)

Сетка:

- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
- 250 элементов (по 50 элементов на каждом звене модели)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 9)

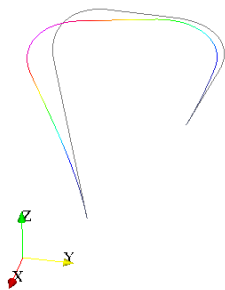
Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на балочных элементах (Beam2) в сравнении с аналитическим решением [17], а так же численным решением MicroFe [18] и ЛИРА [8]:

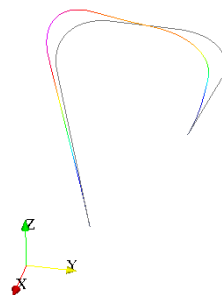
№	Аналитическое решение	FIDESYS		MicroFe		ЛИРА	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	10.18	10.39	2.1%	10.16	0.2%	10.25	0.7%
2	19.54	20.01	2.4%	19.37	0.9%	20.02	2.5%
3	25.47	25.51	0.1%	25.47	0.0%	25.17	1.2%
4	48.09	48.54	0.9%	46.93	2.4%	48.07	0.0%
5	52.86	52.65	0.4%	53.15	0.5%	52.68	0.3%
6	75.94	84.51	11.3%	82.47	8.6%	85.00	11.9%
7	80.11	87.25	8.9%	88.38	10.3%	87.19	8.8%
8	122.34	129.64	6.0%	122.80	0.4%	129.29	5.7%
9	123.15	132.29	7.4%	133.70	8.6%	132.55	7.6%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

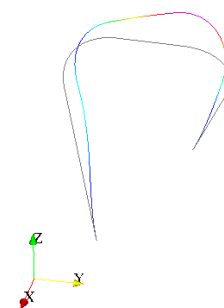
1 собственное значение



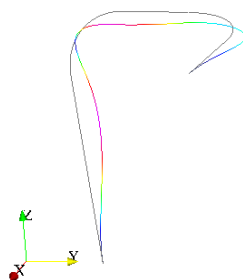
2 собственное значение



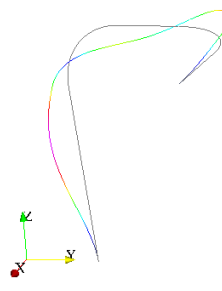
3 собственное значение



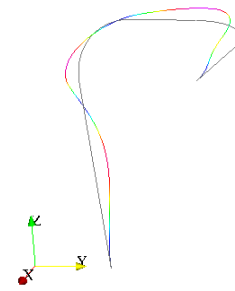
4 собственное значение



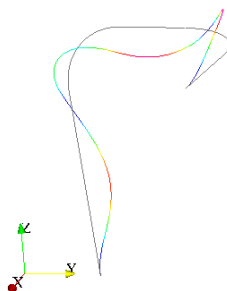
5 собственное значение



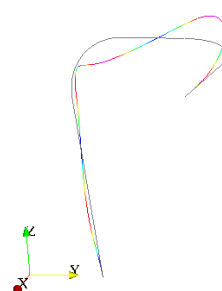
6 собственное значение



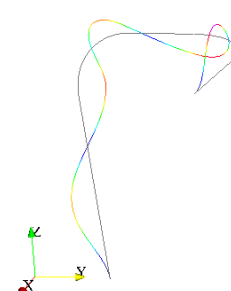
7 собственное значение



8 собственное значение

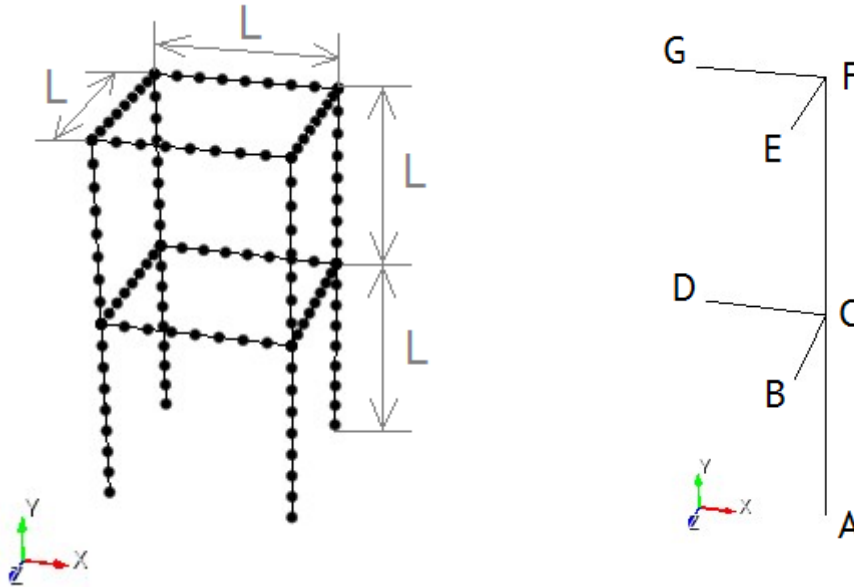


9 собственное значение



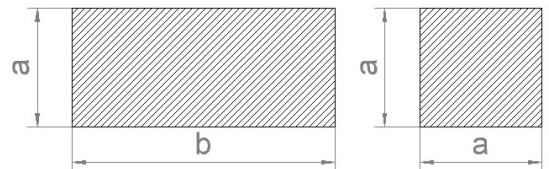
Тест 3.1.9: Собственные частоты трёхмерной рамы

Решается задача о нахождении собственных частот трёхмерной рамы, закреплённой в основании.



Геометрическая модель:

- Размер звена балки: $L = 1$ м
- В силу симметрии задачи рассматривается четверть первоначальной модели
- Сечение:
 - BC, DC: прямоугольник, $a = 0.05$ м, $b = 0.15$ м (ребро a параллельно оси Y , ребро b лежит в плоскости XZ)
 - BC, DC: квадрат, $a = 0.15$ м



Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ в точке A
- $U_z = R_x = R_y = 0$ в точках B и E
- $U_y = U_z = R_x = 0$ в точках D и G

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 219.9$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7900$ кг/м³

Сетка:

- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
- 120 элементов (по 20 элементов на каждом звене конструкции)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 2)

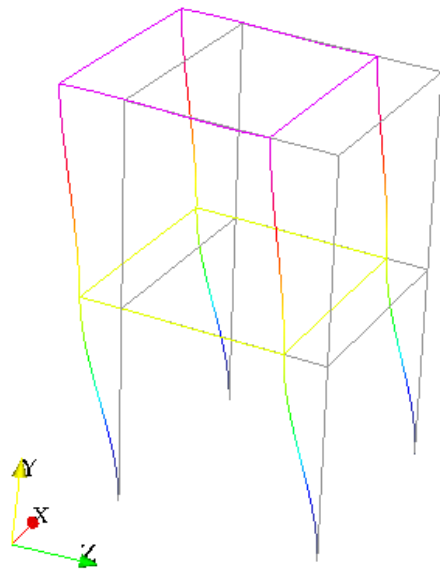
Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на балочных элементах (Beam2) в сравнении с экспериментальным решением [15] и численным решением ANSYS³⁸:

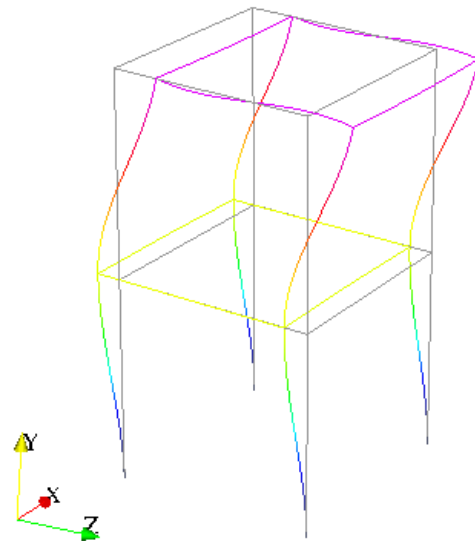
№	Экспериментальное значение	FIDESYS		ANSYS	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	11.80	15.11	28.0%	15.06	27.6%
2	34.10	38.09	11.7%	37.98	11.4%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

1 собственное значение



2 собственное значение



³⁸ Анализ проводился на линейной двухузловой сетке (тип элемента Beam188, количество элементов 120).

Тест 3.1.10: Собственные частоты треугольной пластики (2D)

Решается задача о нахождении собственных частот сечения дамбы, закреплённой в основании.

Геометрическая модель:

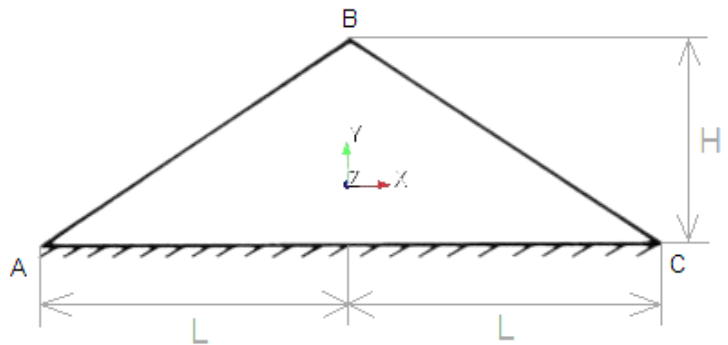
- Размеры пластинки: $H = 91.44$ м, $L = 137.2$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на прямой AC

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 560.5$ МПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.45$
- Плотность $\rho = 2082$ кг/м³



Сетка:

- Тест 1:
 - 3-узловые треугольники Tri3 (по 65 узлов на ребре)
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (по 65 узлов на ребре)
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (по 65 узлов на ребре)
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (по 65 узлов на ребре)
- Тест 2:
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (по 9 узлов на ребре) – МКЭ
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4s (по 9 узлов на ребре) – МСЭ, 2ой порядок элементов

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 3)

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [15]:

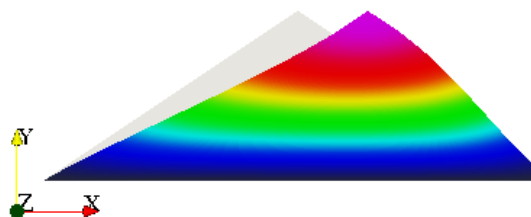
№	Аналитическое решение Значение, Гц	FIDESYS, Tri3		FIDESYS, Quad4		FIDESYS, Quad8		FIDESYS, Quad9	
		Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	1.23	1.24	0.8%	1.24	0.7%	1.24	0.7%	1.24	0.7%
2	1.99	1.99	0.0%	1.99	0.1%	1.99	0.3%	1.99	0.3%
3	2.32	2.31	0.7%	2.31	0.8%	2.30	1.2%	2.30	1.2%

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на элементах типа Quad4 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого порядка в сравнении с аналитическим решением [15]:

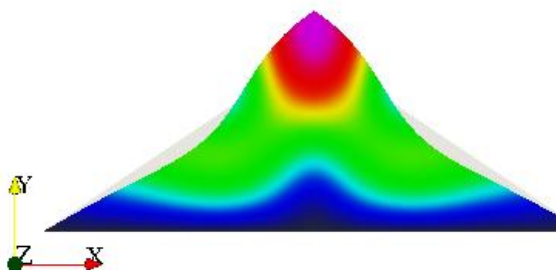
№	Аналитическое решение	МКЭ, Quad4		МСЭ, Quad4, порядок 2	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	1.23	1.24	1.0%	1.24	0.7%
2	1.99	2.14	7.2%	1.99	0.1%
3	2.32	2.60	12.1%	2.32	0.1%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

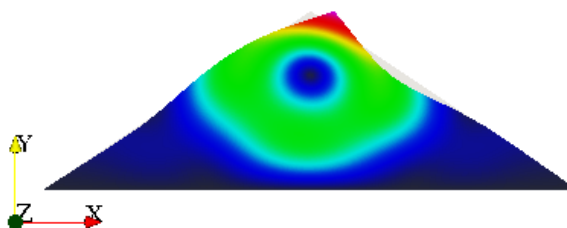
1 собственное значение



2 собственное значение



3 собственное значение



Тест 3.1.11: Собственные частоты круглой пластинки (3D)

Решается задача о нахождении собственных частот круглой пластинки, закреплённой по периметру.

Геометрическая модель:

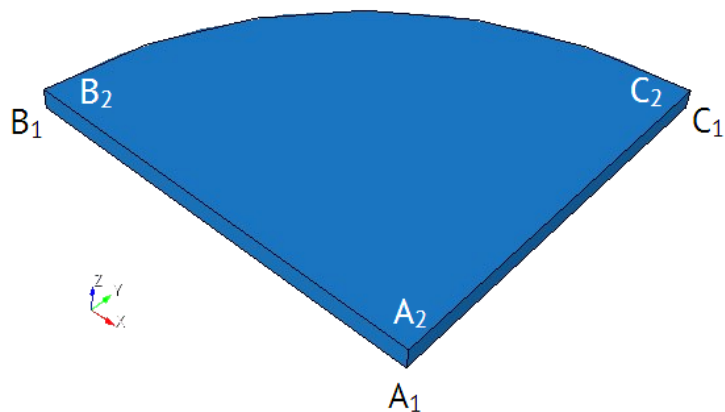
- Размеры пластинки: радиус $R = 0.2$ м, толщина $H = 0.01$ м
- В силу симметрии задачи рассматривается четверть первоначальной модели

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на внешней поверхности $B_1B_2C_2C_1$
- $U_y = 0$ на поверхности $B_1B_2A_2A_1$
- $U_x = 0$ на поверхности $C_1C_2A_2A_1$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.28$
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³



Сетка:

- Тест 1:
 - Линейные гексаэдры Hex8 (1728 элементов)
 - Параболические гексаэдры Hex20 (300 элементов)
 - Параболические гексаэдры Hex27 (300 элементов)
- Тест 2:
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (108 элементов) – МКЭ
 - 8-узловые гексаэдры Hex8s (108 элементов) – МКЭ – МСЭ, 2ой порядок элементов
 - 8-узловые гексаэдры Hex8s (108 элементов) – МКЭ – МСЭ, 3ий порядок элементов

Критерий прохождения теста:

- Сравнение 1ой собственной частоты

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [16]:

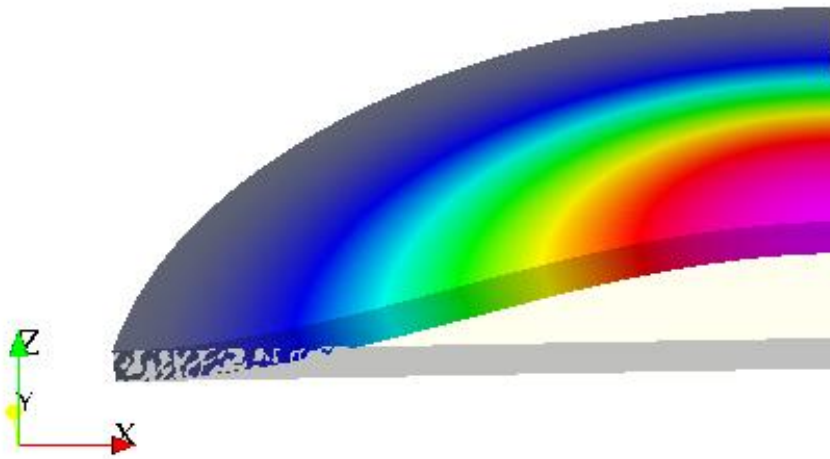
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Hex8		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Hex27	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	633.90	702.03	10.7%	635.94	0.3%	633.08	0.1%

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на грубой сетке на элементах типа Hex8 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого и 3его порядков в сравнении с аналитическим решением [16]:

№	Аналитическое решение Значение, Гц	МКЭ, Hex8		МСЭ, Hex8			
		FIDESYS, Hex8		Порядок 2		Порядок 3	
		Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	633.90	942.62	48.7%	636.11	0.3%	633.51	0.1%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

1 собственное значение



Тест 3.1.12: Собственные частоты консольной балки (3D)

Решается задача о нахождении собственных частот консольной балки, закреплённой с одной стороны.

Геометрическая модель:

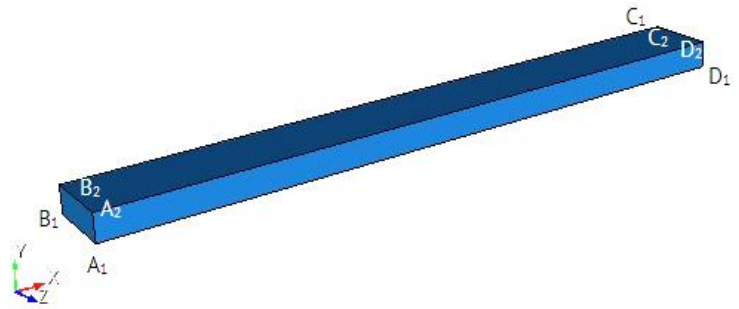
- Размеры балки: 0.5 м x 0.05 м x 0.02 м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на поверхности $B_1B_2A_2A_1$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.28$
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³



Сетка:

- Тест 1:
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (9393 элемента)
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (512 элементов)
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (512 элементов)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (512 элементов)
- Тест 2:
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (2 элемента) – МКЭ
 - 27-узловые гексаэдры Hex27s (2 элемента) – МКЭ – МСЭ, 3ий порядок элементов
 - 27-узловые гексаэдры Hex27s (2 элемента) – МКЭ – МСЭ, 4ый порядок элементов

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (на изгиб: 1, 3 и 6)

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [16]:

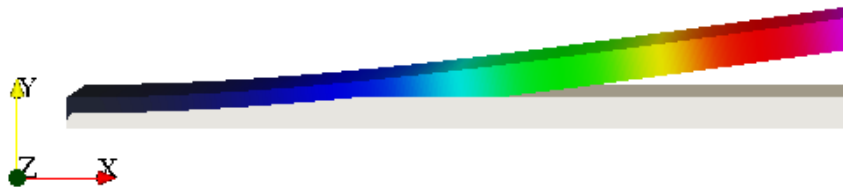
№	Аналитическое решение	FIDESYS, Tetra4		FIDESYS, Hex8		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Hex27	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	67.00	76.53	14.2%	70.47	5.2%	67.28	0.4%	67.26	0.4%
3	420.20	473.98	12.8%	438.80	4.4%	418.56	0.4%	418.44	0.4%
6	1176.70	1311.30	11.4%	1216.95	3.4%	1159.07	1.5%	1158.73	1.5%

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на грубой сетке из двух элементов типа Hex27 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого и 3его порядков в сравнении с аналитическим решением [16]:

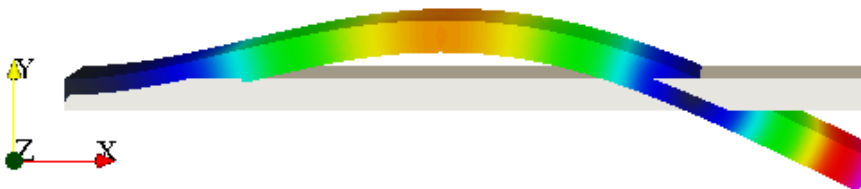
№	Аналитическое решение Значение, Гц	МКЭ, Hex27		МСЭ, Hex27			
		FIDESYS, Hex27		Порядок 3		Порядок 4	
		Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	67.00	71.35	6.5%	68.49	2.2%	67.88	1.3%
3	420.20	678.27	61.4%	426.85	1.6%	423.21	0.7%
6	1176.70	2636.05	124.0%	1406.78	19.6%	1176.56	0.0%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

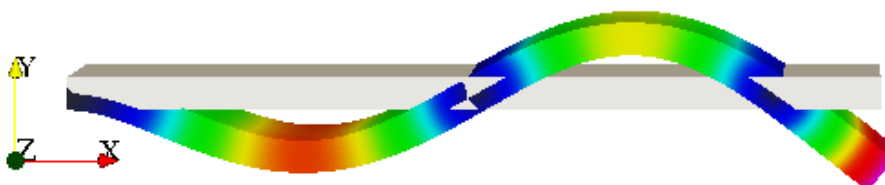
1 собственное значение



3 собственное значение



6 собственное значение



Тест 3.1.13: Собственные частоты тонкой полусферы (3D)

Решается задача о нахождении собственных частот тонкой полусферы, закреплённой с одной стороны.

Геометрическая модель:

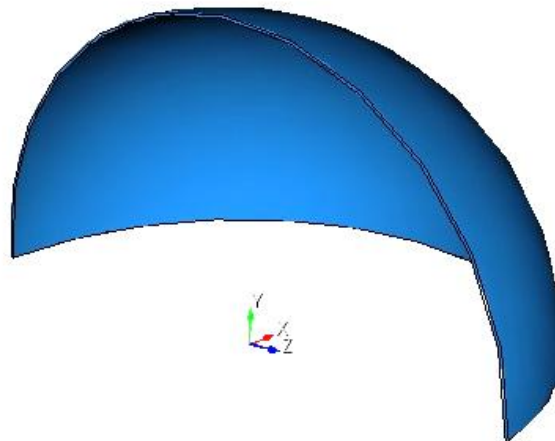
- Размеры сферы: радиус $R = 0.3$ м, толщина $h = 0.003$ м
- В силу симметрии задачи рассматривается половина полусферы

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на поверхности $Y = 0$
- $U_x = 0$ на поверхности $X = 0$

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.28$
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³



Сетка:

- Тест 1:
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (9465 элемента)
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (1328 элементов)
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (1328 элементов)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (1328 элементов)
- Тест 2:
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (90 элементов) – МКЭ
 - 27-узловые гексаэдры Hex27s (90 элементов) – МКЭ – МСЭ, 2-4 порядки элементов

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 5)

Анализ результатов

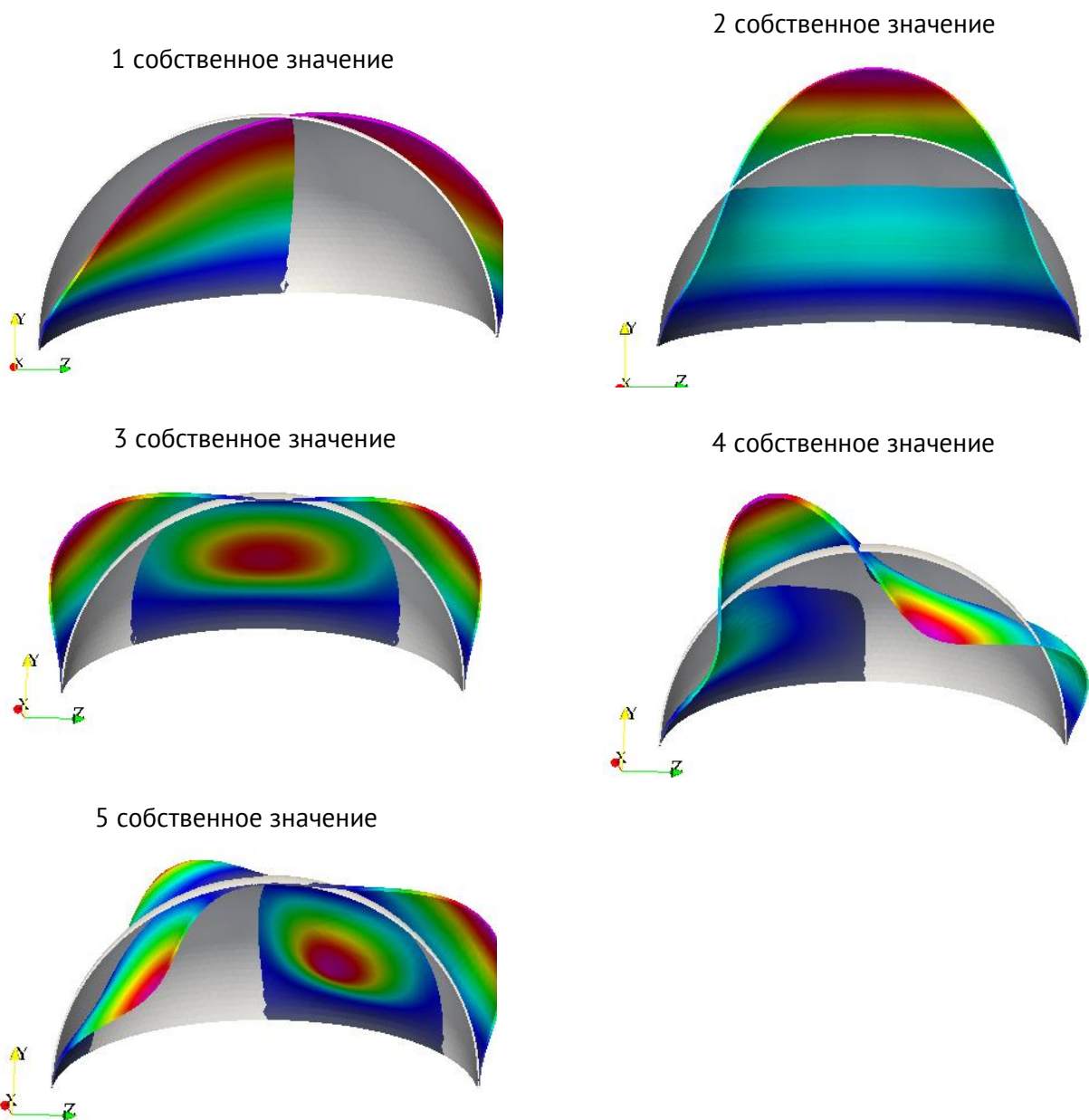
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на различных элементах в сравнении с аналитическим решением [16]:

№	Аналитическое решение	FIDESYS, Tetra4		FIDESYS, Hex8		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Hex27	
		Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	1564.70	1643.37	5.0%	1619.09	3.5%	1583.19	1.2%	1582.63	1.1%
2	2115.30	2225.26	5.2%	2181.74	3.1%	2118.17	0.1%	2117.31	0.1%
3	2455.40	2559.62	4.2%	2522.67	2.7%	2479.02	1.0%	2478.55	0.9%
4	2465.40	2624.17	6.4%	2545.15	3.2%	2499.57	1.4%	2499.53	1.4%
5	2590.40	2784.32	7.5%	2686.78	3.7%	2599.66	0.4%	2599.33	0.3%

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на грубой сетке из элементов типа Hex27 методом конечных элементов и методом спектральных элементов 2ого, 3его и 4ого порядков в сравнении с аналитическим решением [16]:

№	Аналитическое решение	МКЭ, Hex27		МСЭ, Hex27					
		FIDESYS, Hex27		Порядок 2		Порядок 3		Порядок 4	
		Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц
1	1564.70	1610.77	2.9%	1618.16	3.4%	1588.79	1.5%	1582.70	1.2%
2	2115.30	2156.32	1.9%	2167.47	2.5%	2125.43	0.5%	2117.13	0.1%
3	2455.40	2502.53	1.9%	2505.53	2.0%	2482.85	1.1%	2478.45	0.9%
4	2465.40	2503.62	1.6%	2512.50	1.9%	2500.15	1.4%	2499.49	1.4%
5	2590.40	2620.22	1.2%	2631.14	1.6%	2602.06	0.5%	2599.15	0.3%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:



Тест 3.1.14: Собственные частоты армированной оболочки

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной армированной двумя балками оболочки, защемлённой по периметру.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 20.32$ см
- Толщина пластинки: $t = 1.27$ мм
- Сечение балок: прямоугольник, $a = 11.43$ мм, $b = 1.854$ мм

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ по периметру

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 69$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.33$
- Плотность $\rho = 2600$ кг/м³

Сетка:

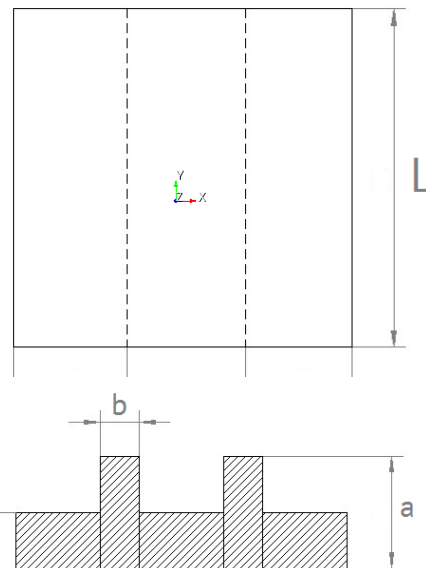
- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4
 - 4032 элемента (64*63)
- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
 - 128 элементов (по 64 элемента на каждой балке)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 3)

Анализ результатов

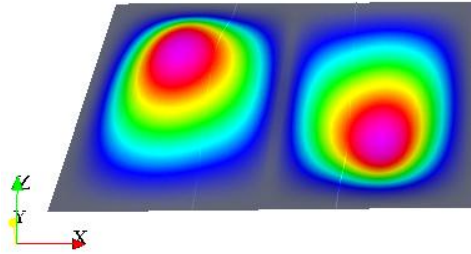
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на линейных оболочечных (Shell4) и балочных (Beam2) элементах в сравнении с экспериментальным решением [15]:



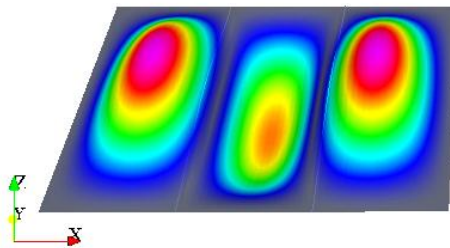
№	Экспериментальное значение	FIDESYS, Shell4	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка
1	859.00	859.20	0.0%
2	1044.00	1052.58	0.8%
3	1292.00	1272.67	1.5%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

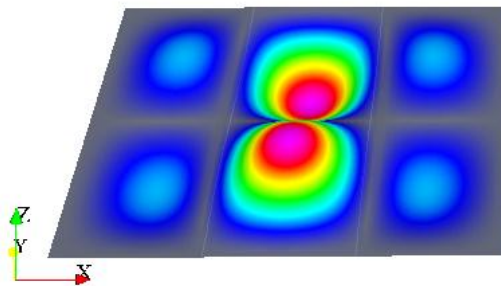
1 собственное значение



2 собственное значение



3 собственное значение



Тест 3.1.15: Собственные частоты консольной балки, предварительно нагруженной силой (3D)

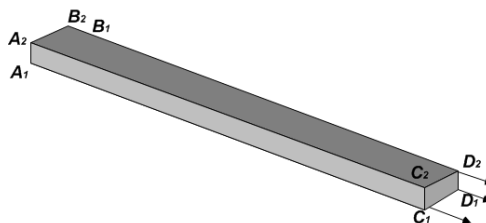
Решается задача о нахождении собственных частот консольной балки, защемленной с одной грани, при действии силы на вершины противоположной грани.

Геометрическая модель:

- Размеры балки: 0.5 м x 0.02 м x 0.05 м

Граничные условия:

- Перемещения $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на поверхности $B_1B_2A_2A_1$
- Сосредоточенные силы в точках C_1, C_2, D_2, D_1 $F=12500$ Па



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона = 0.28
- Плотность $\rho = 7800$ кг/м³

Сетка:

- Два типа элементов (два отдельных теста):
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (1 386 элементов)
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (9 312 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Первая собственная частота 85.804 Гц

Значение вычислено по следующей формуле [16]:

$$f^* = f_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{5Pl^2}{14EJ}}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1.875}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

где J – момент инерции балки, F – площадь сечения.

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчета FIDESYS и AUTOFEM [16] на различных элементах в сравнении с аналитическим решением:

№	Аналитическое решение	FIDESYS				AUTOFEM	
		FIDESYS, Hex20		FIDESYS, Tetra10		Значение, Гц	Ошибка
		Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка		
1	85.804	86.1376	0.4%	86.1352	0.39%	86.156	0.41%

- На картинке ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

1 собственное значение



Тесты с известным численным решением

Тест 3.2.1: Собственные частоты свободно опёртой квадратной пластинки (3D)

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis “Simply Supported “Solid” Square Plate”, Test No FV52 [5].

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки.

Геометрическая модель и сетка (размеры указаны в метрах):

- Размеры пластинки: 10 м x 10 м x 1 м

Граничные условия:

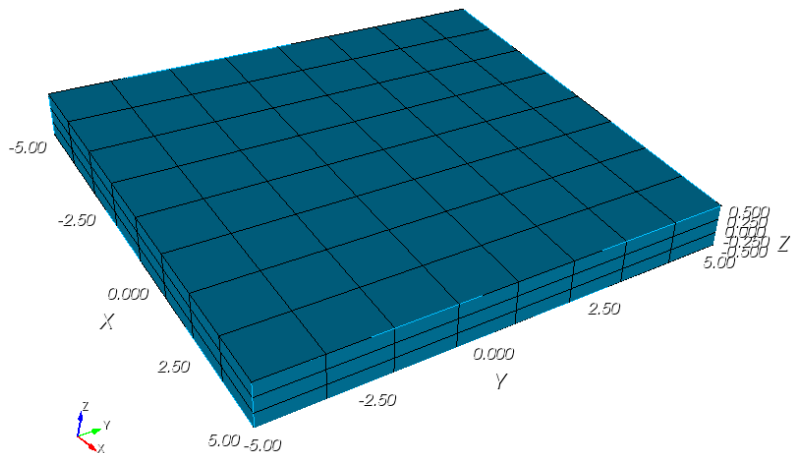
- $U_z = 0$ на всех рёбрах нижней грани (плоскости $Z = -0.5$ м)

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³

Сетка:

- 8-узловые гексаэдры Hex8
- 192 элемента ($8 \times 8 \times 3$)



Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 4 по 10)

Анализ результатов

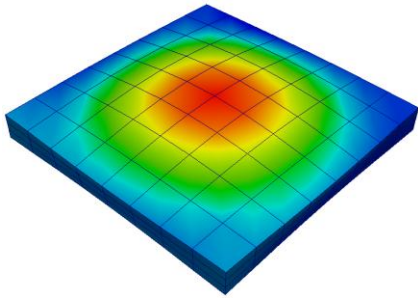
В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS³⁹ и NASTRAN [6]:

№	NAFEMS	FIDESYS		ANSYS		NASTRAN	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
4	51.65	55.68	7.8%	45.32	12.3%	45.24	12.4%
5	132.73	141.52	6.62%	113.96	14.1%	113.70	14.3%
6	132.73	141.52	6.62%	113.96	14.1%	113.70	14.3%
7	194.37	196.87	1.29%	173.30	10.8%	172.30	11.4%
8	197.18	208.79	5.89%	196.77	0.2%	196.80	0.2%
9	210.55	210.62	0.03%	209.56	0.5%	209.60	0.5%
10	210.55	210.62	0.03%	209.56	0.5%	209.60	0.5%

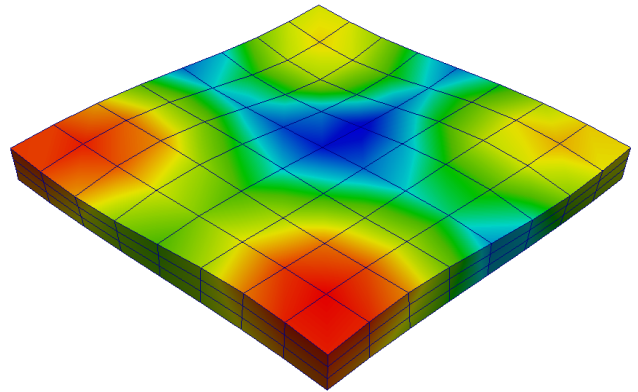
- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

³⁹ Анализ проводился на гексаэдральной сетке (тип элемента SOLID185, количество элементов 192).

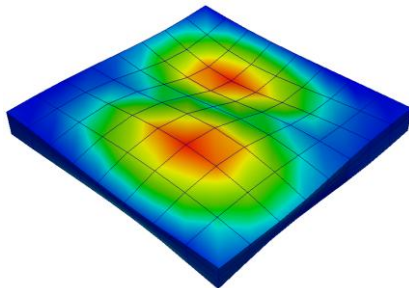
4 собственное значение



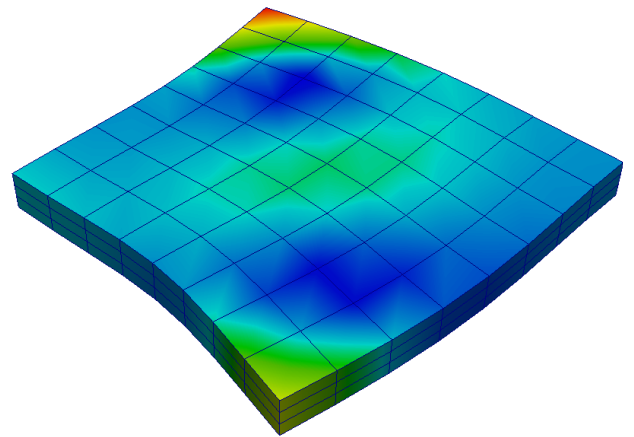
8 собственное значение



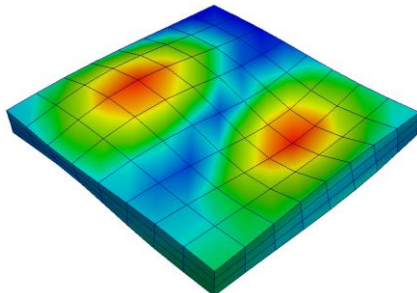
5 собственное значение



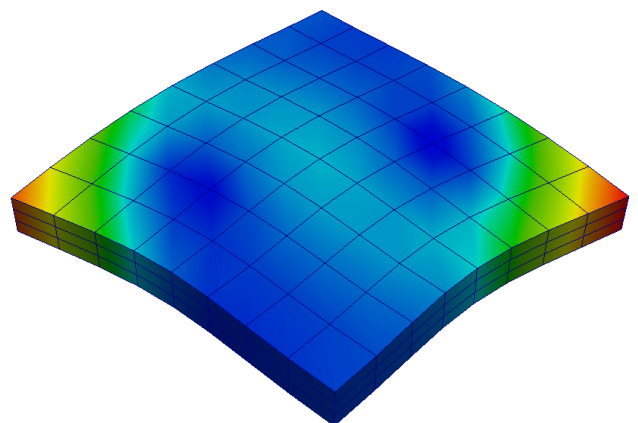
9 собственное значение



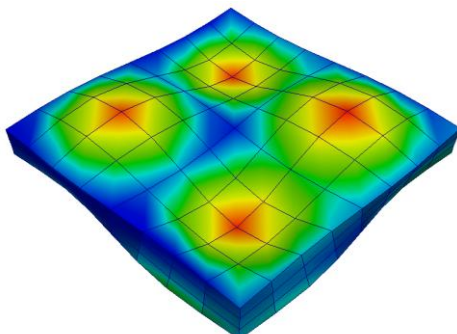
6 собственное значение



10 собственное значение



7 собственное значение



Тест 3.2.2: Собственные частоты свободно опёртой прямоугольной балки (3D)

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis “Deep Simply Supported “Solid” Beam”, Test N5.

Решается задача о нахождении собственных частот прямоугольной балки.

Геометрическая модель:

- Размеры балки: 10 м x 2 м x 2 м

Граничные условия:

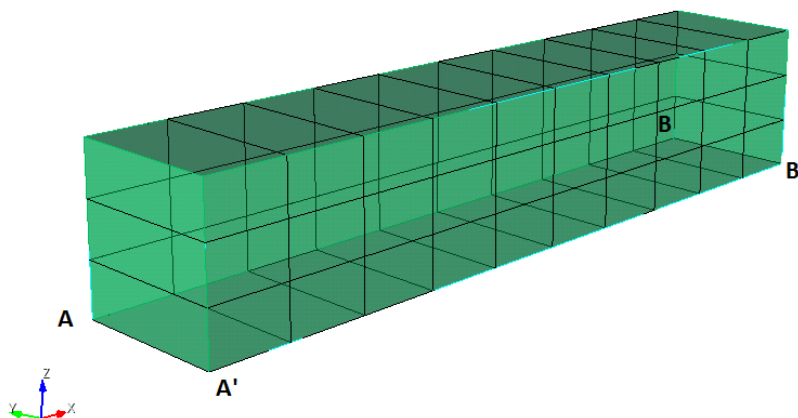
- $U_x = U_z = 0$ на прямой AA'
- $U_z = 0$ на прямой BB'
- $U_y = 0$ на плоскости $Y = -1$ м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³

Сетка:

- 8-узловые гексаэдры Hex8
- 30 элементов



Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 5)

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁴⁰ и NASTRAN [6]:

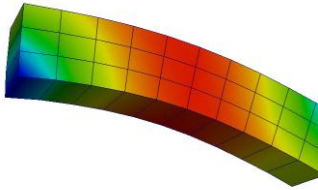
№	NAFEMS	FIDESYS		ANSYS		NASTRAN	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	42.88	40.72	5.0%	28.25	26.0%	38.28	0.2%
2	93.82	88.66	5.5%	75.50	11.4%	83.95	1.5%
3	170.70	164.33	3.7%	138.06	9.3%	157.60	3.5%
4	286.10	275.22	3.8%	243.53	0.8%	264.90	7.9%
5	318.90	306.63	3.8%	296.33	0.3%	298.30	0.4%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

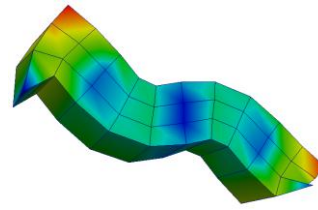
⁴⁰ Анализ проводился на гексаэдральной сетке (тип элемента SOLID185, количество элементов 30).



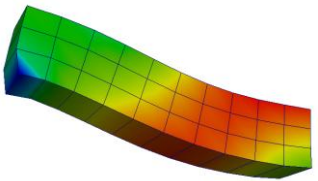
1 собственное значение



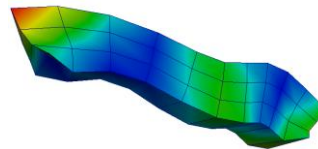
6 собственное значение



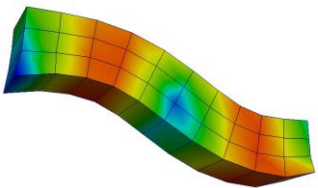
2 собственное значение



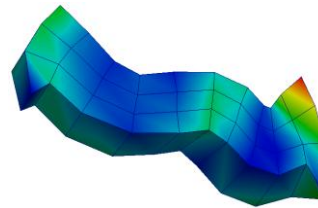
7 собственное значение



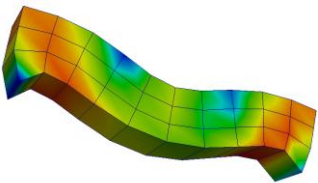
3 собственное значение



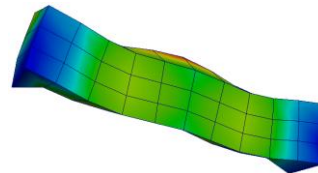
8 собственное значение



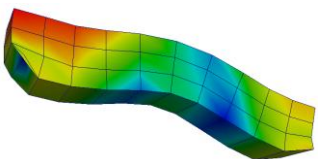
4 собственное значение



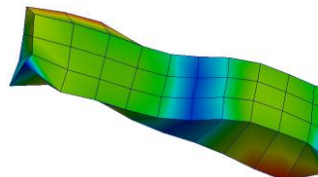
9 собственное значение



5 собственное значение



10 собственное значение



Тест 3.2.3: Собственные частоты свободной квадратной пластинки

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, "Free Thin Square Plate", Test No FV12, April 1989, p.17.

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки.

Геометрическая модель:

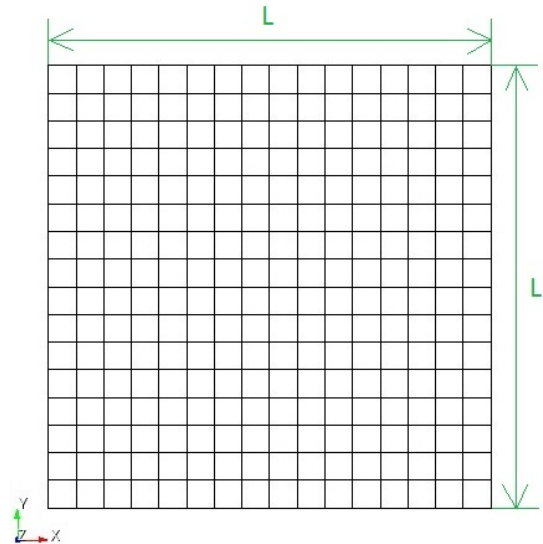
- Размеры пластинки: $L = 10$ м
- Толщина: $t = 0.05$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = R_z = 0$ во всех узлах сетки

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³



Сетка:

- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4
- 256 элементов (16*16)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 4 по 9)

Анализ результатов

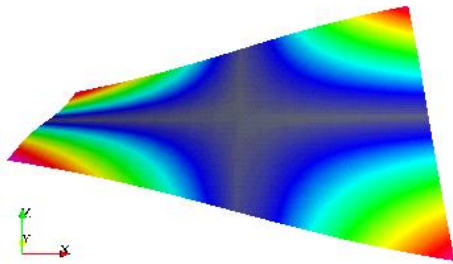
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁴¹, NASTRAN [6] и CATIA [7]:

№	NAFEMS	FIDESYS		ANSYS		NASTRAN		CATIA	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
4	1.622	1.67	2.96%	1.62	0.1%	1.62	0.1%	1.62	0.1%
5	2.360	2.43	2.97%	2.37	0.4%	2.39	1.2%	2.39	1.2%
6	2.922	3.02	3.35%	2.94	0.7%	2.98	2.0%	2.98	2.0%
7	4.233	4.32	2.06%	4.21	0.5%	4.24	0.4%	4.25	0.4%
8	4.233	4.32	2.06%	4.21	0.5%	4.24	0.4%	4.25	0.4%
9	7.416	7.71	3.96%	7.52	1.4%	7.79	5.1%	7.79	5.1%

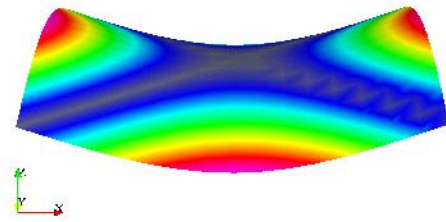
- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

⁴¹ Анализ проводился на четырёхугольной сетке (тип элемента Shell181, количество элементов 256).

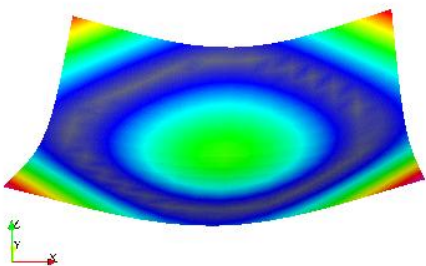
4 собственное значение



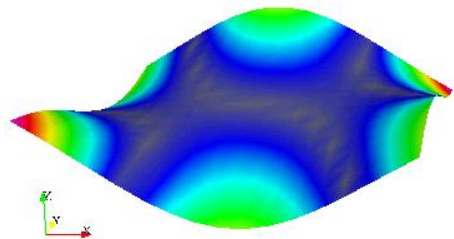
5 собственное значение



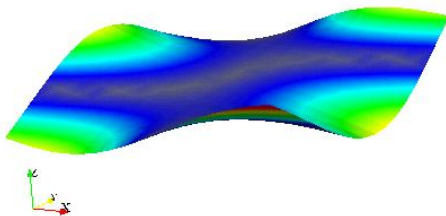
6 собственное значение



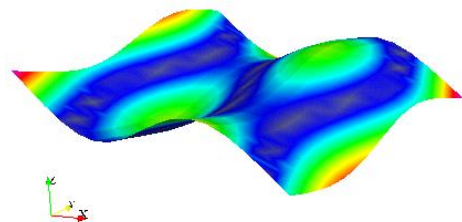
7 собственное значение



8 собственное значение



9 собственное значение



- В таблице приведены результаты расчёта аналогичной задачи в FIDESYS и CATIA [7] для линейных треугольных элементов (Trishell3):

№	NAFEMS	FIDESYS		CATIA	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
4	1.622	1.67	2.96%	1.61	0.5%
5	2.36	2.43	2.97%	2.38	0.8%
6	2.922	3.02	3.35%	2.96	1.3%
7	4.233	4.32	2.06%	4.23	0.1%
8	4.233	4.32	2.06%	4.23	0.0%
9	7.416	7.71	3.96%	7.65	3.2%

Тест 3.2.4: Собственные частоты свободно опёртой квадратной пластинки

NAFEMS-Glasgow, BENCHMARK newsletter, "Simply Supported Thin Square Plate", Report No. E1261/R002, February 1989, p.21.

Решается задача о нахождении собственных частот квадратной пластинки.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 10$ м
- Толщина: $t = 0.05$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = R_z = 0$ во всех узлах сетки
- $U_z = R_x = 0$ на прямой $X = 0$ м и $X = 10$ м
- $U_z = R_y = 0$ на прямой $Y = 0$ м и $Y = 10$ м

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³

Сетка:

- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4
- 256 элементов (16*16)

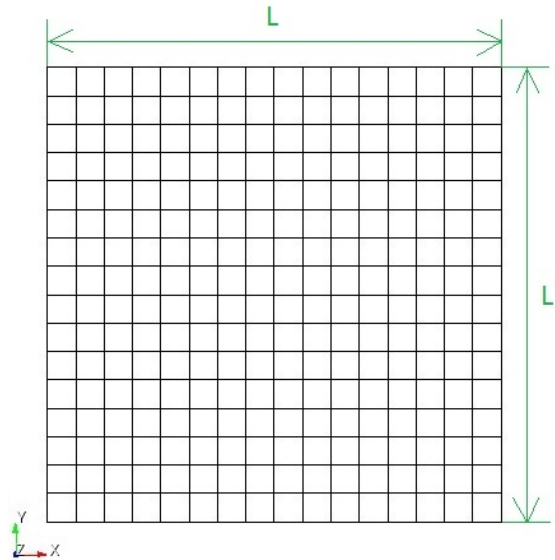
Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 8)

Анализ результатов

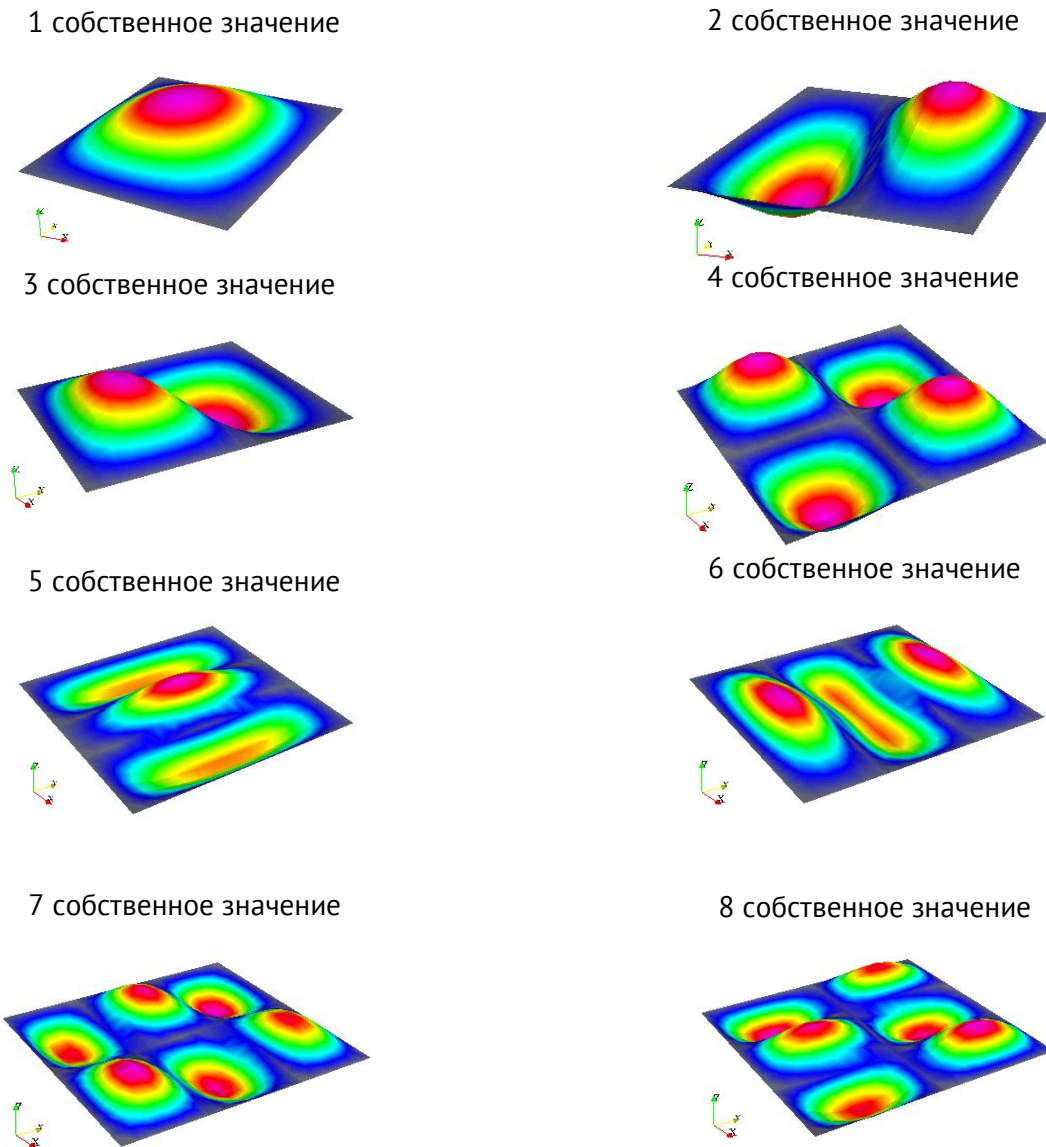
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁴², NASTRAN [6] и CATIA [7]:

№	NAFEMS	FIDESYS		ANSYS		NASTRAN		CATIA	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	2.377	2.45	3.07%	2.38	0.1%	2.39	0.6%	2.38	0.0%
2	5.942	6.18	4.01%	5.98	0.7%	6.18	4.0%	5.95	0.2%
3	5.942	6.18	4.01%	6.02	1.2%	6.18	4.0%	5.95	0.2%
4	9.507	9.91	4.24%	9.61	1.1%	9.93	4.5%	9.52	0.2%
5	11.88	12.66	6.57%	12.16	2.4%	13.27	11.7%	11.95	0.6%
6	11.88	12.66	6.57%	12.29	3.4%	13.27	11.7%	11.95	0.6%
7	15.45	16.36	5.89%	15.81	2.3%	17.07	10.5%	15.51	0.4%
8	15.45	16.36	5.89%	15.88	2.8%	17.07	10.5%	15.51	0.4%



⁴² Анализ проводился на четырёхугольной сетке (тип элемента Shell181, количество элементов 256).

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:



- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и CATIA [7] для линейных треугольных элементов (Trishell3):

№	NAFEMS	FIDESYS		CATIA	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	2.377	2.45	3.07%	2.38	0.0%
2	5.942	6.18	4.01%	5.95	0.1%
3	5.942	6.18	4.01%	5.95	0.1%
4	9.507	9.91	4.24%	9.52	0.1%
5	11.88	12.66	6.57%	11.90	0.2%
6	11.88	12.66	6.57%	11.90	0.2%
7	15.45	16.36	5.89%	15.48	0.2%
8	15.45	16.36	5.89%	15.48	0.2%

Тест 3.2.5: Собственные частоты цилиндрической пластинки с защемлением

Решается задача о нахождении собственных частот цилиндрической пластинки (лопатки компрессора).

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 304.8$ мм, $R = 609.6$ мм, $\theta = 0.5$ рад
- Толщина: $t = 3.048$ мм

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = R_y = R_z = 0$ на ребре AD

Параметры материала:

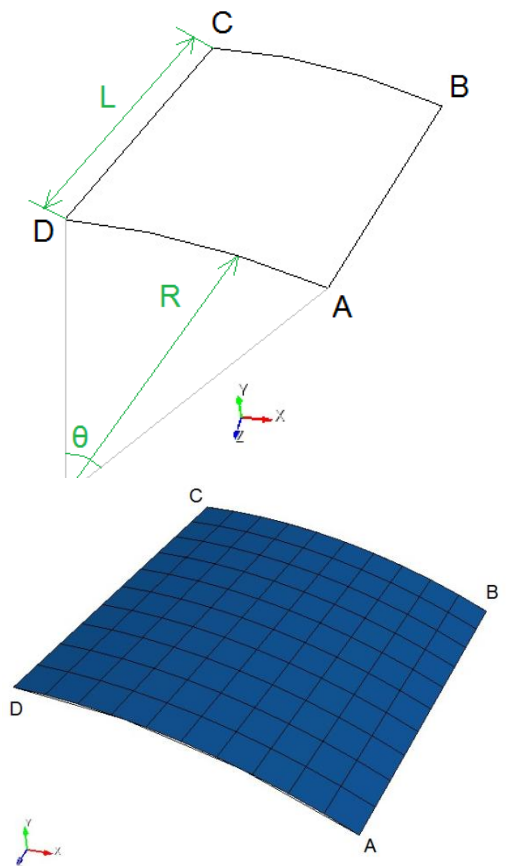
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 206.85$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 7857.2$ кг/м³

Сетка:

- Тест на сравнение с другими пакетами:
 - 4-узловые четырехугольные оболочки Shell4(10*10)
 - 8-узловые восьмиугольные оболочки Shell8(5*5)
 - 3-узловые треугольные оболочки Trishell3 (10*10)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 6)



Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁴³ и CATIA [7] для линейных четырёхугольных элементов (Shell4) на сетке 10*10:

№	Известное решение	FIDESYS, Shell4		ANSYS		CATIA	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	85.60	86.9	1.52%	84.28	1.5%	84.1	1.75%
2	134.50	139.85	3.98%	135.90	1.0%	136.3	1.34%
3	259.00	252.04	2.69%	249.29	3.7%	252.4	2.55%
4	351.00	353.33	0.66%	340.29	3.1%	338	3.70%
5	395.00	395.51	0.13%	384.46	2.7%	382.5	3.16%
6	531.00	557.83	5.05%	555.94	4.7%	547.3	3.07%

- В таблицах приведены результаты расчёты FIDESYS и CATIA [7] для восьмиугольных элементов (Shell8) на сетке 5*5 и для линейных треугольных элементов Trishell3 на сетке 10*10:

№	Известное	FIDESYS, Shell8	CATIA
---	-----------	-----------------	-------

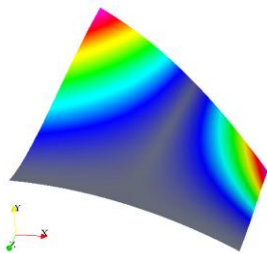
⁴³ Анализ проводился на четырёхугольной сетке (тип элемента Shell181, количество элементов 100).

	решение				
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	85.60	86.98	1.61%	85.9	0.35%
2	134.50	139.55	3.75%	138.6	3.05%
3	259.00	247.95	4.27%	246.1	4.98%
4	351.00	347.44	1.01%	341.3	2.76%
5	395.00	391.61	0.86%	384.1	2.76%
6	531.00	532.8	0.34%	528.8	0.41%

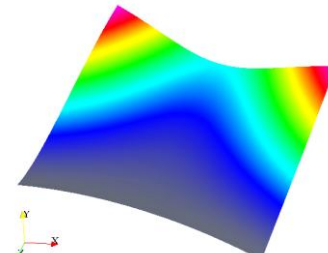
№	Известное решение	FIDESYS, Trishell3		CATIA	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	85.60	91.37	6.74%	87.68	2.43%
2	134.50	147	9.29%	143.05	6.36%
3	259.00	256.81	0.85%	251.3	2.97%
4	351.00	380.16	8.31%	349.6	0.40%
5	395.00	435.11	10.15%	394.4	0.15%
6	531.00	579.1	9.06%	544	2.45%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

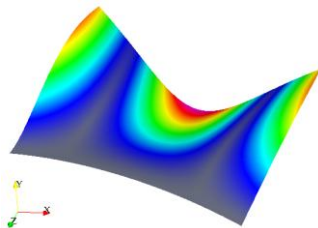
1 собственное значение



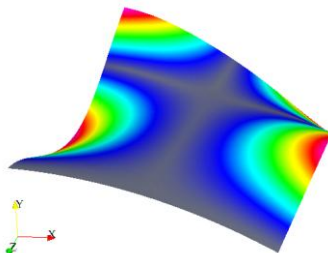
2 собственное значение



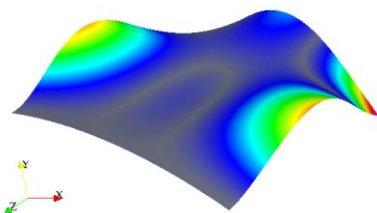
3 собственное значение



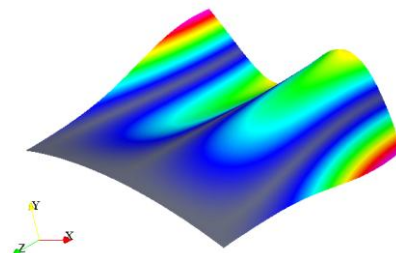
4 собственное значение



5 собственное значение



6 собственное значение



Тест 3.2.6: Собственные частоты консольной пластинки

NAFEMS, Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, “Thin Square Cantilevered Plate – Symmetric Modes”, Test 11a.

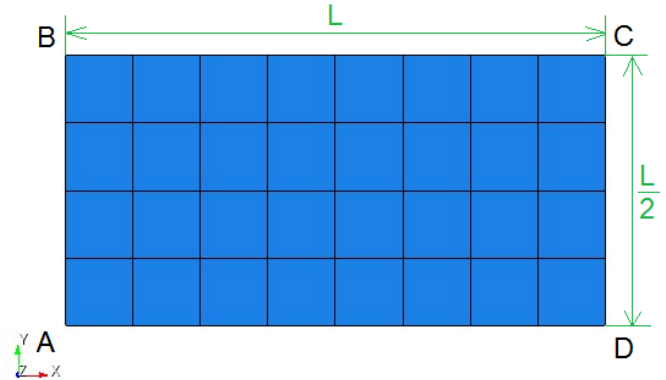
Решается задача о нахождении собственных частот консольной пластинки.

Геометрическая модель:

- Размеры пластинки: $L = 10$ м
- Толщина: $t = 0.05$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = R_z = 0$ во всех узлах сетки
- $U_z = R_x = R_y = 0$ на прямой AB
- $R_x = 0$ на прямой BC



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³

Сетка:

- 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4
- 32 элемента (4*8)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 6)

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁴⁴, NASTRAN [6] и ABAQUS⁴⁵:

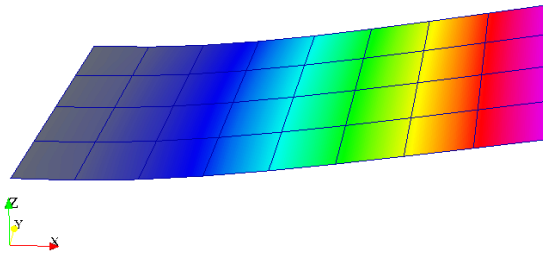
№	NAFEMS	FIDESYS, Shell4		ANSYS		NASTRAN		ABAQUS	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	0.42	0.43	2.38%	0.42	1.4%	0.42	0.7%	0.42	1.4%
2	2.58	2.72	5.43%	2.69	4.1%	2.60	0.9%	2.49	3.6%
3	3.31	3.44	3.93%	3.80	15.0%	3.31	0.2%	3.12	5.8%
4	6.56	6.94	5.79%	8.15	24.3%	6.54	0.3%	6.04	7.8%
5	7.38	8.46	14.63%	9.28	25.7%	7.81	5.8%	7.09	3.9%
6	11.40	13.06	14.56%	13.76	20.7%	12.34	8.2%	10.57	7.3%

⁴⁴ Анализ проводился на четырёхугольной сетке (тип элемента Shell181, количество элементов 32).

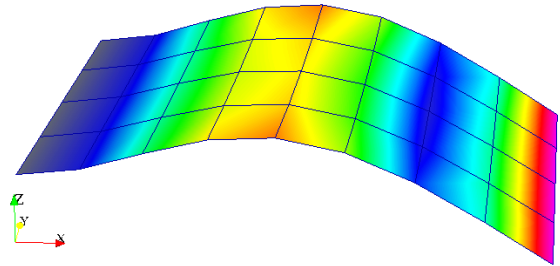
⁴⁵ Анализ проводился на четырёхугольной сетке (тип элемента S4R, количество элементов 32).

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

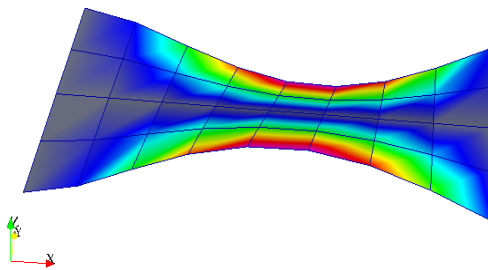
1 собственное значение



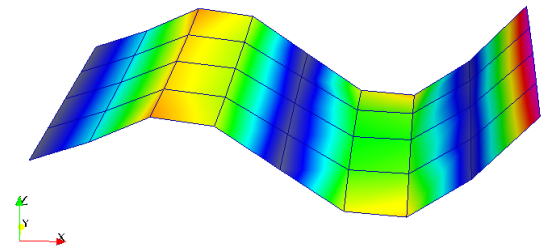
2 собственное значение



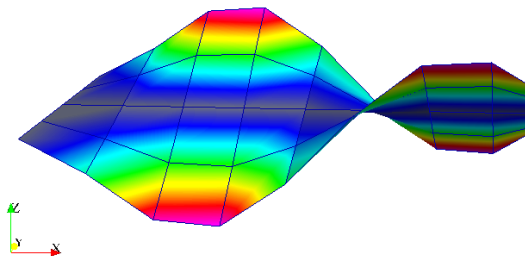
3 собственное значение



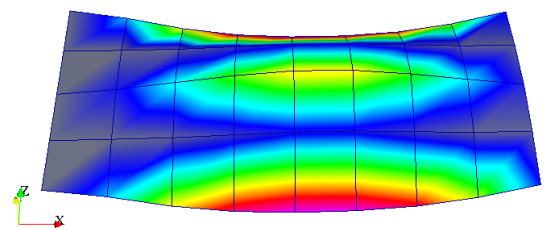
4 собственное значение



5 собственное значение



6 собственное значение



Тест 3.2.7: Собственные частоты свободно опёртой прямоугольной балки

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, “Deep Simply-Supported Beam”, Test No FV5.

Решается задача о нахождении собственных частот свободно опёртой балки.



Геометрическая модель:

- Длина балки: $L = 10$ м
- Сечение: квадрат, длина ребра $a = 2$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = U_z = R_x = 0$ в точке A
- $U_y = U_z = 0$ в точке B

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³

Сетка:

- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
- 10 элементов

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 7) (теория Тимошенко)

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁴⁶, ABAQUS⁴⁷, NASTRAN [6] и CATIA [7]:

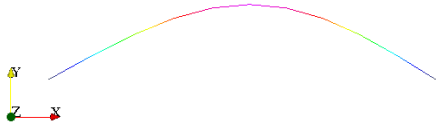
№	NAFEMS	FIDESYS		ANSYS		NASTRAN		ABAQUS		CATIA	
	Знач., Гц	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка
1	42.57	45.35	6.5%	44.51	4.6%	43.26	1.6%	42.67	0.2%	42.53	0.1%
2	42.57	45.35	6.5%	44.51	4.6%	43.26	1.6%	42.67	0.2%	42.53	0.1%
3	77.84	71.33	8.4%	72.01	7.5%	77.84	0.0%	71.19	8.5%	71.55	8.1%
4	125.51	125.13	0.3%	125.51	0.0%	125.50	0.0%	124.87	0.5%	125.52	0.0%
5	145.71	181.40	24.5%	171.87	18.0%	154.90	6.3%	147.88	1.5%	145.06	0.4%
6	145.71	181.40	24.5%	171.87	18.0%	154.90	6.3%	147.88	1.5%	145.06	0.4%
7	241.24	215.77	10.6%	223.16	7.5%	241.20	0.0%	211.81	12.2%	221.76	8.1%

⁴⁶ Анализ проводился на линейной двухузловой сетке (тип элемента Beam188, количество элементов 10).

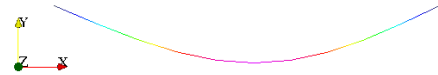
⁴⁷ Анализ проводился на линейной двухузловой сетке (тип элемента B31, количество элементов 10).

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

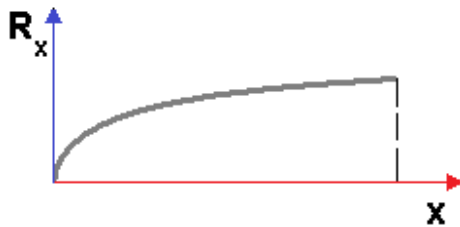
1 собственное значение
(изгиб)



2 собственное значение
(изгиб)



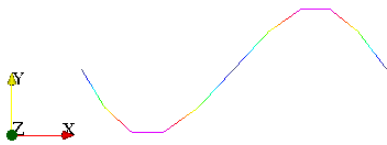
3 собственное значение
(кручение)



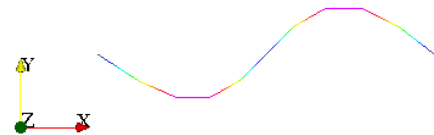
4 собственное значение
(растяжение)



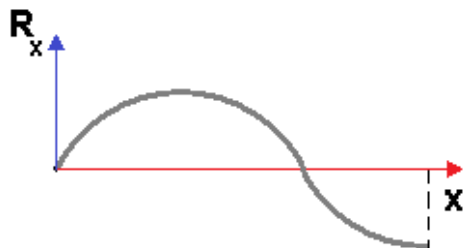
5 собственное значение
(изгиб)



6 собственное значение
(изгиб)



7 собственное значение
(кручение)



Тест 3.2.8: Собственные частоты креста в плоскости

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, "Pin-Ended Cross: In-Plane Vibration", Test No FV1.

Решается задача о нахождении собственных частот креста в плоскости.

Геометрическая модель:

- Длина стержней: $L = 10$ м
- Сечение: квадрат, длина ребра $a = 0.125$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = 0$ в точках A, B, C и D
- $U_z = R_x = R_y = 0$ во всех узлах сетки

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.29$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³

Сетка:

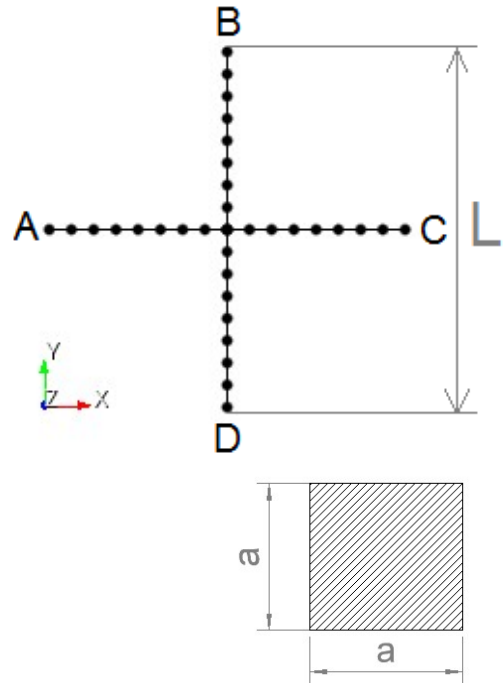
- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
- 32 элемента (по 16 элементов на каждой балке)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 8)

Анализ результатов

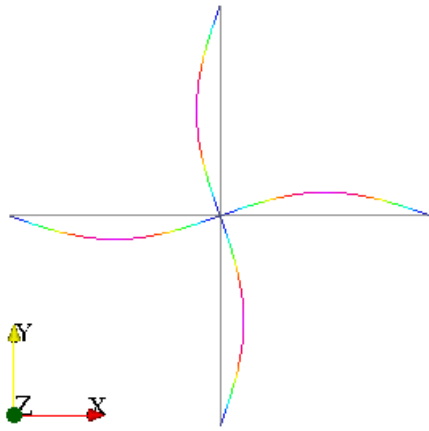
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN [6]:



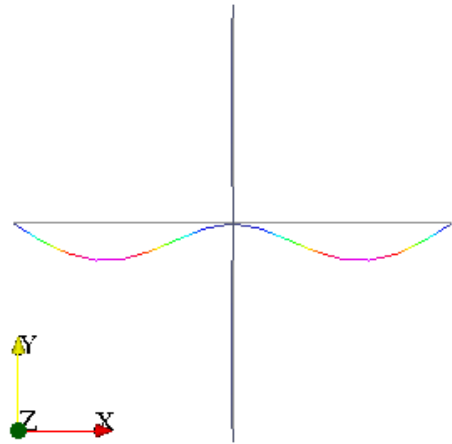
№	NAFEMS	FIDESYS		NASTRAN	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка	Значение, Гц	Ошибка
1	11.34	11.34	0.0%	11.34	0.0%
2, 3	17.71	17.68	0.2%	17.69	0.1%
4	17.71	17.71	0.0%	17.72	0.1%
5	45.35	45.36	0.0%	45.52	0.4%
6, 7	57.39	57.10	0.5%	57.43	0.1%
8	57.39	57.41	0.0%	57.75	0.6%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

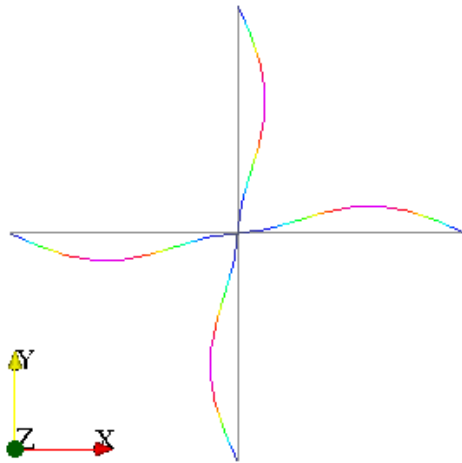
1 собственное значение



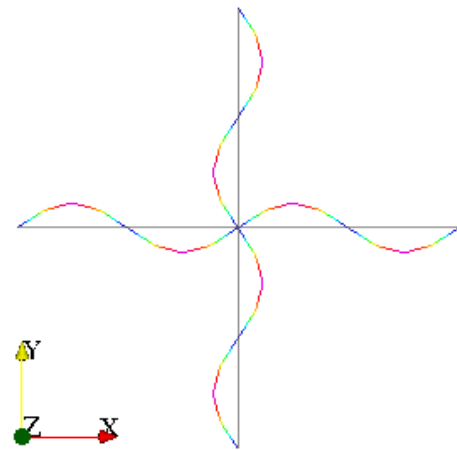
2, 3 собственные значения



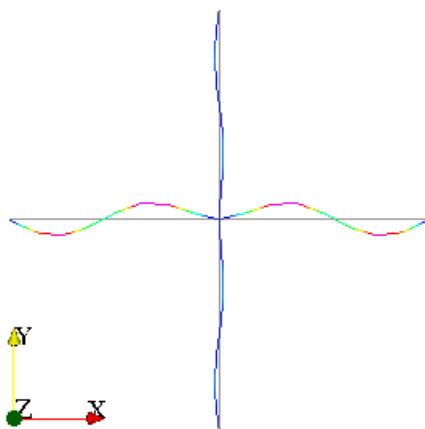
4 собственное значение



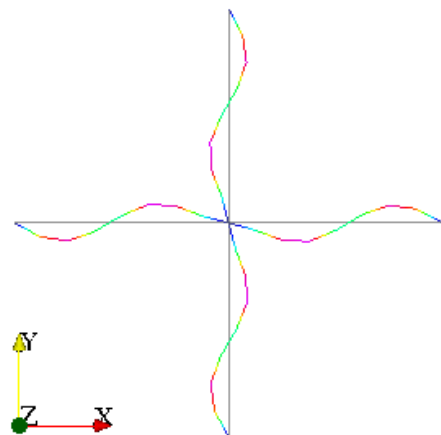
5 собственное значение



6, 7 собственные значения



8 собственное значение



Тест 3.2.9: Собственные частоты двойного креста в плоскости

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, "Pin-Ended Double Cross: In-Plane Vibration", Test No FV2.

Решается задача о нахождении собственных частот двойного креста в плоскости, концы которого жёстко закреплены.

Геометрическая модель:

- Длина стержней: $L = 10$ м
- Сечение: квадрат, длина ребра $a = 0.125$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = 0$ в точках A, B, C, D, E, F, G и H
- $U_z = 0$ во всех узлах сетки

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 8000$ кг/м³

Сетка:

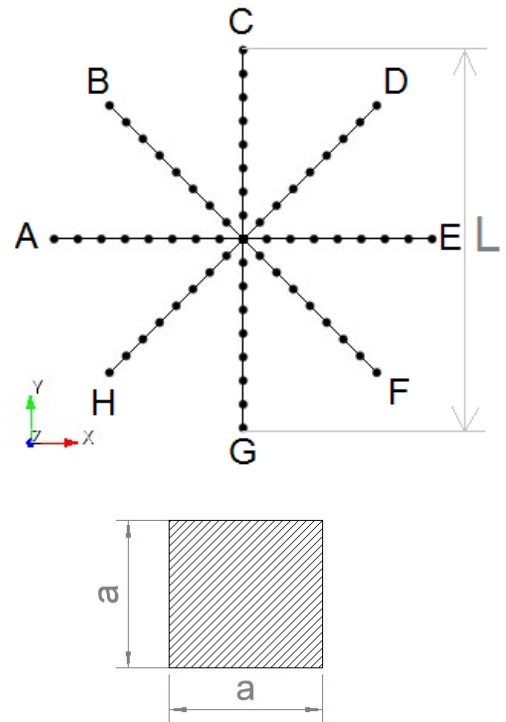
- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
- 64 элемента (по 16 элементов на каждой балке)

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 1 по 16)

Анализ результатов

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ABAQUS⁴⁸, NASTRAN [6], CATIA [7] и AUTODESK SIMULATION [13]:

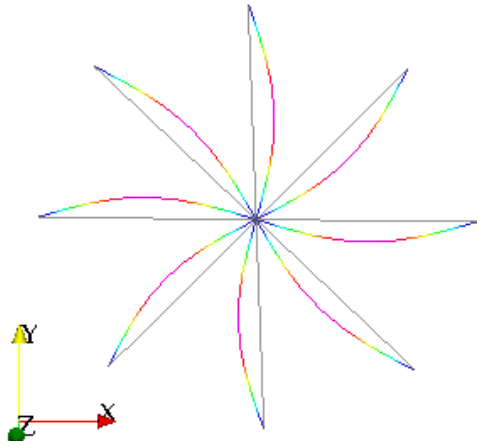


№	NAFEMS	FIDESYS		ABAQUS		NASTRAN		CATIA		AUTODESK	
	Знач., Гц	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка	Знач., Гц	Ошибка
1	11.34	11.34	0.0%	11.34	0.0%	11.34	0.0%	11.34	0.0%	11.33	0.1%
2, 3	17.71	17.68	0.2%	17.68	0.2%	17.69	0.1%	17.69	0.1%	17.63	0.4%
4 - 8	17.71	17.71	0.0%	17.71	0.0%	17.72	0.1%	17.72	0.0%	17.66	0.3%
9	45.35	45.36	0.0%	45.36	0.0%	45.52	0.4%	45.48	0.3%	44.88	1.0%
10, 11	57.39	57.10	0.5%	57.10	0.5%	57.43	0.1%	57.36	0.0%	55.77	2.8%
12 - 16	57.39	57.41	0.0%	57.41	0.0%	57.75	0.6%	57.68	0.5%	56.05	2.3%

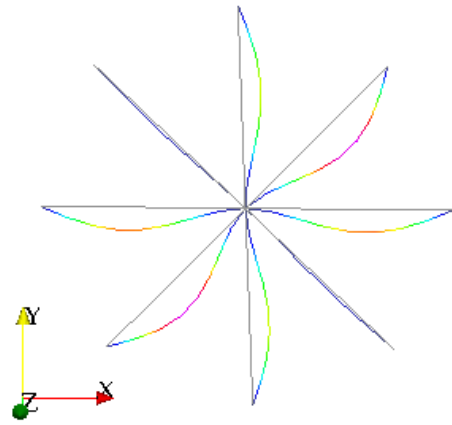
⁴⁸ Анализ проводился на линейной двухузловой сетке (тип элемента B31, количество элементов 64).

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

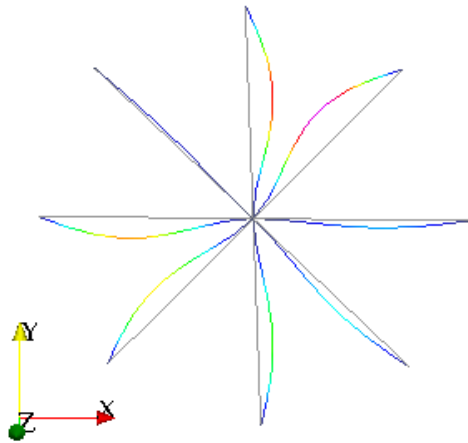
1 собственное значение



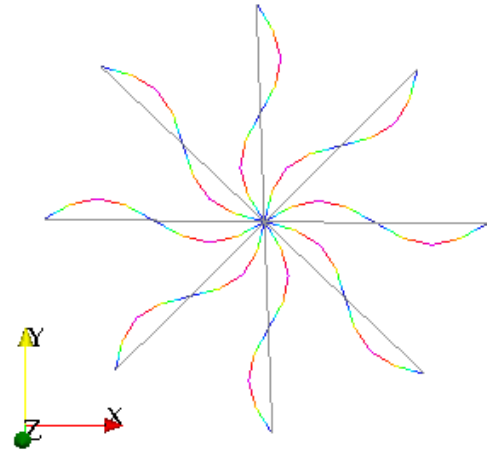
2, 3 собственные значения



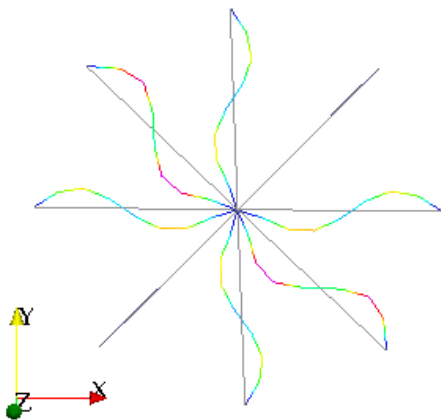
4-8 собственные значения



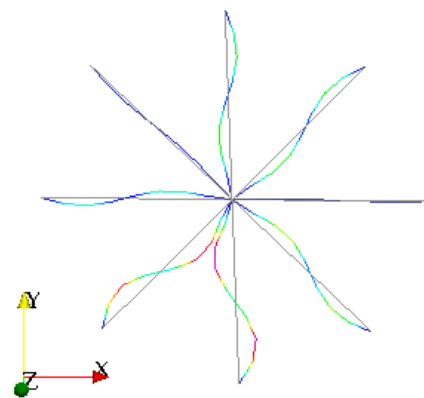
9 собственное значение



10, 11 собственные значения



12-16 собственные значения



Тест 3.2.10: Собственные частоты кругового кольца

Societe Francaise des Mecaniciens, Guide de validation des progiciels de calcul de structures, (Paris, Afnor Technique, 1990.) Test No. SDLL11/89

Решается задача о нахождении собственных частот кругового кольца, закреплённого в трёх точках.

Геометрическая модель:

- Размеры кольца: $R = 0.1$ м
- Сечение: прямоугольник, $a = 0.005$ м, $b = 0.010$ м

Граничные условия:

- $U_x = U_y = 0$ в точках А, В и С

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 72$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Плотность $\rho = 2700$ кг/м³

Сетка:

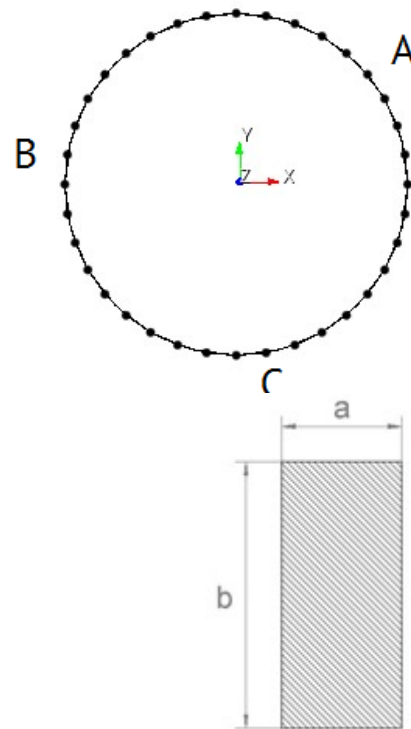
- Линейные балки Beam2 (теория Эйлера-Бернулли)
- 36 элементов

Критерий прохождения теста:

- Сравнение собственных частот (с 4 по 11)

Анализ результатов

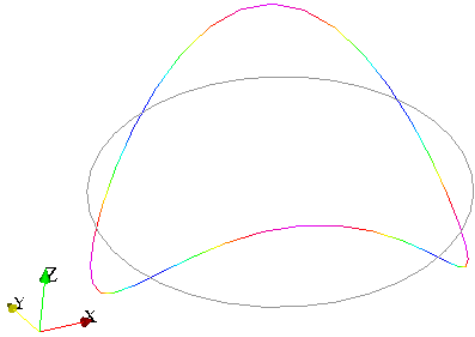
- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS на балочных элементах (Beam2) в сравнении с известным численным решением:



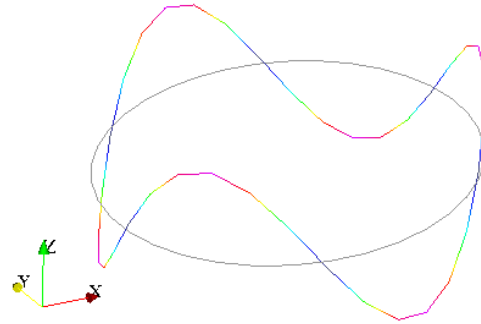
№	Известное решение	FIDESYS	
	Значение, Гц	Значение, Гц	Ошибка
4, 5	318.36	320.84	0.8%
6, 7	900.46	904.77	0.5%
8, 9	1726.55	1732.78	0.4%
10, 11	2792.21	2801.07	0.3%

- На картинках ниже представлена деформированная модель в зависимости от собственного значения:

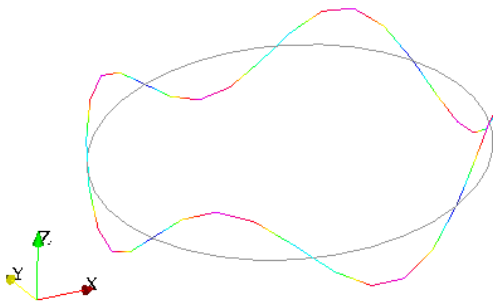
4, 5 собственные значения



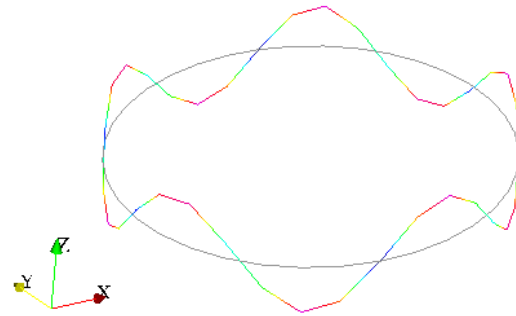
6, 7 собственные значения



8, 9 собственные значения



10, 11 собственные значения



Нелинейные задачи

Тесты с точным аналитическим решением

Тест 4.1.1. Большие перемещения квадратной мембраны

Квадратная мембрана, опертая шарнирно по контуру, нагружена по всей поверхности равномерно распределенным давлением интенсивности q . Края мембраны неподвижны

Геометрическая модель:

- Размеры мембраны: $10 \times 10 \text{ м}^2$
- Толщина мембраны: 0.001 м

Граничные условия:

- По краям мембраны отсутствуют перемещения
- На верхней поверхности равномерно распределенная нагрузка $q = -10 \text{ кН/м}^2$

Параметры материала:

- Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$

Сетка:

- 8-узловые гексаэдры Hex8 (409 600 элементов).

Критерий прохождения теста:

- Перемещения u_z в точке (0,0,0) равно -0.2262 м с точностью 1.5%
- Напряжение σ_x в точке (0,0,0) равно $3.47932 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$ с точностью 1.5%

Значения вычислены по формулам [27]:

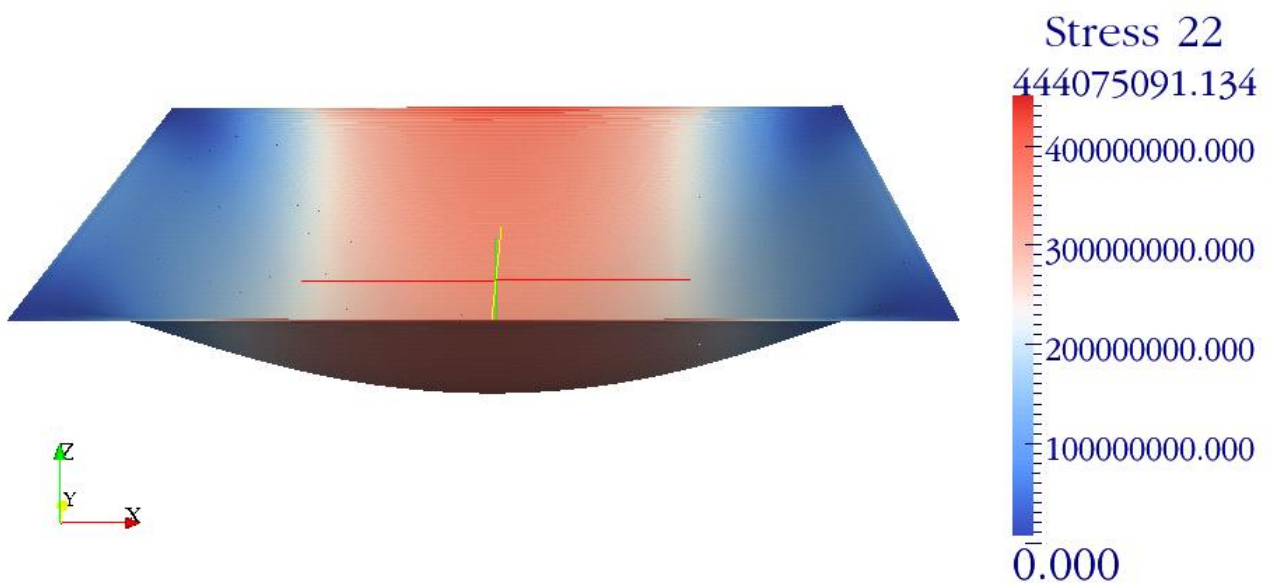
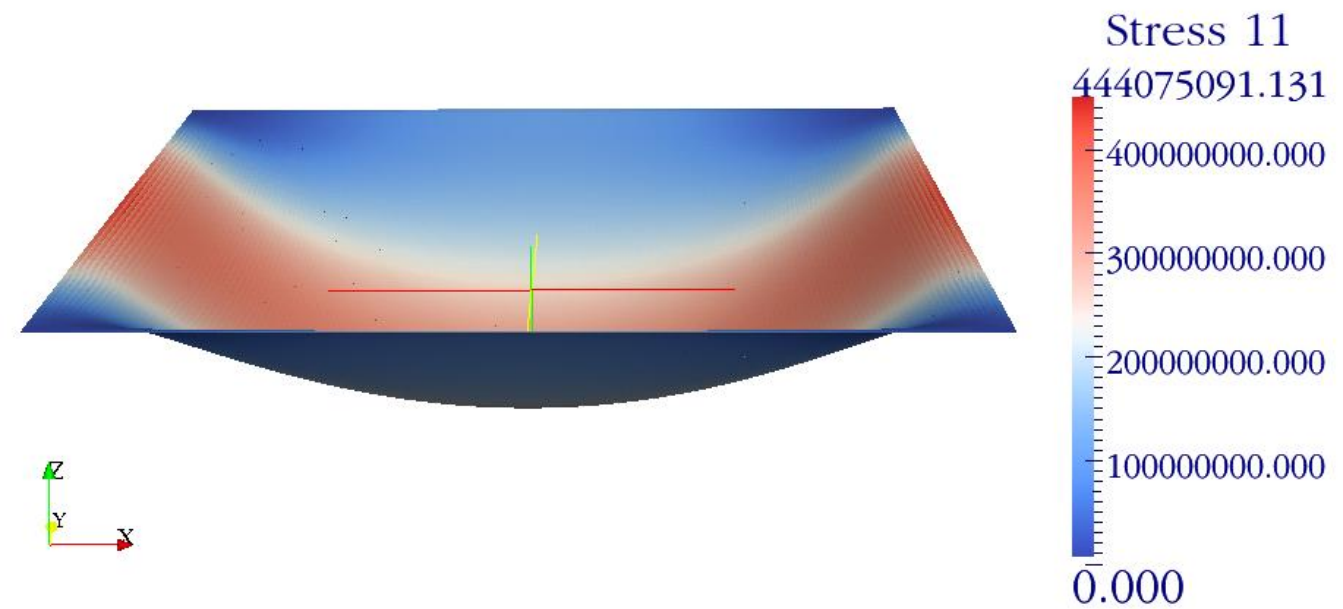
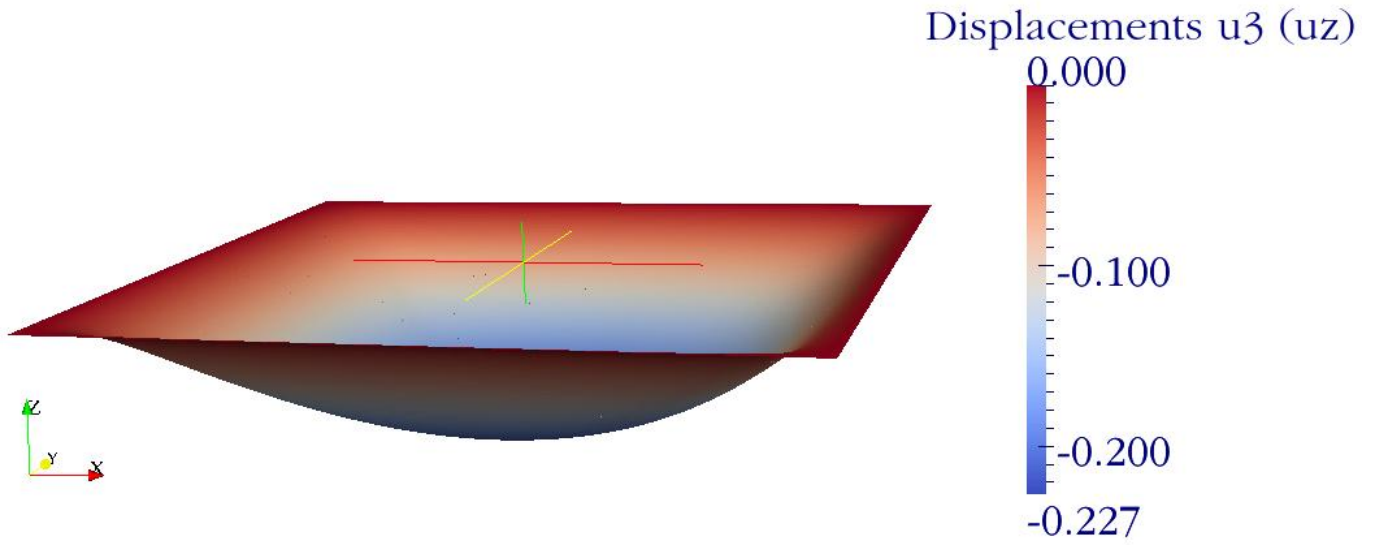
$$u_z = 0.285h^3 \sqrt{(b/h)^4 q/E},$$

$$\sigma_x = \sigma_y = 3.4E(w/b)^2.$$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS:

Величина	Теоретическое значение	FIDESYS (HEX8)	
		Значение	Погрешность
$u_z, \text{ м}$	-0.2262	-0.229	1.23%
$\sigma_x, \text{ Па}$	$3.47932 \cdot 10^8$	$3.2825 \cdot 10^8$	5.7%



Тест 4.1.2. Полый шар под действием давления

Рассматривается упруго-пластическое равновесие полого шара, испытывающего внутреннее давление. В силу симметрии выделяется сегмент шара, расположенный в первом октанте.

Геометрическая модель:

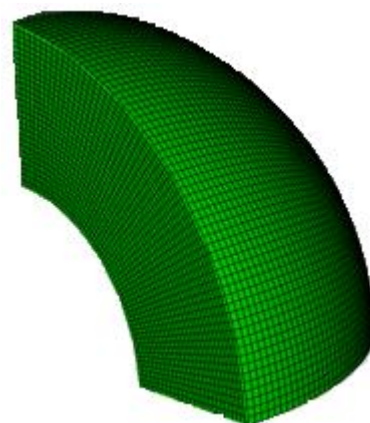
- Внутренний радиус шара: $a = 2.5$ м
- Внешний радиус шара: $b = 5$ м

Граничные условия:

- На координатных плоскостях перемещения по перпендикулярам равны нулю
- На внутренней поверхности приложено давление $p = 30$ Па.

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 21 \cdot 10^3$ Н/м²
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Предел текучести $\sigma_y = 24$ Н/м²



Сетка:

- Три типа конечных элементов (три отдельных теста):
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (128 304 элемента)
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (7 280 элементов)
 - 10-узловые тетраэдры TETRA10 (68 547 элементов)
- Спектральные элементы (один тест):
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (7 280 элементов)

Критерий прохождения теста (в сферической системе координат) [29]:

- В точках пластической зоны с радиальной координатой $r = 3$:
 - напряжение $\sigma_{rr} = -21.249$ Па с точностью 1%,
 - напряжение $\sigma_{\phi\phi} = 2.751$ Па с точностью 1%,
 - перемещения $u_r = 4.219 \cdot 10^{-3}$ с точностью 1%.
- В точках упругой зоны с радиальной координатой $r = 4.5$:
 - напряжение $\sigma_{rr} = -2.908$ Па с точностью 1%,
 - напряжение $\sigma_{\phi\phi} = 13.189$ Па с точностью 1%,
 - перемещения $u_r = 2.165 \cdot 10^{-3}$ с точностью 1%.

Напряженно-деформированное состояние определено по формулам [29]:

- В пластической зоне ($a \leq r \leq c$)

$$\sigma_{rr}(r) = 2\sigma_y \ln(r/a) - p, \quad \sigma_{\phi\phi} = \sigma_{rr}(r) + \sigma_y,$$

$$\varepsilon_{rr} = \psi(r) \cdot (\sigma_{rr}(r) - \sigma(r)) + k \cdot \sigma(r), \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \psi(r) \cdot (\sigma_{\phi\phi}(r) - \sigma(r)) + k \cdot \sigma(r),$$

$$u_{plast} = \varepsilon_{\phi\phi} \cdot r$$

где $\psi(r) = -2k + \left(\frac{1}{2G} + 2k\right) \cdot \left(\frac{c}{r}\right)^3$, $k = \frac{1-2\nu}{E}$, $\sigma(r) = \frac{1}{3}(\sigma_{rr}(r) + 2\sigma_{\phi\phi}(r))$,

c – граница пластической зоны, находящейся из уравнения

$$\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 = \frac{p}{2\sigma_y} - \frac{1}{3}$$

- В упругой зоне ($c \leq r \leq b$)

$$\sigma_{rr}(r) = p^* \cdot (1 - (b/r)^3), \quad \sigma_{\phi\phi}(r) = p^* \cdot (1 + b^3/(2r^3))$$

$$\varepsilon_{rr} = du_{elastic}/dr, \quad \varepsilon_{\phi\phi} = u_{elastic}/r,$$

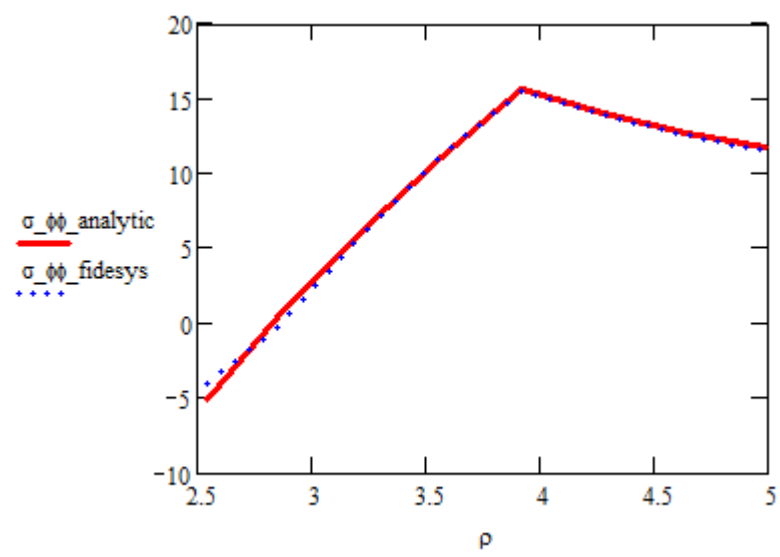
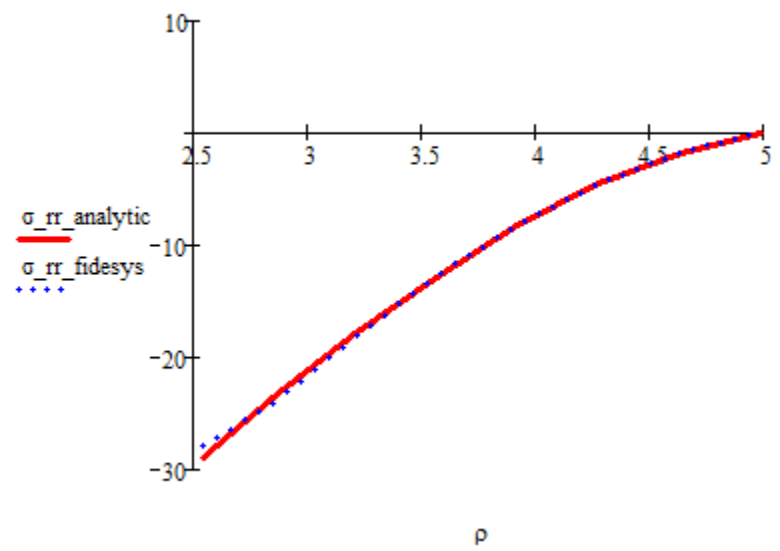
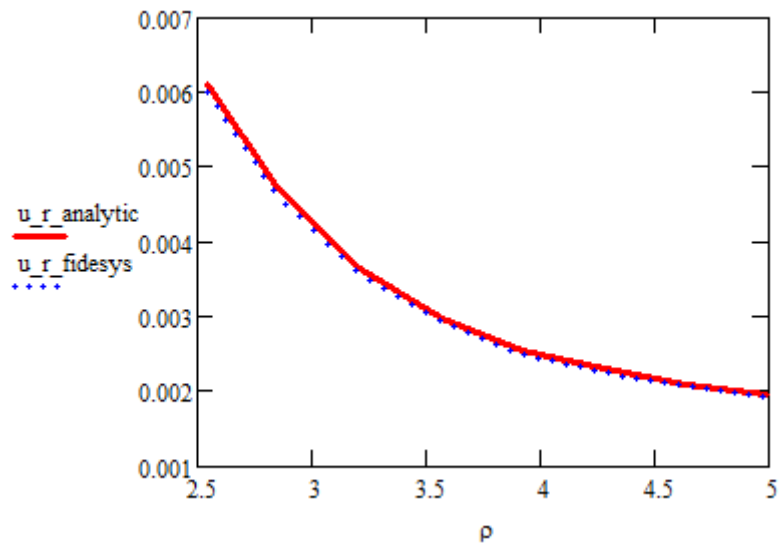
где $p^* = (p - 2\sigma_y \ln(c/a)) \cdot \left(\frac{c^3}{b^3 - c^3}\right)$, $u_{elastic} = p^* \cdot \left(k + \frac{b^3}{4Gr^3}\right)$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS.

Тип элемента		Радиальная координата, м					
		3			4.5		
		u_r , м	σ_{rr} , Па	$\sigma_{\phi\phi}$, Па	u_r , м	σ_{rr} , Па	$\sigma_{\phi\phi}$, Па
Hex8	Значение	4.2×10^{-3}	-21.19	2.82	2.155×10^{-3}	-2.8	13.17
	Погрешность	0.45%	0.28%	2.51%	0.46%	3.71%	0.14%
Hex20	Значение	4.13×10^{-3}	-21.29	2.71	2.13×10^{-3}	-2.85	12.97
	Погрешность	2.11%	0.19%	1.49%	1.62%	1.99%	1.67%
Hex27	Значение	4.14×10^{-3}	-21.27	2.73	2.13×10^{-3}	-2.851	13
	Погрешность	1.87%	0.1%	0.76%	1.62%	1.96%	1.43%
Tetra10	Значение	4.2×10^{-3}	-21.21	2.78	2.16×10^{-3}	-2.902	13.18
	Погрешность	0.45%	0.18%	1.02%	0.23%	0.21%	0.07%

- На следующих рисунках приведены зависимости характеристик напряженно-деформированного состояния полого шара, нагруженного внутренним давлением, от радиуса (решение fidesys для сетки с элементом Hex27)





Тесты с известным численным решением

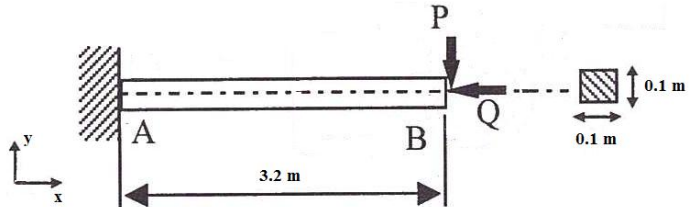
Тест 4.2.1. Изгиб консольной балки

NAFEMS Background to Finite Element Analysis of Geometric Non-linearity Benchmarks, "Straight cantilever benchmark"

Решается задача о статическом нагружении консольной балки, закрепленной на левом торце, сила прикладывается на правом торце.

Геометрическая модель:

- Длина балки $L=3.2$ м
- Сечение балки – квадрат 0.1×0.1 м²



Граничные условия:

- Жесткая заделка (нулевые перемещения и углы поворота вдоль всех осей) в поперечном сечении, соответствующем точке А
- Силы, приложенные на правом торце, соответствующем точке В: $Q=-3.844 \cdot 10^6$ Н, $P=-3.844 \cdot 10^4$ Н

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210 \cdot 10^9$ Н/м²
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0$

Сетка:

- Четыре типа элементов (четыре различных теста):
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (33 100 элементов). МКЭ
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (33 100 элементов). МКЭ
 - 27-узловые гексаэдры Hex27s (4 000 элементов). МСЭ: 2-ой порядок.
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (364 005 элементов). МКЭ

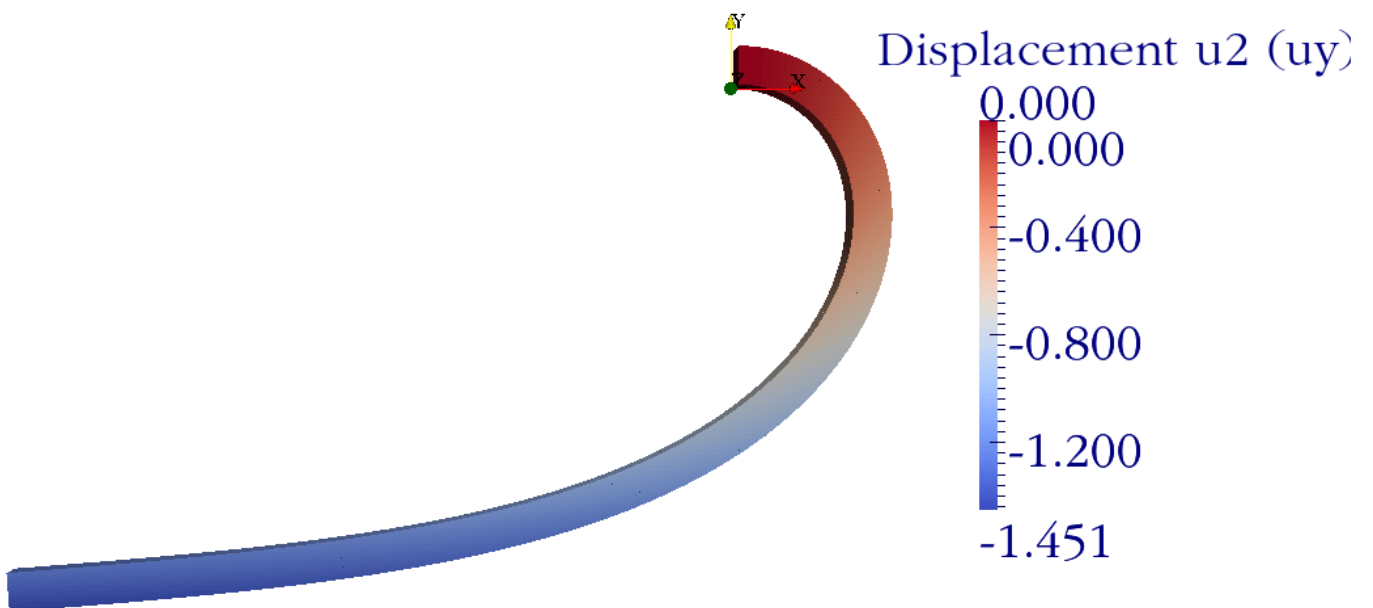
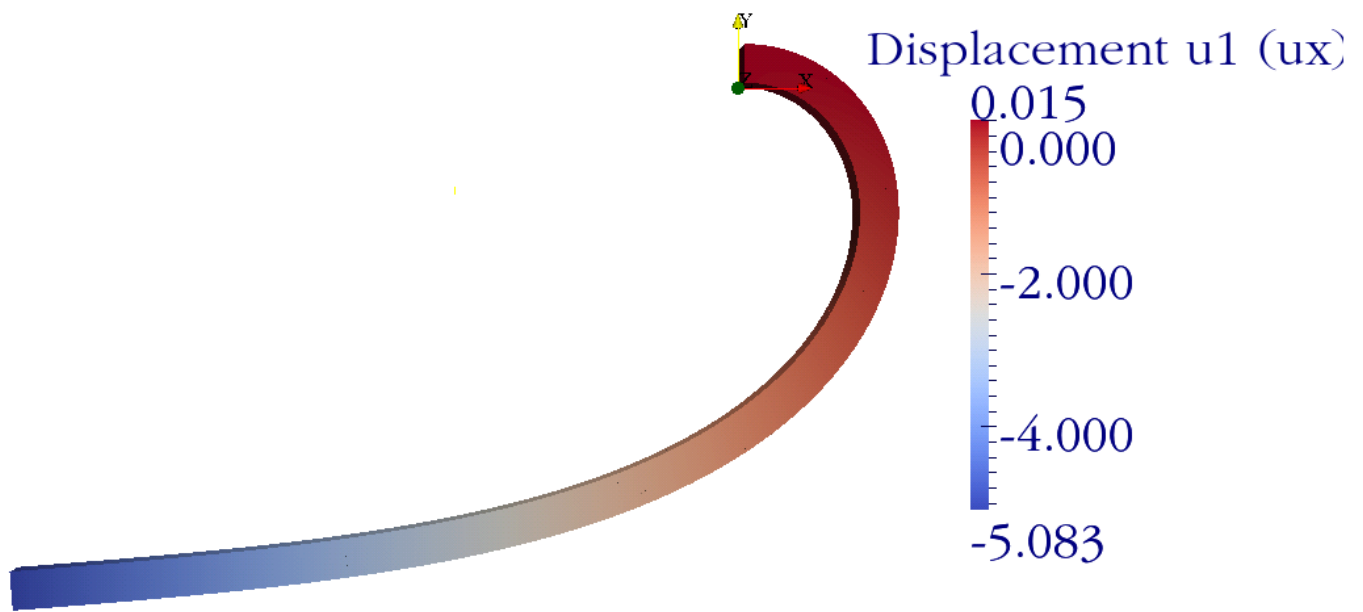
Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке $(3.2, 0, 0)$ равно -5.07 м с точностью 1.5%
- Перемещение u_y в точке $(3.2, 0, 0)$ равно -1.34 м с точностью 1.5%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS:

Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ FIDESYS							
		Hex8		Hex20		Hex27		Tetra4	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{x,M}$	-5.07	-5.0786	0.17%	-5.082	0.24%	-5.0794	0.19%	-5.0706	0%
$u_{y, M}$	-1.34	-1.3517	0.87%	-1.348	0.6%	-1.349	0.67%	-1.359	1.42%



Тест 4.2.2. Цилиндр, нагруженный внутренним давлением (a)

«Pressurised cylinder plasticity benchmark» NAFEMS Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks

Рассматривается задача о нагружении полого цилиндра внутренним давлением. Верхний/нижний торцы цилиндра могут иметь только радиальные перемещения. Приводятся результаты в рамках модели идеальной пластичности.

Геометрическая модель:

- Внутренний радиус $R_1 = 100$ мм
- Внешний радиус $R_2 = 200$ мм
- Высота $H = 100$ мм

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 21 \times 10^3$ Н/мм²
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Предел текучести $\sigma_y = 24$ Н/мм²

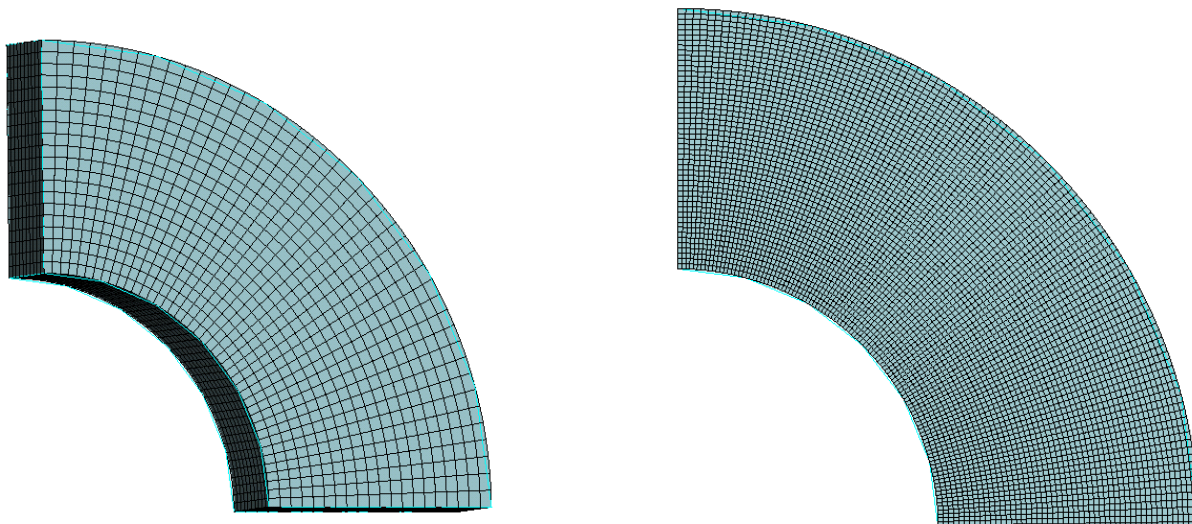
Граничные условия:

- Верхняя/нижняя поверхности цилиндра закреплены по нормали к ним
- Производится нагружение внутренней поверхности цилиндра давлением P в соответствии с путем нагружения, характеризуемого следующими шагами

Номер шага	1	2	3
P (Н/мм ²)	10	14	16.6

Сетка:

- Два типа конечных элементов:
 - 20-узловые гексаэдры Hex27 (1 100 элементов)
 - 8-узловые четырехугольники Quad8 (5 400 элементов), плоско-деформированное состояние.



Критерий прохождения теста:

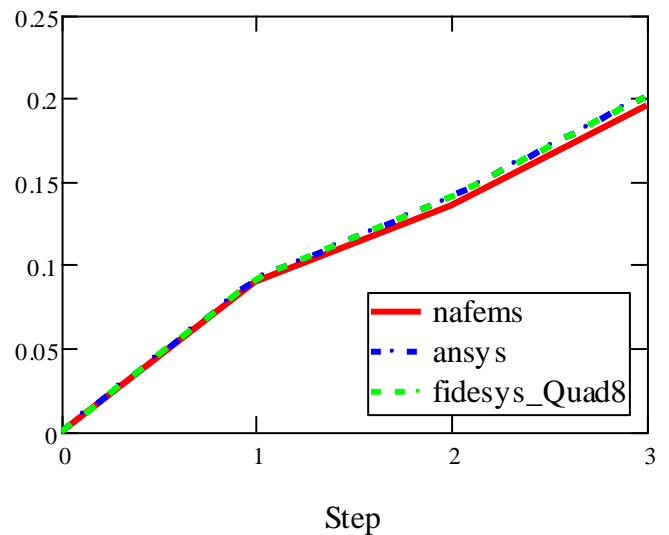
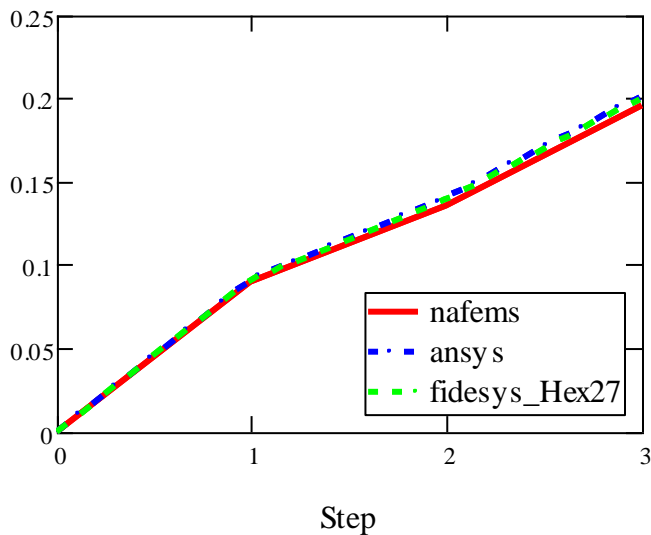
- На внутренней поверхности цилиндра наблюдается радиальное перемещение радиальное перемещение u_r , в точках с радиусом 109.09 характеристики напряженного состояния (s_{rr} , $s_{\varphi\varphi}$, s_{zz} - компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат):

№ шага	u_r (мм)	s_{rr} (Н/мм ²)	$s_{\varphi\varphi}$ (Н/мм ²)	s_{zz} (Н/мм ²)
1	0.09	-8	14.5	2
2	0.135	-11.7	16	1.7
3	0.195	-14.5	13.4	0.05

Результаты:

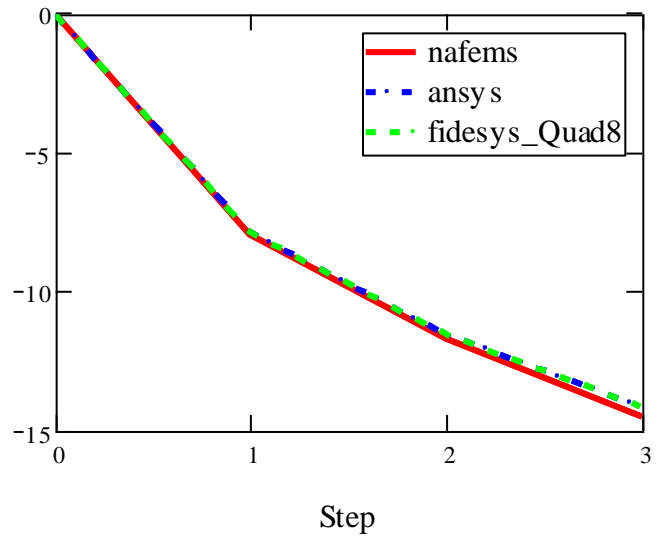
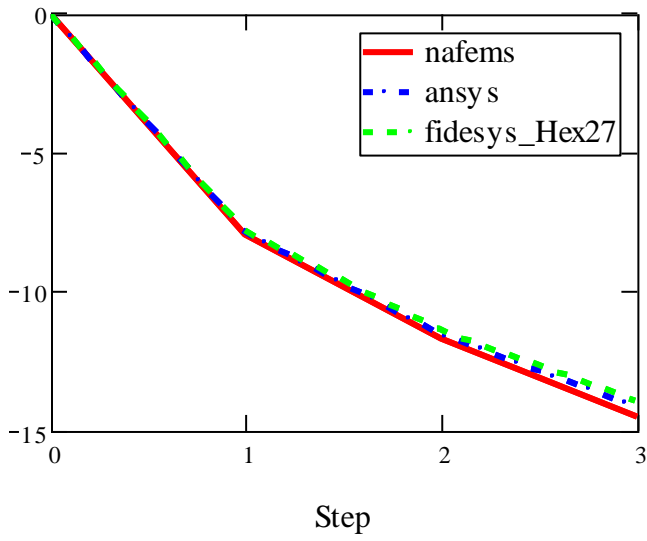
- На следующих графиках приведены зависимости перемещений и напряжений в цилиндрической системе координат от шага нагружения для данных NAFEMS[30], FIDESYS, ANSYS⁴⁹

Перемещение u_r

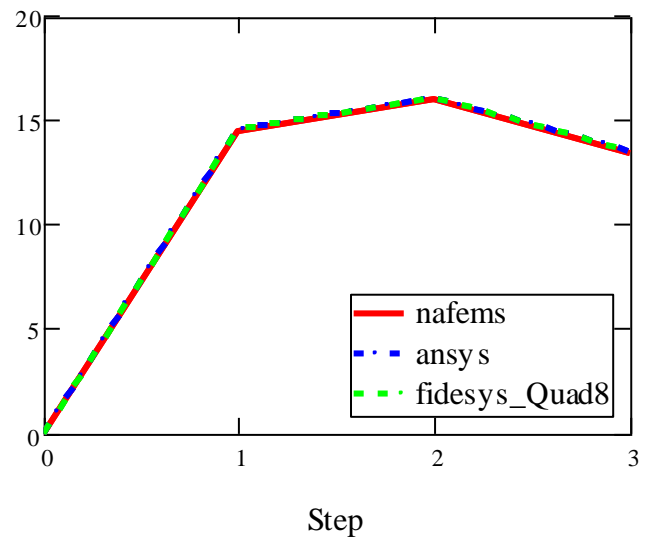
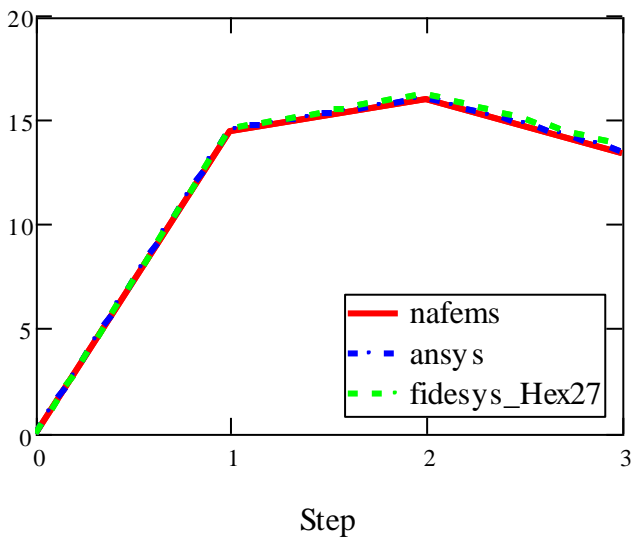


⁴⁹ Проводилось сравнение с расчетом в пакете ANSYS (14 796 элементов solid186 и 5 400 элементов PLANE183)

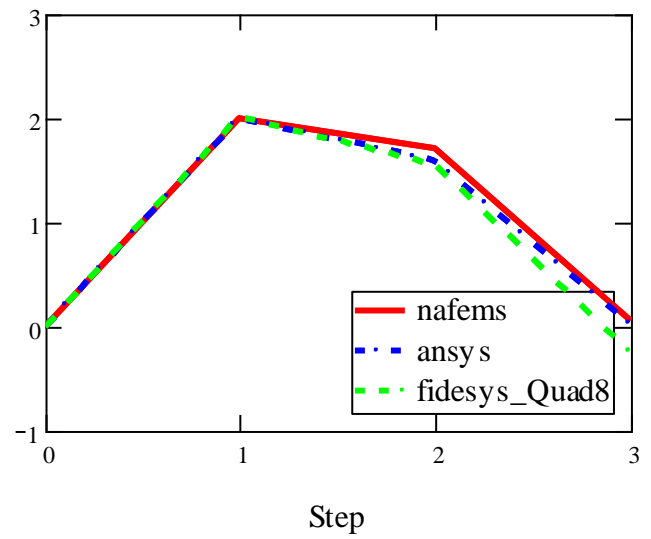
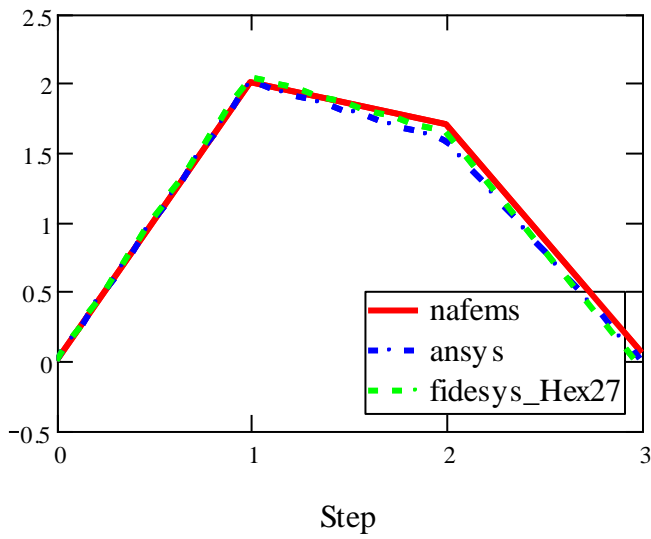
Напряжение s_{rr}



Напряжение $s_{\varphi\varphi}$

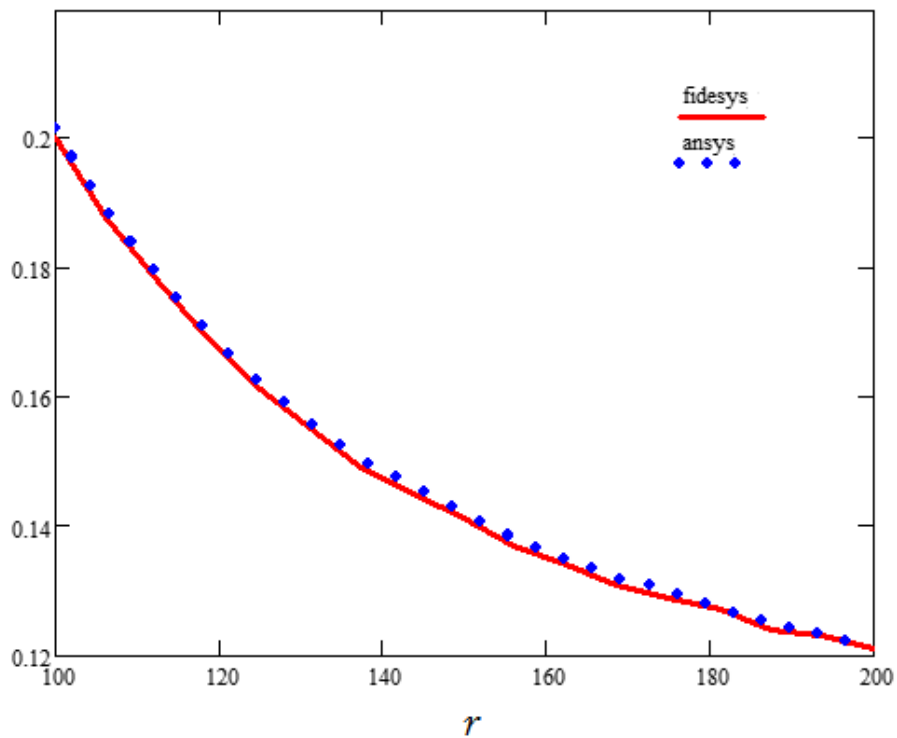


Напряжение s_{zz} :



- На следующем графике приведены зависимости радиальных перемещений от радиальной координаты для шага 3, полученные в пакетах ANSYS и FIDESYS.

Перемещение $u_r(r)$



Тест 4.2.3. Цилиндр, нагруженный внутренним давлением (б)

«Pressurised cylinder plasticity benchmark» NAFEMS Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks

Рассматривается задача о нагружении полого цилиндра внутренним давлением. Верхний/нижний торцы цилиндра могут иметь только радиальные перемещения. Приводятся результаты в рамках модели упруго-пластического материала с упрочнением.

Геометрическая модель:

- Внутренний радиус $R_1 = 100$ мм
- Внешний радиус $R_2 = 200$ мм
- Высота $H = 100$ мм

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 21 \times 10^3$ Н/мм²
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Предел текучести $\sigma_y = 24$ Н/мм²
- (б) Тангенциальный модуль $E_T = 4.2 \times 10^3$ Н/мм²

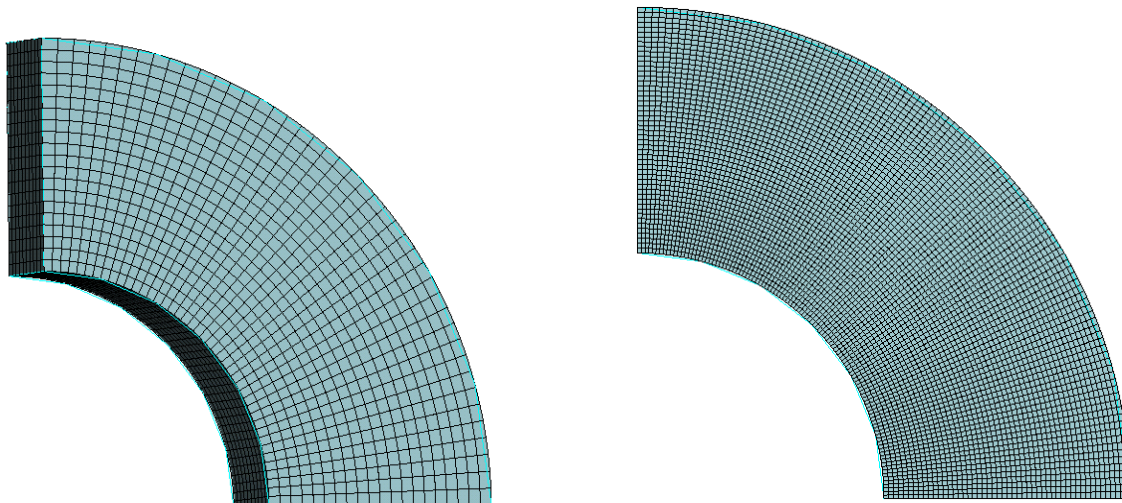
Граничные условия:

- Верхняя/нижняя поверхности цилиндра закреплены по нормали к ним
- Производится нагружение внутренней поверхности цилиндра давлением P в соответствии с путем нагружения, характеризуемого следующими шагами

№ шага	1	2	3	4
P (Н/мм ²)	10	14	24	34

Сетка:

- Два типа конечных элементов (два отдельных теста):
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (4 300 элементов)
 - 8-узловые четырехугольники Quad8 (5 400 элементов), плоско-деформированное состояние.



Критерий прохождения теста:

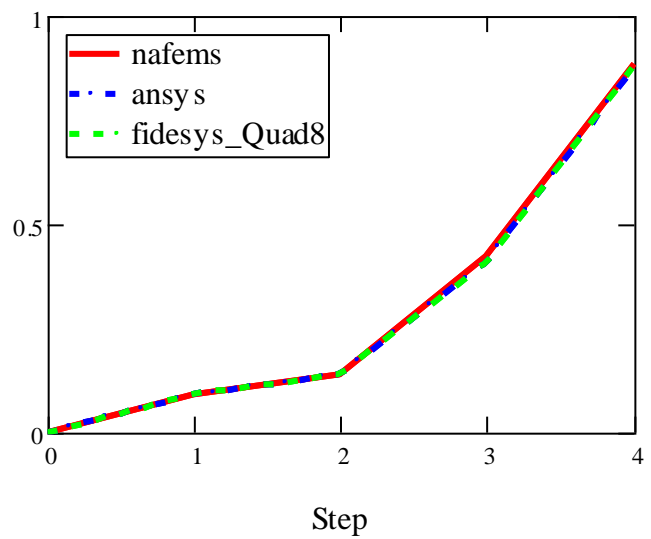
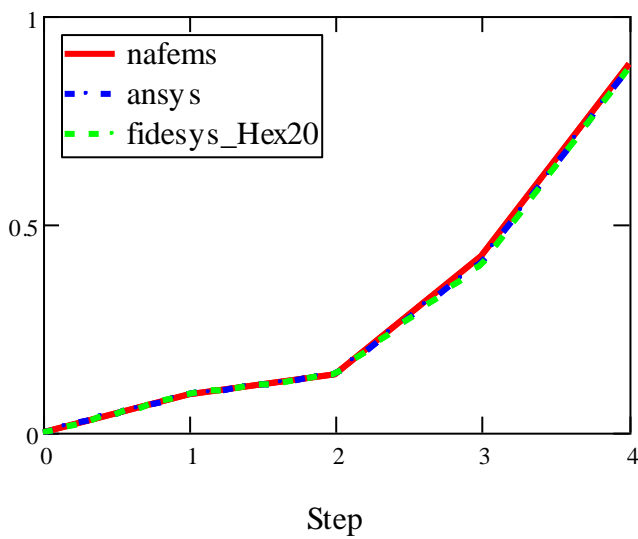
- На внутренней поверхности цилиндра наблюдается радиальное перемещение u_r , в точках с радиусом 109.09 характеристики напряженного состояния (s_{rr} , $s_{\varphi\varphi}$, s_{zz} - компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат):

№ шага	u_r (мм)	s_{rr} (Н/мм ²)	$s_{\varphi\varphi}$ (Н/мм ²)	s_{zz} (Н/мм ²)
1	0.09	-8.1	14.5	2.05
2	0.135	-11.5	17.5	2.1
3	0.42	-19.5	22	1
4	0.88	-27.5	35.7	3.75

Результаты:

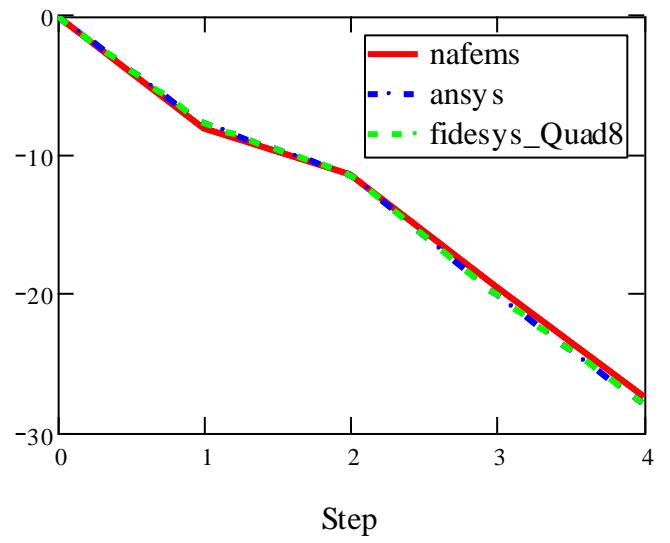
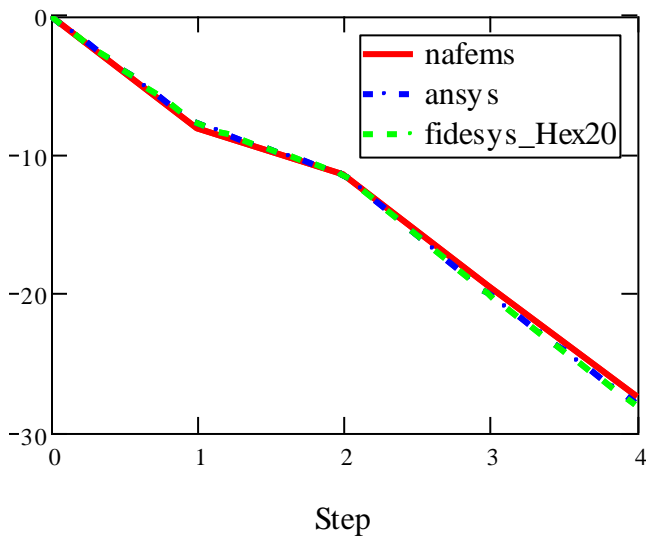
- На следующих графиках приведены зависимости перемещений и напряжений в цилиндрической системе координат от шага нагружения для данных NAFEMS[30], FIDESYS, ANSYS⁵⁰

Перемещение u_r

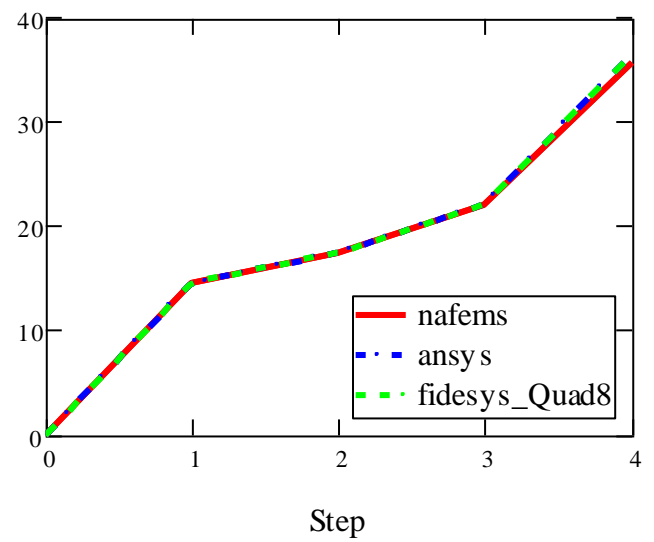
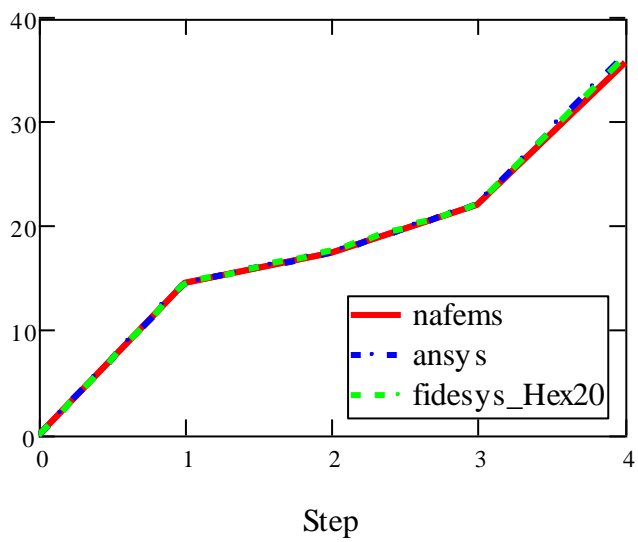


⁵⁰ Проводилось сравнение с расчетом в пакете ANSYS (14 796 элементов solid186 и 5 400 элементов PLANE183)

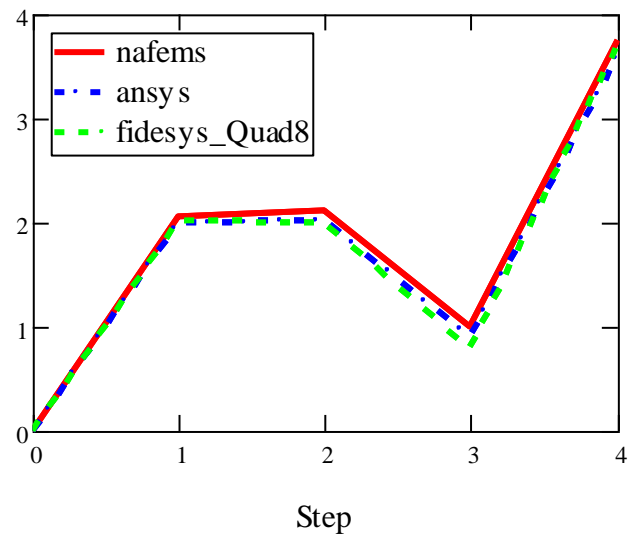
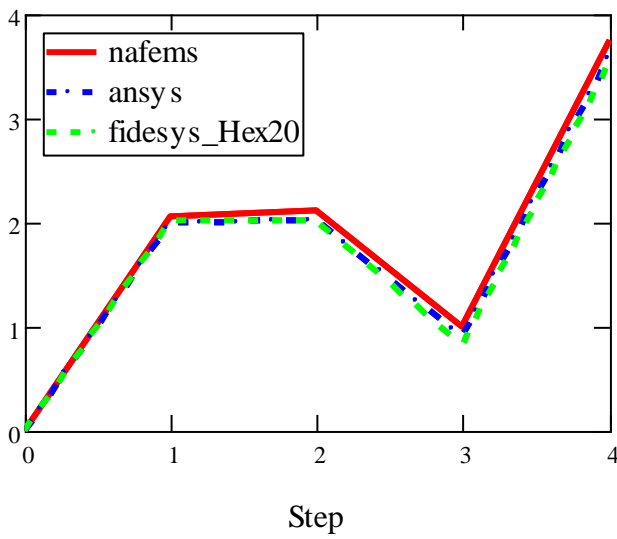
Напряжения s_{rr}



Напряжения $s_{\varphi\varphi}$

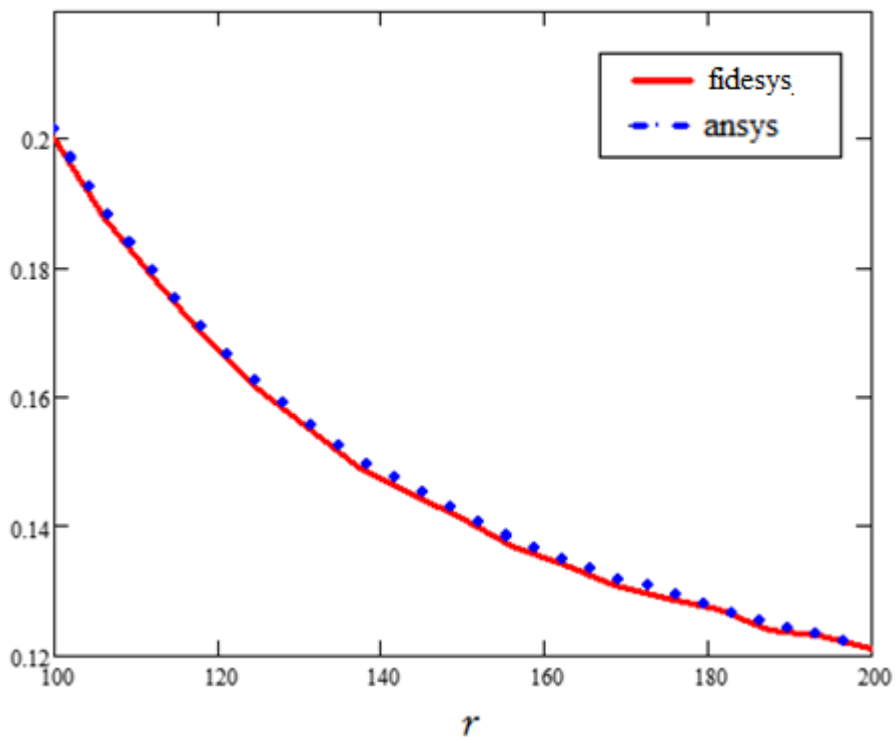


Напряжения s_{zz} :



- На следующем графике приведены зависимости радиальных перемещений от радиальной координаты для шага 4, полученные в пакетах ANSYS и FIDESYS.

Перемещение $u_r(r)$



Тест 4.2.4. Толстостенная труба под действием температурной нагрузки

«Термопрочность деталей машин». Под редакцией И.А. Биргера и Б.Ф. Шорра (далее benchmark)

Рассматривается задача о распределении температурных напряжений в полой цилиндрической трубе с отношением внутреннего радиуса к внешнему, равным 0.5. Установившаяся разница температур между холодной внешней и горячей внутренней поверхностями равна 250 °С. Приводятся результаты в рамках модели идеальной пластичности.

Геометрическая модель:

- Внутренний радиус $R_1 = 0.5$ м
- Внешний радиус $R_2 = 1$ м
- Высота $H = 5$ м

Параметры материала:

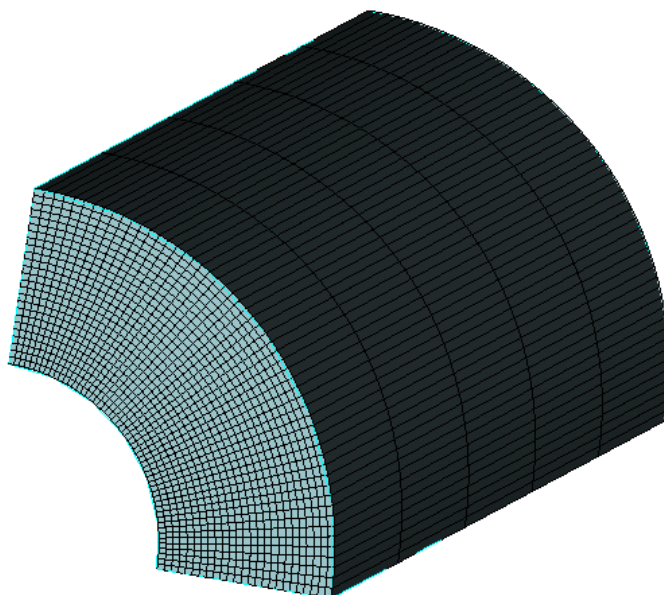
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 1.85 \times 10^4$ Н/м²
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Предел текучести $\sigma_y = 22$ Н/м²
- Коэффициент температурного напряжения $\alpha = 1.72 \times 10^{-5}$ 1/°С

Граничные условия:

- Температура на внутренней поверхности 250 °С
- Температура на внешней поверхности 0 °С
- На торцах отсутствуют перемещения вдоль оси симметрии

Сетка:

- 20-узловые гексаэдры Hex20 (13 500 элементов)
- 27-узловые гексаэдры Hex27s (6 750 элементов) - Спектральные элементы второго порядка



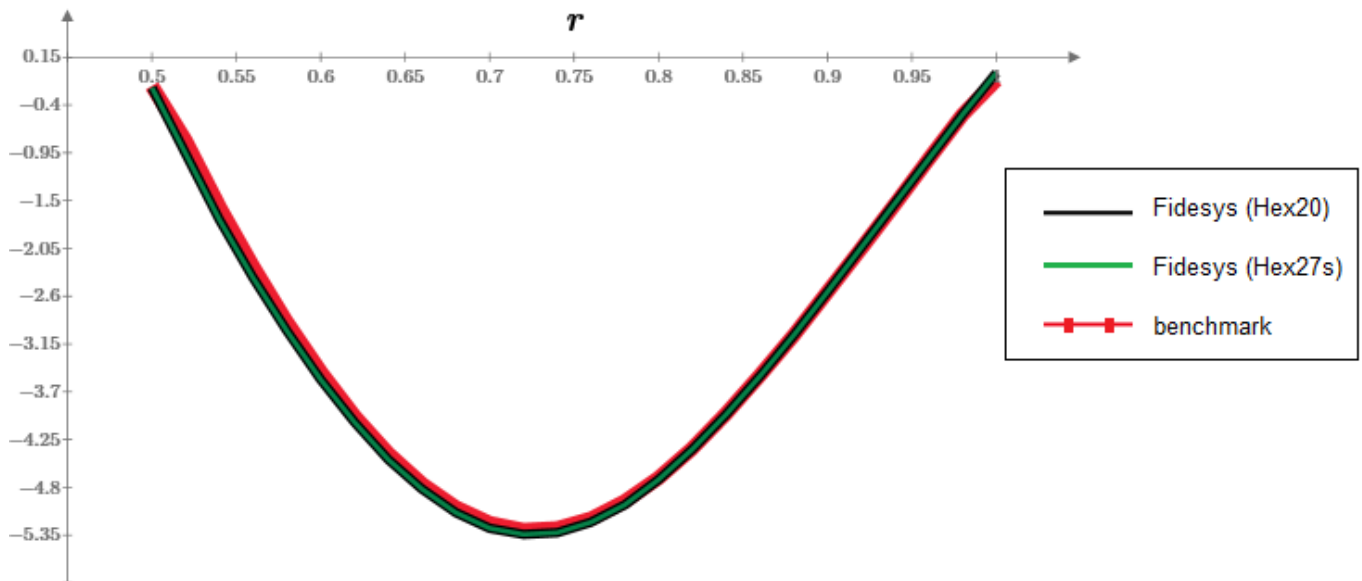
Критерий прохождения теста:

- Малые отличия температурных напряжений, полученных в CAE Fidesys, от приведенных в benchmark

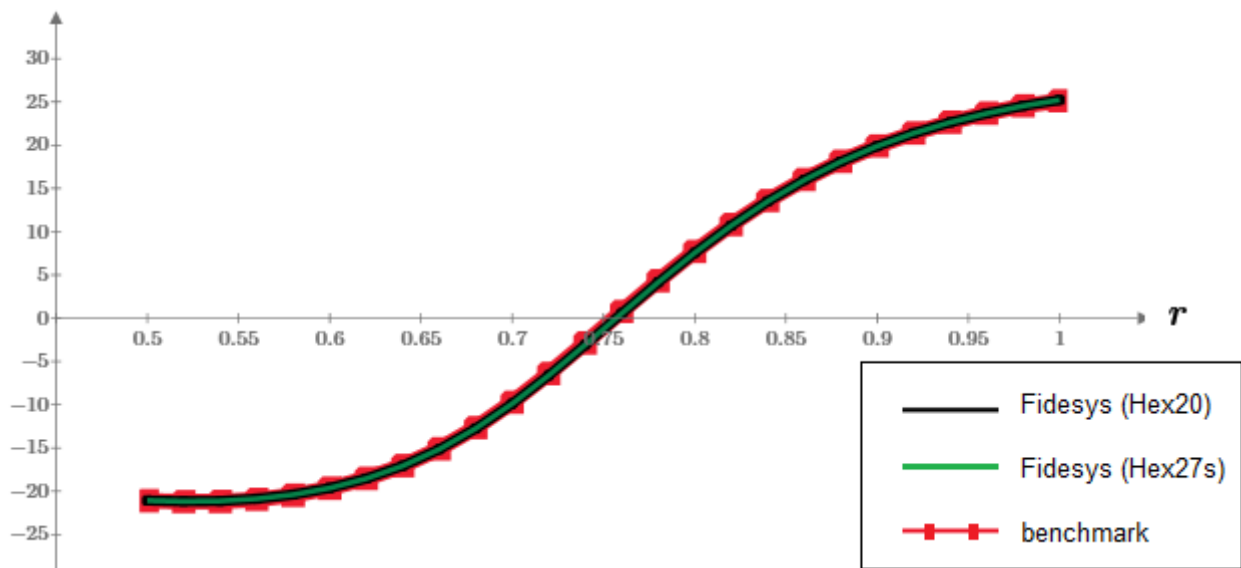
Результаты:

- На следующих графиках показаны зависимости температурных напряжений в цилиндрической системе координат от радиальной координаты

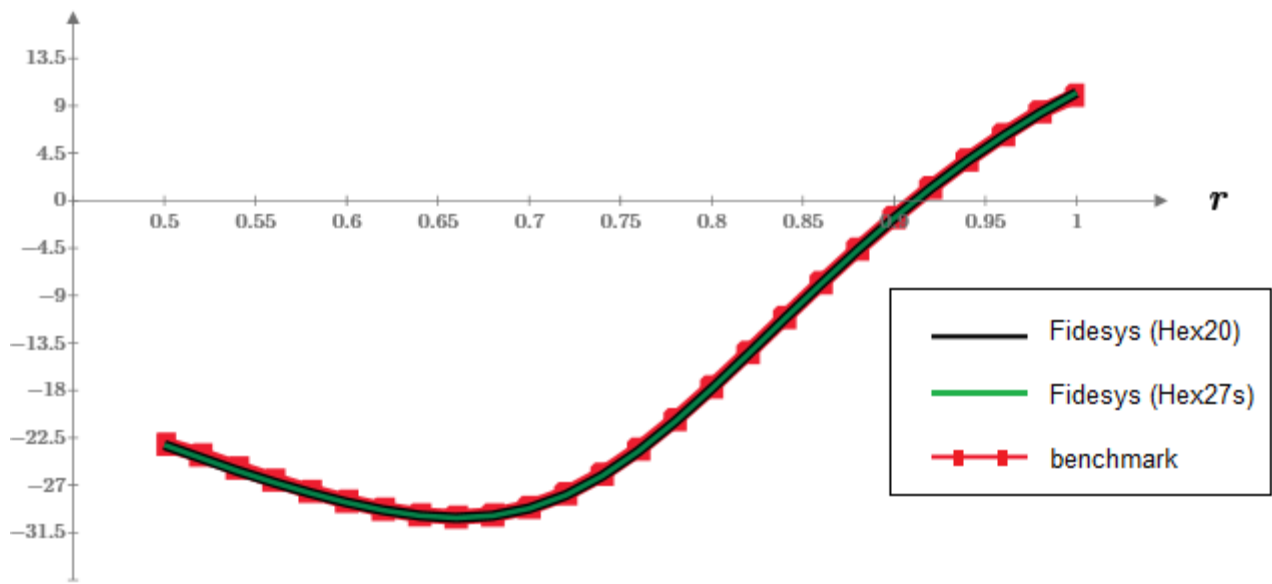
Напряжения s_{rr} :



Напряжения $s_{\varphi\varphi}$:



Напряжения s_{zz} :



Тест 4.2.5. Растяжение ортотропного куба

S.H. Crandall, N.C. Dahl, *An Introduction to the Mechanics of Solids*, Mc-Graw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1959, pg. 225

Решается задача о растяжении тела из ортотропного материала, закрепленного как показано на картинке ниже.

Геометрическая модель:

- Сторона балки $L=1$ in

Граничные условия:

- $F_X=100$ lb
- $F_Y=200$ lb

Параметры материала:

- Ортотропный
- Модули упругости $E_x = 10 \cdot 10^6$ psi, $E_y = 20 \cdot 10^6$ psi, $E_z = 40 \cdot 10^6$ psi
- Главные коэффициенты Пуассона $PR_{xy} = 0.05$, $PR_{xz} = 0.075$, $PR_{yz} = 0.1$
- Модули сдвига $G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 10 \cdot 10^6$ psi

Сетка:

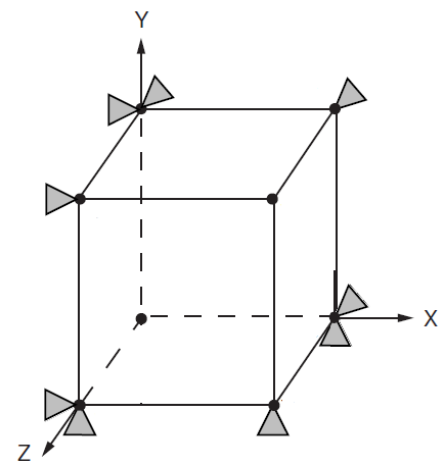
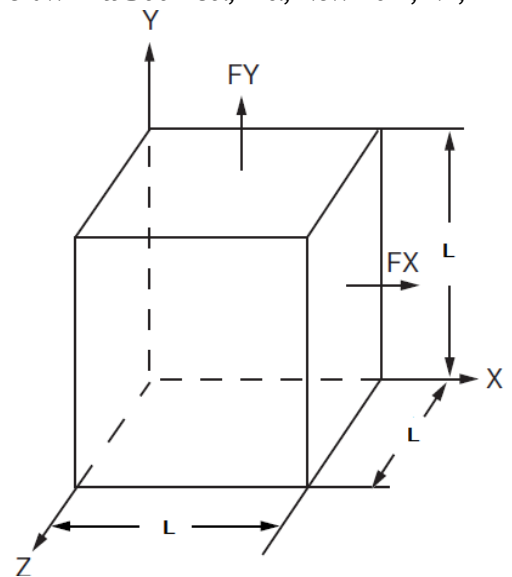
- Три типа конечных элемента (три различных теста):
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (1 элемент)
 - 20-узловые гексаэдры гексаэдры Hex20 (1 элемент)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27s (1 элемент)

Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке (1, 1, 1) равно $0.9 \cdot 10^{-5}$ in с точностью 1%
- Перемещение u_y в точке (1, 1, 1) равно $0.95 \cdot 10^{-5}$ in с точностью 1%
- Перемещение u_z в точке (1, 1, 1) равно $0.175 \cdot 10^{-5}$ in с точностью 1%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS [28]:



Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ							
		FIDESYS						Ansys	
		Hex8		Hex20		Hex27			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_x \cdot 10^{-5}$, in	0.9	0.9	0%	0.9	0%	0.9	0%	0.9	0%
$u_y \cdot 10^{-5}$, in	0.95	0.95	0%	0.95	0%	0.95	0%	0.95	0%
$u_z \cdot 10^{-5}$, in	0.175	0.175	0%	0.175	0%	0.175	0%	0.175	0%

Тест 4.2.6. Цилиндр под давлением. Материал Муни-Ривлина (2D)

J.T. Oden, Finite Elements of Nonlinear Continia, Mc-Graw-Hill Book Co., Inc., New York, NY, 1972, pg. 325-331

Решается задача о нагружении цилиндра из материала Муни-Ривлина, закрепленного из условия симметрии. Задача решается для плоско-деформированного состояния с учетом конечных деформаций.

Геометрическая модель:

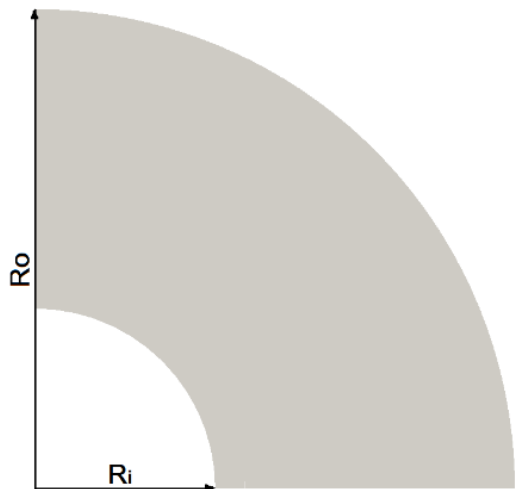
- $R_i=7$ in
- $R_o=18.625$ in

Граничные условия:

- $P=150$ lb

Параметры материала:

- Материал Муни-Ривлина
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.49$
- $C_1 = 80$ psi $C_2 = 20$ psi $D= 5000$ psi



Сетка:

- Два типа конечных элемента (два различных теста):
 - 8-узловые четырехугольники quad8 (220 элементов)
 - 9-узловые четырехугольники quad9 (220 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_r в точке (7, 0, 0) равно 7.180 in с точностью 3%
- Напряжение σ_r в точке (8.16, 0, 0) равно -122 psi с точностью 3%

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS [28]:

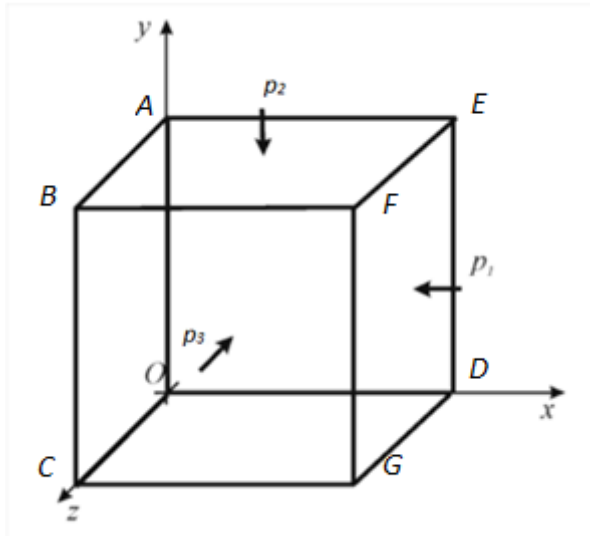
Величина	Критерий прохождения теста	Численный анализ					
		FIDESYS				Ansys	
		QUAD8 300		QUAD9 500			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_r, \text{ in}$	7.180	7.413	3%	7.413	3%	7.491	4.3%
$\sigma_r, \text{ in}$	-122	-122.96	0.8%	-124.44	3%	-122.77	0.6%

Тест 4.2.7. Разрушение куба под действием давления

Г.Г. Болдырев, А.Ю. Муйземнек, И.М. Малышев. Моделирование деформационных процессов в грунтах с использованием программ Ansys и LS-DYNA.

Рассматривается куб с ребром 1 м, три грани которого, принадлежащие координатным плоскостям, закреплены по перпендикулярам к ним. На двух других гранях приложено давление 20 кПа. Определяется, при каком давлении на оставшуюся грань произойдёт разрушение куба. Принимается модель пластичности по Друкеру-Прагеру.

Геометрическая модель:



Параметры материала:

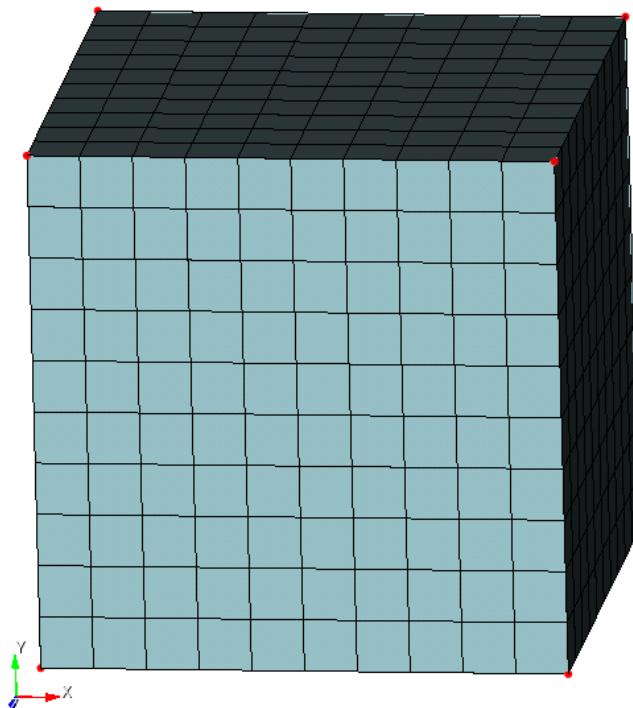
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 5.1 \times 10^8$ Па
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$
- Когезия $c = 11300$ Па
- Угол внутреннего трения $\varphi = 19.1^\circ$

Граничные условия:

- $u_x|_{ABCO} = 0, u_y|_{OCGD} = 0, u_z|_{AODE} = 0$
- $p_1 = p_2 = 20000$ Па

Сетка:

- Гексаэдры Hex8, Hex20 (1000 элементов) - МКЭ
- Гексаэдры Hex27 (64 элемента) - спектральные элементы второго порядка



Критерий прохождения теста:

- В соответствии с аналитическим решением, приведенным в статье, а также расчетом в CAE Ansys, искомое давление p_3 , приложенное к грани $BCGF$, при котором происходит переход в пластическое состояние, составляет 70 кПа.

Результаты:

p_3 - аналитическое решение	Fidesys - hex8, hex20, hex27	
70 кПа	p_3 , значение	p_3 , погрешность
	71 кПа	1.43%

Линейно-упругая устойчивость

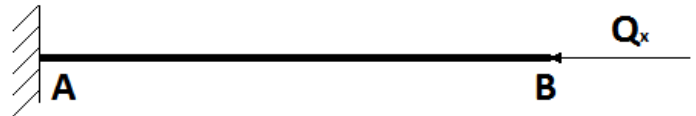
Тесты с точным аналитическим решением

Тест 5.1.1: Устойчивость консольного тела

Рассматривается задача об устойчивости защемленного левым торцом консольного тела под действием осевой нагрузки Q_x .

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $AB=10$ м
- Сечение квадрат 1×1 м



Граничные условия:

- Нулевые перемещения и повороты в точке A
- Нагрузка в точке B в отрицательном направлении оси x Q_x

Параметры материала:

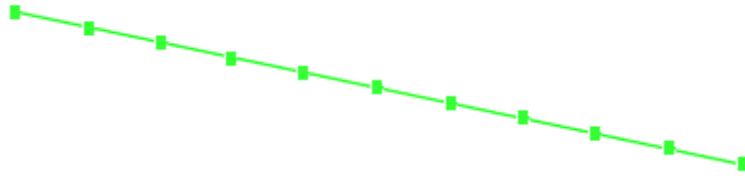
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

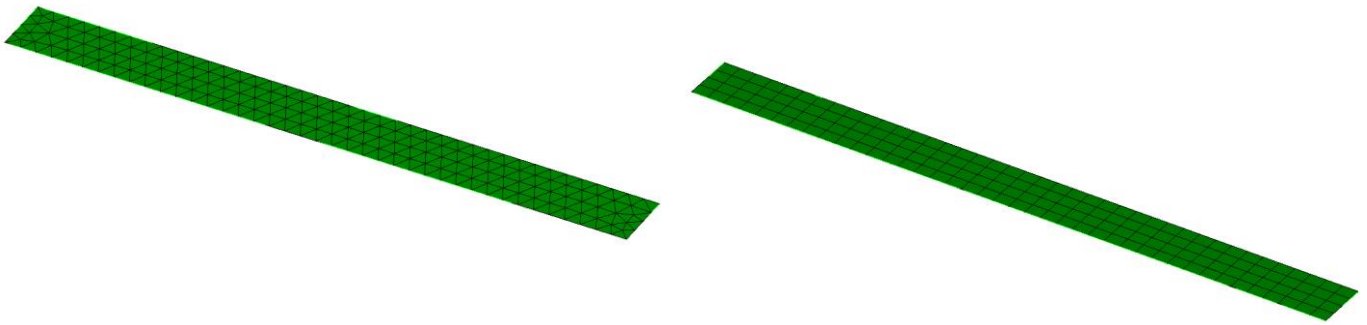
Рассматривалось три варианта расчетной схемы:

- Балочная схема (один отдельный тест):
 - Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)
- Оболочечная схема (два отдельных теста):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (326 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (326 элементов)
 - 4-узловые четырехугольные оболочки Shell4 (160 элементов)
 - 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (160 элементов)
 - 9-узловые четырехугольные оболочки Shell9 (160 элементов)
- Объемная схема (восемь отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (48 682 элемента)
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (48 682 элемента)
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (2 125 элементов)
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (2 125 элементов)
 - 27-узловы гексаэдры Hex27 (2 125 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s (1 250 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex20s (640 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex27s (640 элементов)

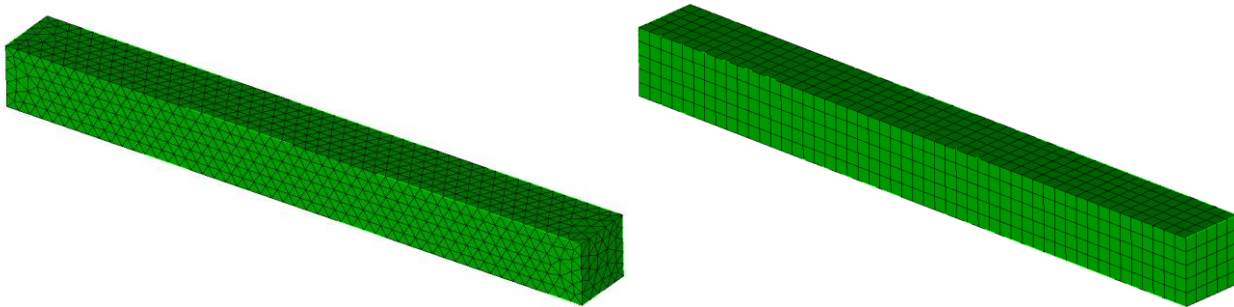
Балочная схема:



Оболочечная схема:



Объемная схема:



Критерий прохождения теста:

- Две первые критические сжимающие нагрузки для стержневой схемы 61 685 кН с точностью 1%
- Две первые критические сжимающие нагрузки для оболочечной схемы 61 685 кН/м с точностью 1%
- Две первые критические сжимающие нагрузки для объемной схемы 61 685 кПа с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [23]:

$$P_1 = P_2 = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, MICROFE [18]:

Величина	Теоретическое значение	Стержневая схема			
		FIDESYS (элементы Beam2)		MICROFE	
		Значение	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
Q_1 , кН	61 685	61 685.1	<0.01%	61 336	0.83%
Q_2 , кН	61 685	61 685.1	<0.01%	61 336	0.83%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема					
		FIDESYS				MICROFE	
		TriShell3		TriShell6		Значение	Ошибка
Значение	Ошибка	Значение	Ошибка				
Q_1 , кН/м	61 685	61 433.8	0.41%	61 247.7	0.71%	61 428	0.68%
Q_2 , кН/м	61 685	68 681.5	11%	61 404.4	0.45%	61 498	0.57%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема							
		FIDESYS						MICROFE	
		Shell4		Shell8		Shell9		Значение	Ошибка
Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка				
Q_1 , кН/м	61 685	61 446.6	0.39%	61 248.0	0.73%	61 226.2	0.74%	61 428	0.68%
Q_2 , кН/м	61 685	63 929.8	3.6%	61 383	0.49%	61 404.6	0.45%	61 498	0.57%

Величина	Теоретическое значение, Па	Объемная схема (тетраэдры)					
		FIDESYS				MICROFE	
		Тетраэдры (TETRA4)		Тетраэдры (TETRA10)		Значение	Ошибка
Значение	Ошибка	Значение	Ошибка				
Q_1 , кПа	61 685	62 988.79	1.84%	61 331.24	0.84%	61 659	0.31%
Q_2 , кПа	61 685	63 012.03	1.88%	61 331.47	0.84%	61 659	0.31%

Величина	Теоретическое значение	Объемная схема (гексаэдры)							
		FIDESYS						MICROFE	
		Гексаэдры (HEX8)		Гексаэдры (HEX20)		Гексаэдры (HEX27)		Значение	Ошибка
Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка				
Q_1 , кПа	61 685	61 862.73	0.02%	61 335.06	0.83%	61 331.07	0.84%	61 659	0.31%
Q_2 , кПа	61 685	61 862.73	0.02%	61 335.06	0.83%	61 331.07	0.84%	61 659	0.31%

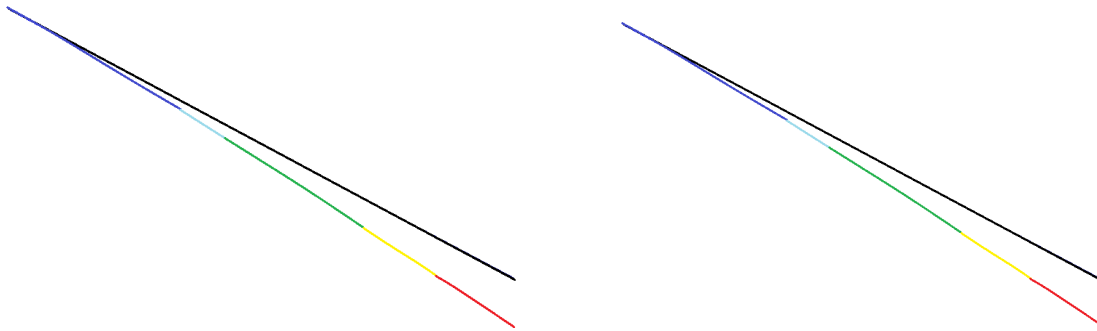
- Спектральные элементы:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS (HEX8s)				Численный анализ FIDESYS (HEX20s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Q_1 , кПа	61 685	61329.51	0.58%	61327.88	0.58%	61 331.15	0.57%	61 327.88	0.58%
Q_2 , кПа	61 685	61329.51	0.58%	61327.88	0.58%	61 331.15	0.57%	61 327.88	0.58%

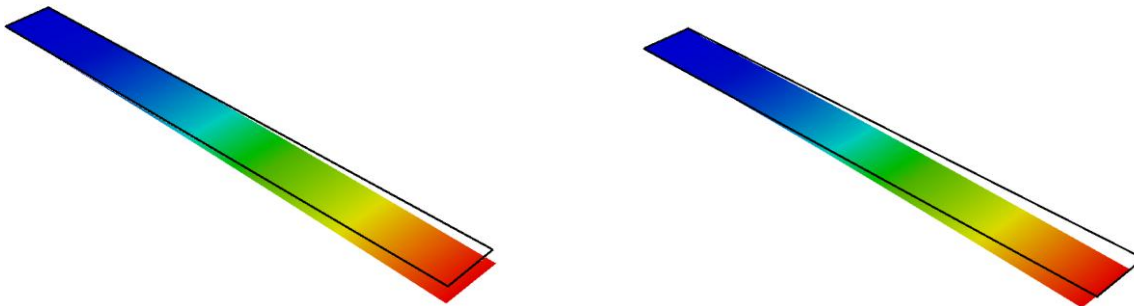
Величина	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS (HEX27s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Q_1 , кПа	61 685	61 331.15	0.57%	61 327.88	0.58%
Q_2 , кПа	61 685	61 331.15	0.57%	61 327.88	0.58%

- На картинках ниже представлены деформированные модели для двух первых форм потери устойчивости.

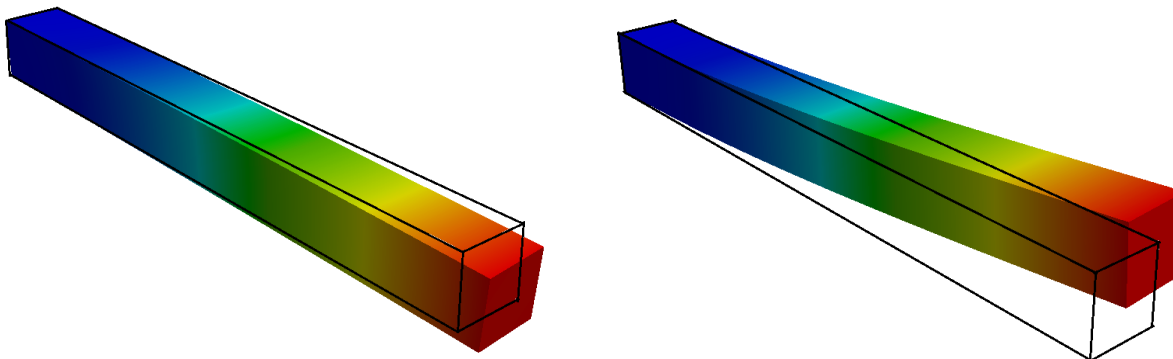
Стержневая схема:



Оболочочная схема:



Объемная схема:



Тест 5.1.2: Устойчивость шарнирно опертой пластины

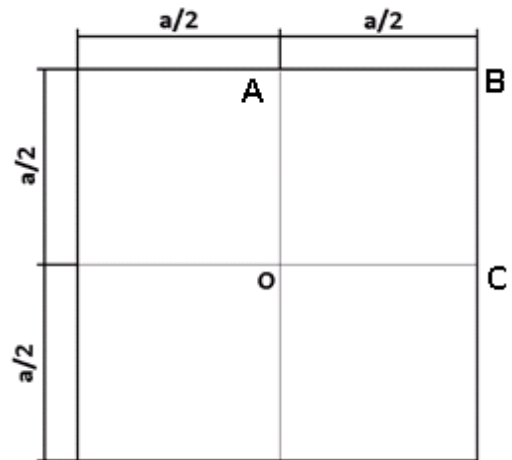
Рассматривается задача об устойчивости шарнирно опертой по кромкам под действием сжимающего напряжения по двум противоположным кромкам.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Сторона $a=8$ м
- Толщина $h=0.008$ м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения U_z на прямой BC
- Нулевые перемещения U_x , U_y и U_z на прямой AB
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Равномерно распределенная нагрузка по прямой BC вдоль оси X $q=-1$ кН/м



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 10$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3333$

Сетка:

- Два типа элементов (два отдельных теста):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (2 364 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (2 364 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (114 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (114 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (114 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Критическое значение напряжения $\sigma_{crit} = 37\,010.9$ Па с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [23]:

$$\sigma_{crit} = \frac{E\pi^2 D}{L^2 h},$$

$$\text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu)^2}.$$

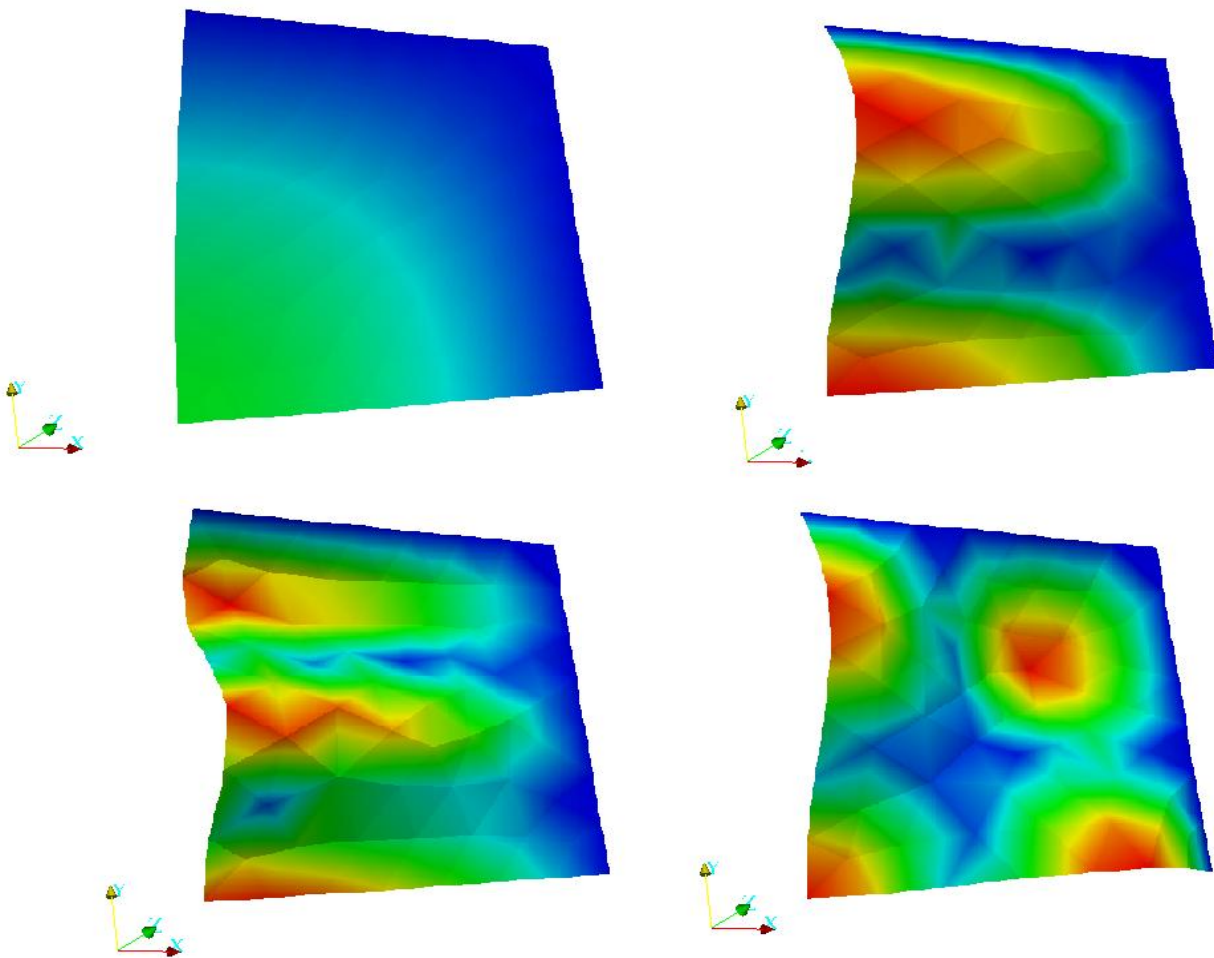
Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, MICROFE [18], ANSYS⁵¹:

Величина	Теор. значение	Численное решение							
		FIDESYS				MICROFE		ANSYS	
		TriShell3		TriShell6		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка				
σ_{crit} , Па	37 010.9	37 063.7	<0.01%	37 005.3	0.02%	37 010	<0.01%	37 052	0.11%

Величина	Теор. значение	Численное решение									
		FIDESYS						MICROFE		ANSYS	
		Shell4		Shell8		Shell9		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка				
σ_{crit} , Па	37 010.9	37 137.9	0.1%	37 001.1	0.34%	37 010.8	<0.01%	37 010	<0.01%	37 052	0.11%

- На картинках ниже представлены первые четыре формы потери устойчивости.



⁵¹ Анализ проводился на четырехугольной сетке (тип элемента SHELL181, 100 элементов).

Тест 5.1.3: Устойчивость квадратной пластины при двустороннем сжатии

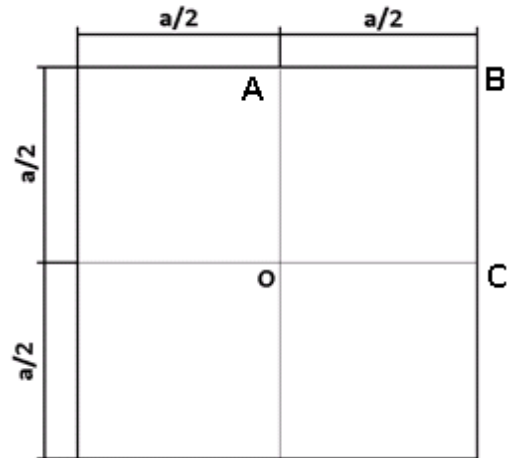
Рассматривается задача об устойчивости квадратной пластины с несмещаемыми кромками при действии давления на две противоположные стороны.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть пластины
- Сторона $a=0.5$ м
- Толщина $h=0.005$ м

Граничные условия:

- Нулевые перемещения U_z на прямой BC и AB
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой OA ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой OB ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Равномерно распределенная нагрузка по прямой BC вдоль оси X $q=-200$ кН/м



Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 210$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Два типа элементов (два отдельных теста):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 442 элемента)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (400 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (400 элементов)

Критерий прохождения теста:

- Первый коэффициент критической нагрузки $q_1^{crit} = 379.6$ с точностью 3%
- Второй коэффициент критической нагрузки $q_2^{crit} = 1\,054.44$ с точностью 3% [10]
- Третий коэффициент критической нагрузки $q_3^{crit} = 2\,566.1$ с точностью 3% [10]

Первое значение вычислено по формуле [23]:

$$q_{crit} = 4 \frac{\pi^2 D}{L^2},$$

$$\text{где } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.$$

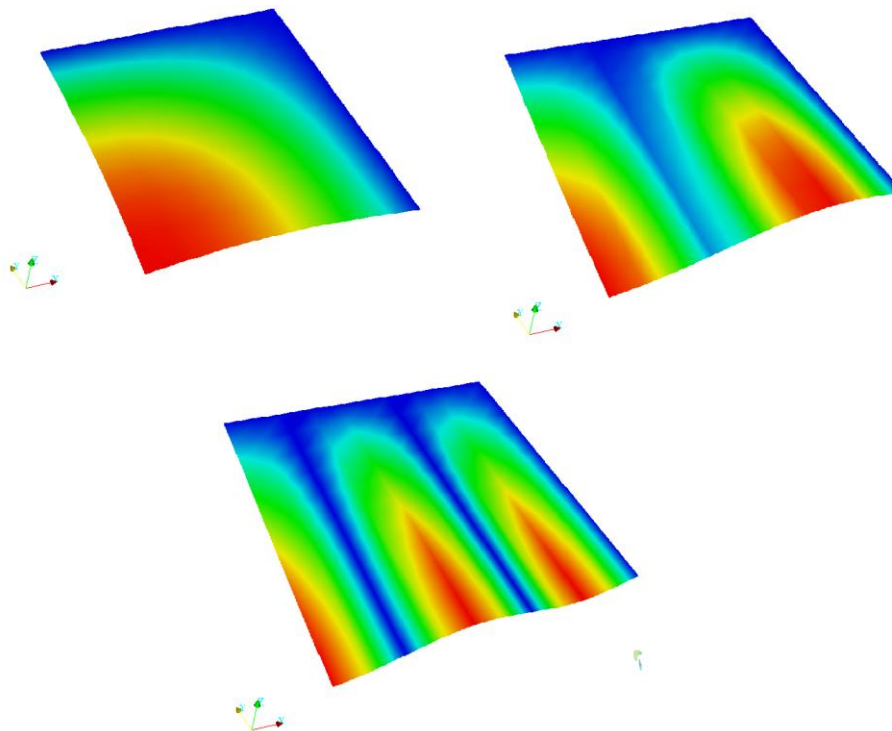
Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, CODE_ASTOR[10]:

Величина	Теоретическое значение	Численное решение					
		FIDESYS				CODE_ASTOR	
		TriShell3		TriShell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit}	379.6	378.26	0.35%	376.23	0.89%	378.52	0.98%
q_2^{crit}	1 054.44	1 055.48	0.1%	1 046.44	0.76%	1 049	0.5%
q_3^{crit}	2 566.1	2 580.83	0.57%	2 534.88	1.78%	2 574.7	0.33%

Величина	Теоретическое значение	Численное решение							
		FIDESYS						CODE_ASTOR	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit}	379.6	378.37	0.32%	377.86	0.46%	376.86	0.72%	378.52	0.98%
q_2^{crit}	1 054.44	1 058.29	0.37%	1 047.59	0.65%	1 048.96	0.52%	1 049	0.5%
q_3^{crit}	2 566.1	2 608	1.63%	2 530.14	1.4%	2 545.06	1.39%	2 574.7	0.33%

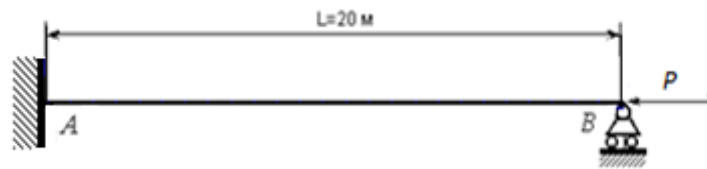
- На картинках ниже представлены первые три формы потери устойчивости.



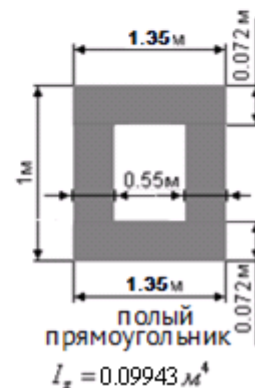
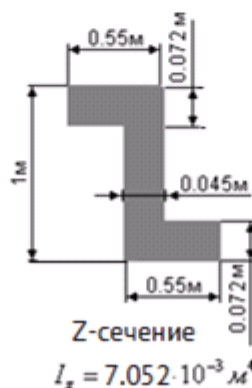
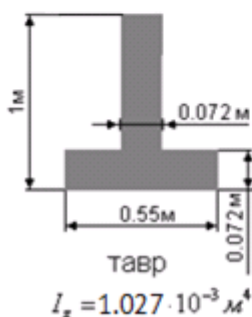
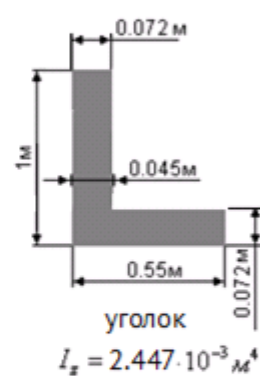
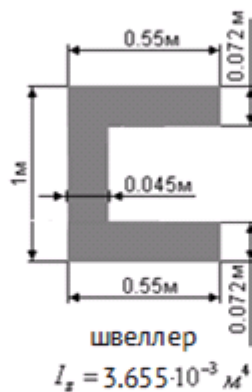
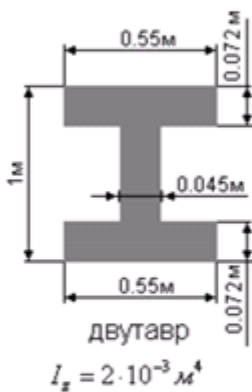
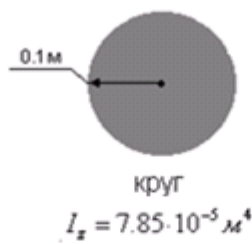
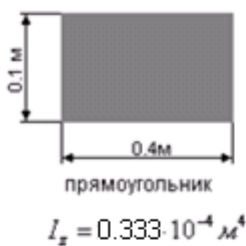
Тест 5.1.4: Устойчивость балки, заделанной на одном конце и шарнирно опертой на другом

Рассматривается задача об устойчивости балки, заделанной на одном конце и шарнирно опертой на другом, при действии сжимающей силы.

Геометрическая модель:



Сечение:



Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей в точке А
- Нулевые перемещения U_y и U_z в точке В
- Сосредоточенная сила в точке В $P_x = 1$ кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)



Критерии прохождения теста:

- Для прямоугольного сечения:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -336.67 кН с точностью 3%
- Для круглого сечения:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -792.84 кН с точностью 3%
- Для сечения труба:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -11 898.65 кН с точностью 3%
- Для сечения двутавр:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -20 199.72 кН с точностью 3%
- Для сечения швеллер:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -36 914.99 кН с точностью 3%
- Для сечения уголок:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -24 728.8 кН с точностью 3%
- Для сечения полый прямоугольник:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -1 004 259 кН с точностью 3%
- Для сечения тавр:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -10 370.3 кН с точностью 3%
- Для сечения Z-сечение:
 - Первое значение сжимающей критической силы P_{crit} равно -71 205.9 кН с точностью 3%

Значения вычислены по следующим формулам [23]:

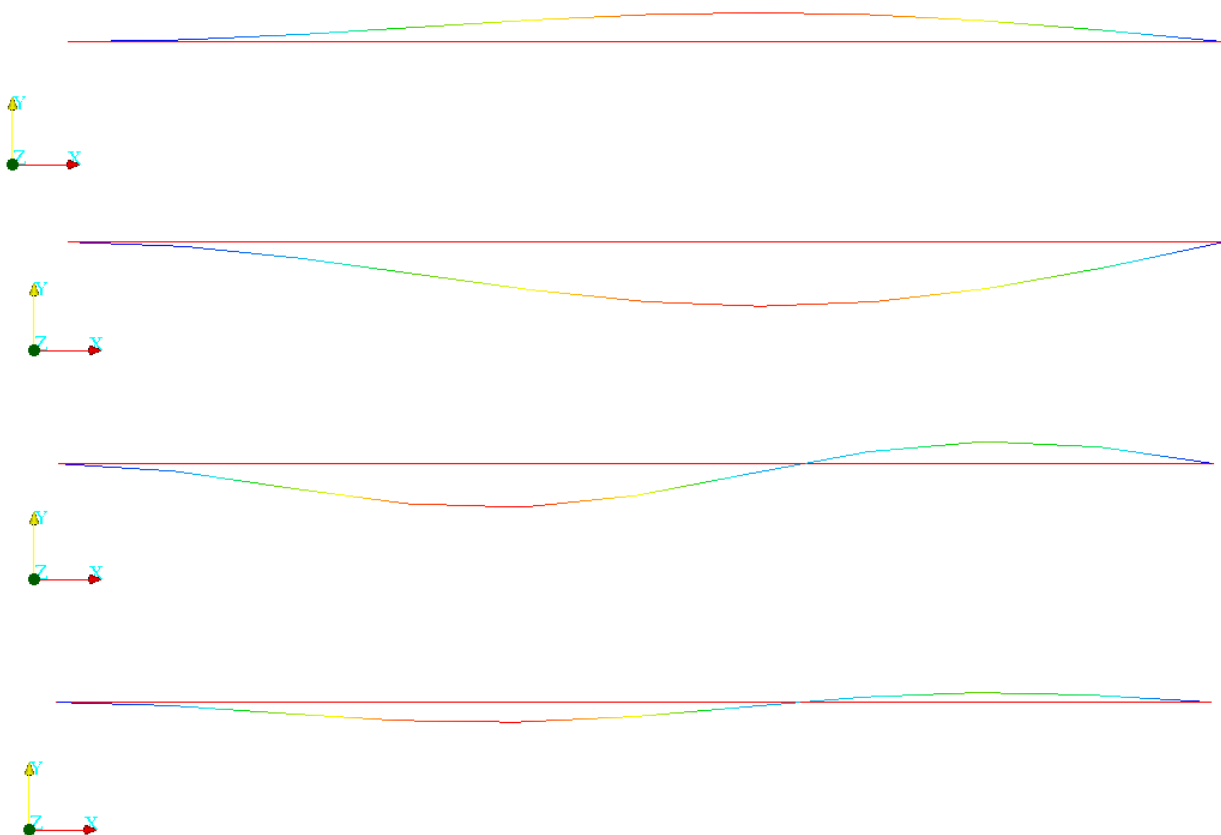
$$P_{crit} = -\frac{\pi^2 EI_z}{(0.699L)^2}$$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁵²:

Сечение	Величина, кН	Теор. значение	Численный анализ			
			FIDESYS		ANSYS	
			Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
Прямоугольник	P_{crit}	-336.67	-336.55	0.04%	-337.65	0.31%
Круг	P_{crit}	-792.84	-792.981	-0.02%	-793.72	0.11%
Труба	P_{crit}	-11 898.65	-11 894.7	0.03%	-11 872	0.05%
Двутавр	P_{crit}	-20 199.72	-20 223.4	-0.12%	-20 206	2.9%
Швеллер	P_{crit}	-36 914.99	-36 905.6	0.03%	-36 900.60	0.04%
Уголок	P_{crit}	-24 714.36	-24 728.8	-0.06%	-24 704.70	0.04%
Тавр	P_{crit}	-10 372.56	-10 370.3	0.02%	-10 368.50	0.04%
Z-сечение	P_{crit}	-71 224.22	-71 205.9	0.03%	-71 196.50	0.04%
Полый прямоугольник	P_{crit}	-1 004 259	-1 003 930	0.03%	-1 003 870	0.04%

- На картинках ниже представлены первые четыре формы потери устойчивости для круглого сечения:



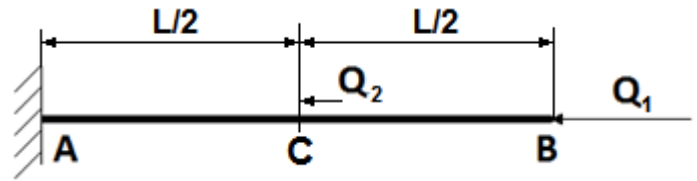
⁵² Анализ проводился для 30 балочных элементов beam188.

Тест 5.1.5: Консольное тело, нагруженное двумя сжимающими силами

Рассматривается задача об устойчивости консольного тела, нагруженного двумя сжимающими силами – на свободном конце и в середине.

Геометрическая модель :

- АВ=20 м
- Сечение квадрат 1х1 м



Граничные условия:

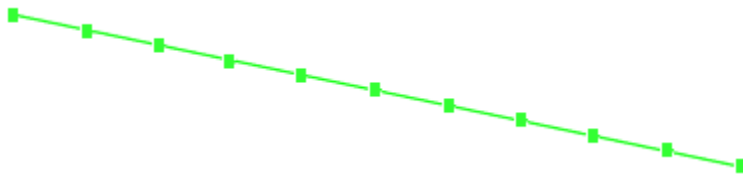
- Нулевые перемещения и повороты в точке А
- Нагрузка в точке В $P_1 = 1$ кН
- Нагрузка в точке С $P_2 = 1$ кН

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 30$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

- Стержневая схема (один отдельный тест):
 - Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)



Критерий прохождения теста:

- Первое значение критической нагрузки для стержневой схемы $P_1 = 86\,166.67$ кН с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [23]:

$$P_1 = 2.068 \frac{EI}{L^2}$$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁵³:

Величина	Теоретическое значение	Стержневая схема			
		FIDESYS (элементы Beam2)		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
P_1 , кН	86 166.67	86 134.95	0.04%	85 982	0.21%

⁵³ Анализ выполнялся для десяти элементов beam188.

Тест 5.1.6: Устойчивость шарнирно опертой балки

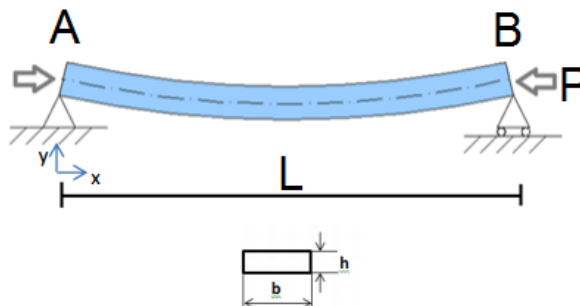
Рассматривается задача об устойчивости шарнирно опертой балки, нагруженной двумя сжимающими силами.

Геометрическая модель :

- Длина $L=200$ мм
- Сечение высота $b=10$ мм, толщина $h=1$ мм

Граничные условия:

- Нулевые перемещения в точке А ($U_x= U_y= U_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y в точке В ($U_y= U_z=0$)



Параметры материала:

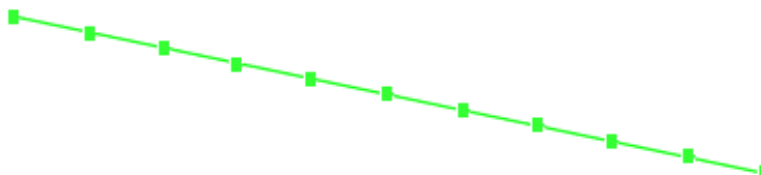
- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2\,000\,000$ Н/мм²
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Сетка:

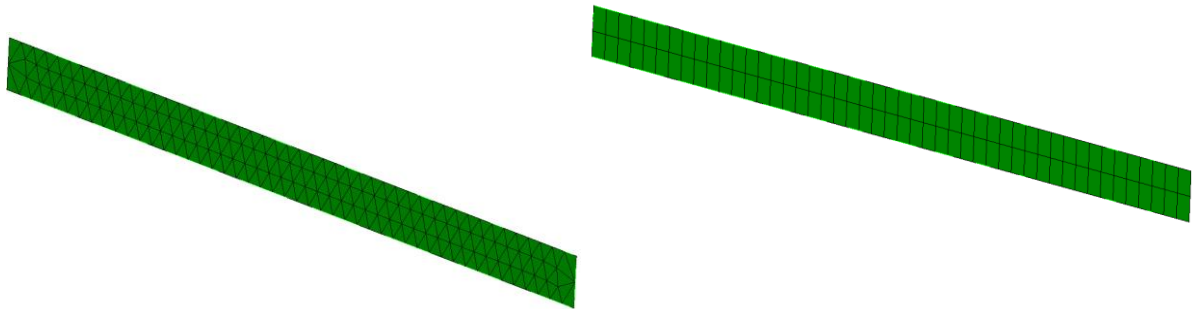
Рассматривалось два варианта расчетной схемы:

- Стержневая схема (один отдельный тест):
 - Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)
- Оболочечная схема (два отдельных теста):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (276 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (276 элементов)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (94 элемента)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (94 элемента)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (94 элемента)

Стержневая схема:



Оболочечная схема:



Критерий прохождения теста:

Критическая температура $P_{crit} = 41.124$ Н с точностью 1%

Значение вычислено по формуле [23]:

$$P_{crit} = \frac{\pi^2 EI}{L^2},$$

Где момент инерции балки $I = \frac{bh^3}{12}$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS [25]:

Величина	Теоретическое значение	Стержневая схема			
		FIDESYS (элементы Beam2)		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
$P_{crit}, Н$	41.124	41.1244	<0.01%	41.172	0.12%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема					
		FIDESYS				ANSYS	
		TriShell3		TriShell6		Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка		
$P_{crit}, Н$	41.124	41.172	0.12%	41.129	0.01%	41.172	0.12%

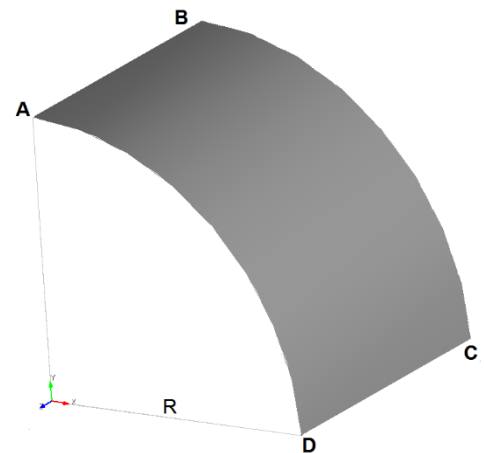
Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема							
		FIDESYS						ANSYS	
		Shell4		Shell8		Shell9		Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка		
$P_{crit}, Н$	41.124	41.163	0.09%	41.132	0.02%	41.134	0.02%	41.172	0.12%

Тест 5.1.7: Устойчивость цилиндрической оболочки

Рассматривается задача об устойчивости прямоугольной пластины с жесткой заделкой на одном крае и подвижной заделкой на другом при действии продольной нагрузки.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть оболочки
- Длина $L=2$ м
- Радиус $R=2$ м
- Толщина $h=0.02$ м



Граничные условия:

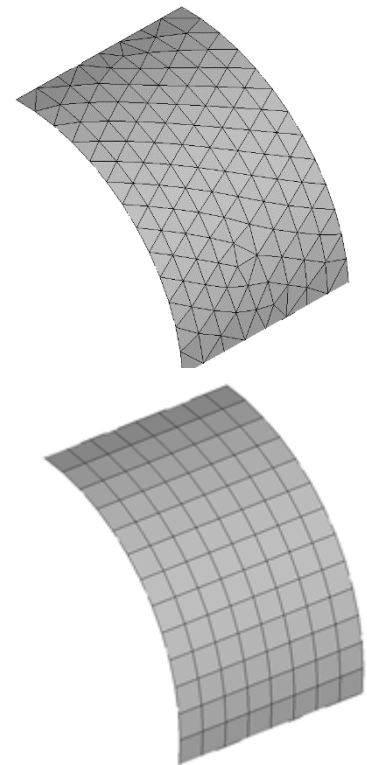
- Нулевые перемещения вдоль оси X на прямой AB ($U_x=R_y=R_z=0$)
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на прямой DC ($U_y=R_x=R_z=0$)
- Равномерно распределенная нагрузка по поверхности ABCD $q=1$ кПа

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E=200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu=0.3$

Сетка:

- Два типа элементов (два отдельных теста):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 394 элемента)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell3 (1 394 элемента)
 - 4-узловые четырёхугольные оболочки Shell4 (888 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольные оболочки Shell8 (45 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольные оболочки Shell9 (45 элементов)



Критерий прохождения теста:

- Первое критическое значение нагрузки $q_1^{crit}=73.260$ кПа с точностью 3%
- Третье критическое значение нагрузки $q_3^{crit}=293.040$ кПа с точностью 3%
- Пятое критическое значение нагрузки $q_5^{crit}=659.341$ кПа с точностью 3%
- Седьмое критическое значение нагрузки $q_7^{crit}=1\,172.16$ кПа с точностью 3%
- Девятое критическое значение нагрузки $q_9^{crit}=1\,831.5$ кПа с точностью 3%
- Одиннадцатое критическое значение нагрузки $q_{11}^{crit}=2\,637.36$ кПа с точностью 3%

Значения вычислены по формуле [24]:

$$q_{crit} = \frac{n^2 D}{L^3},$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, $n = 2,4,6,8,10,12$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, CODE_ASTOR[10]:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ					
		FIDESYS				CODE_ASTOR	
		TriShell3		TriShell6			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit} , кПа	73.260	72.444	1.1%	72.199	1.4%	72.492	1%
q_3^{crit} , кПа	293.040	290.812	0.76%	288.4	1.6%	293.481	0.87%
q_5^{crit} , кПа	659.341	658.03	0.2%	647.31	1.8%	673.600	2%
q_7^{crit} , кПа	1 172.16	1 179.21	0.6%	1 146.8	2.2%	-	-
q_9^{crit} , кПа	1 831.5	1 863.04	1.7%	1 785.42	2.5%	-	-
q_{11}^{crit} , кПа	2 637.36	2 722.25	3.2%	2 561.78	2.9%	-	-

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ							
		FIDESYS						CODE_ASTOR	
		Shell4		Shell8		Shell9			
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
q_1^{crit} , кПа	73.260	72.3937	1.18%	72.3608	1.2%	72.3791	1.2%	72.492	1%
q_3^{crit} , кПа	293.040	290.533	0.86%	289.47	1.2%	289.622	1.2%	293.481	0.87%
q_5^{crit} , кПа	659.341	657.111	0.34%	651.856	1.1%	652.765	1.0%	673.600	2%
q_7^{crit} , кПа	1 172.16	1 176.66	0.38%	1 161.81	0.9%	1 166.87	0.5%	-	-
q_9^{crit} , кПа	1 831.5	1 857.03	1.39	1 824.54	0.4%	1 844.86	0.7%	-	-
q_{11}^{crit} , кПа	2 637.36	2 709.32	2.73%	2 638.3	0.0%	2 715.36	3.0%	-	-

Тест 5.1.8: Устойчивость балки, закрепленной на концах, от температурного воздействия

Рассматривается задача об устойчивости тела, защемленного на торцах и подверженного равномерному температурному нагреву.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Длина $L=200$ мм
- Сечение высота $b=10$ мм, толщина $h=1$ мм

Граничные условия:

- Оба конца балки жестко закреплены по всем перемещениям и поворотам

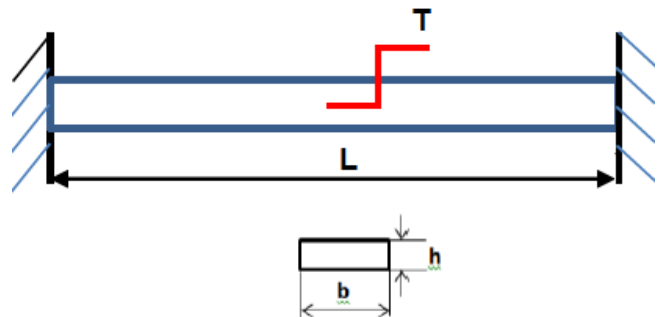
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 2\,000\,000$ Н/мм²
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Коэффициент температурного расширения $\alpha=11.7 \cdot 10^{-6}$ C⁻¹

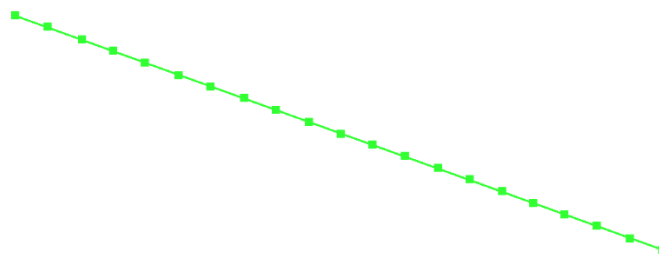
Сетка:

Рассматривалось два варианта расчетной схемы:

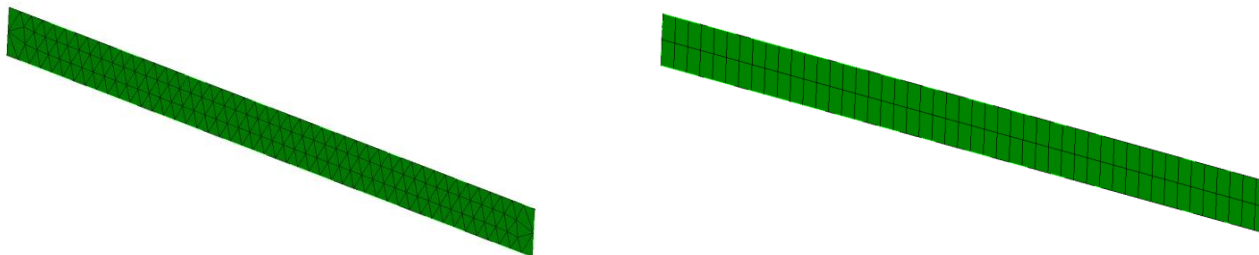
- Стержневая схема (один отдельный тест):
 - Линейные балочные элементы Beam2 (20 элементов)
- Оболочечная схема (два отдельных теста):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (276 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (276 элементов)
 - 4-узловые четырехугольные оболочки Shell4 (94 элемента)
 - 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (94 элемента)
 - 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (94 элемента)



Стержневая схема:



Оболочечная схема:



Критерий прохождения теста:

Критическая температура $T_{crit} = 7.028^{\circ}\text{C}$ с точностью 1%

Значение вычислено по формуле [24]:

$$T_{crit} = \frac{\pi^2 h^2}{3\alpha L^2} \cdot$$

Результаты:

- В таблице приведены результаты расчёта FIDESYS, ANSYS⁵⁴:

Величина	Теоретическое значение	Стержневая схема			
		FIDESYS (элементы Beam2)		ANSYS	
		Значение	Ошибка	Значение, Па	Ошибка
$T_{crit}, ^{\circ}\text{C}$	7.028	7.029	0.01%	7.052	0.34%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема					
		FIDESYS				ANSYS	
		TriShell3		TriShell6		Значение	Ошибка
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка		
$T_{crit}, ^{\circ}\text{C}$	7.028	7.072	0.63%	7.037	0.13%	7.052	0.34%

Величина	Теоретическое значение	Оболочечная схема							
		FIDESYS						ANSYS	
		Shell4		Shell8		Shell9		Значение	Ошибка
		Значение	Значение	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка		
$T_{crit}, ^{\circ}\text{C}$	7.028	7.055	7.055	7.045	0.28%	7.046	0.26%	7.052	0.34%

⁵⁴ Анализ проводился на десяти балочных элементах BEAM2



- На картинке ниже представлена первая форма потери устойчивости





Задачи теплопроводности и термоупругости

Тесты с известным аналитическим решением

Тест 6.1.1: Полая сфера при постоянном температурном нагружении (3D).

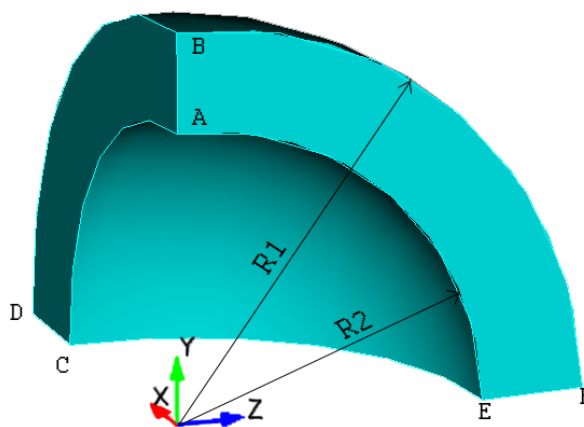
Решается задача о статическом температурном нагружении полый сферы.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Размеры сферы: радиус $R_1 = 4$ м, $R_2 = 3$ м ;
- В силу симметрии задачи рассматривается 1/8 сферы.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на плоскости ABEF
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на плоскости EFC D
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на плоскости ABCD
- Сплошная температура на внутренней поверхности сферы ACE

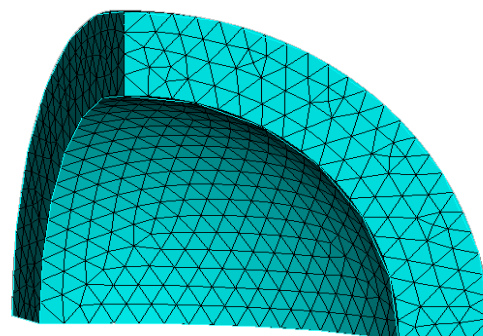
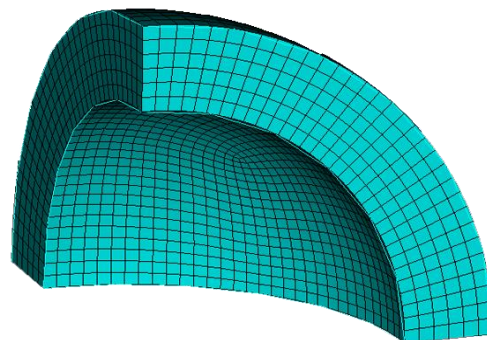


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Температурное расширение $\mu = 0.0001$ 1/°C
- Температура $T = 30^\circ\text{C}$

Сетка:

- Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (10 398 элемента)
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (7 217 элемента)
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (4 608 элементов)
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (2 800 элементов)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (729 элементов)



Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке D (4,0,0) равно 0.012 с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [26]:

$$u_R = \mu TR_1$$

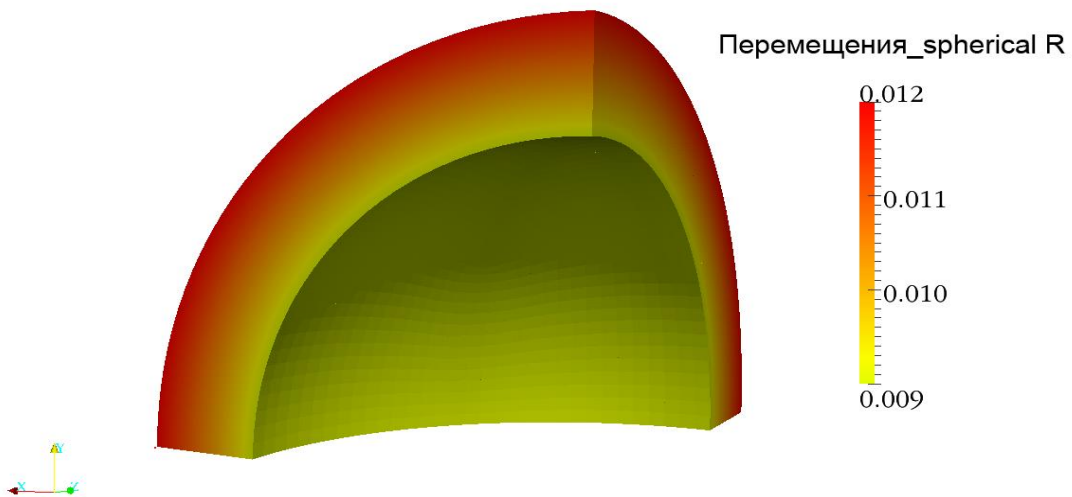
Результаты:

Полученные значения перемещений в точке D представлены в таблицах:

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ FIDESYS			
		Тетраэдры (TETRA4)		Тетраэдры (TETRA10)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0%

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS					
		Гексаэдры (HEX8)		Гексаэдры (HEX20)		Гексаэдры (HEX27)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0%	0.012	0%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_R при разбиении на гексаэдральные элементы. Максимальные значения перемещений достигаются в точке D (4,0,0), в которой сравнивались аналитические и численные результаты:



Тест 6.1.2: Сплошная сфера при постоянном температурном нагружении (3D).

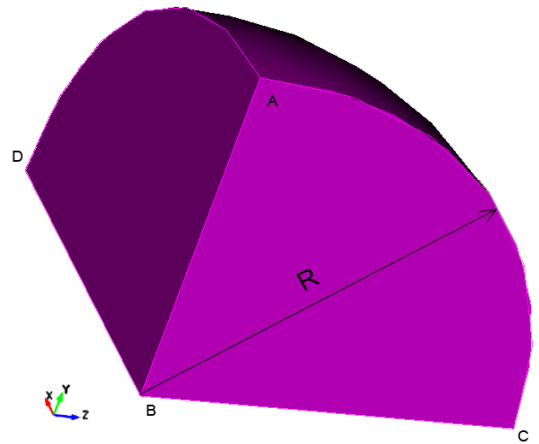
Решается задача о статическом температурном нагружении сплошной сферы.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Размеры сферы: радиус $R = 4$ м;
- В силу симметрии задачи рассматривается 1/8 сферы.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на плоскости ABC
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на плоскости DCB
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на плоскости ADB
- Сплошная температура на внешней поверхности сферы ACD

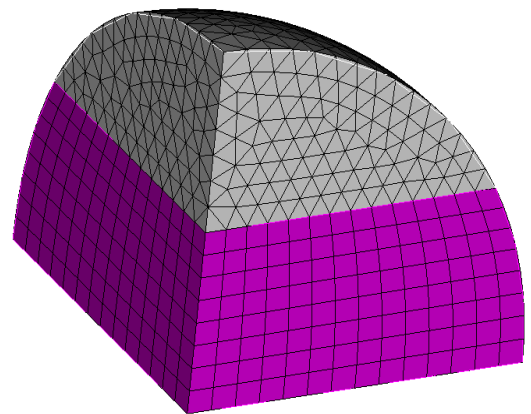
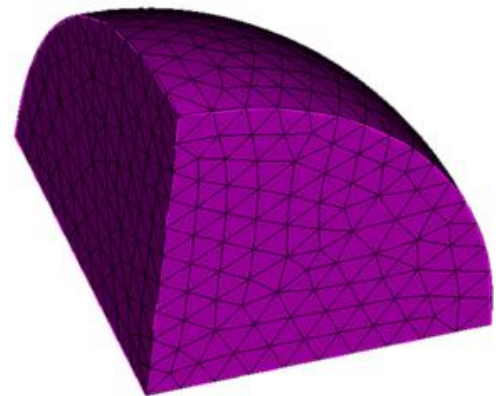


Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Температурное расширение $\mu = 0.0001$ 1/°C
- Температура $T = 30$ °C

Сетка:

- Два типа конечных элементов (два отдельных теста):
 - 4-узловые тетраэдры TETRA4 (11 027 элементов)
 - 10-узловые тетраэдры TETRA10 (5 168 элементов)
- Три типа конечных элементов (один тест):
 - PYRAMID5+TETRA4 (5 168 элементов)
 - 8-узловые гексаэдры HEX8 (1 496 элементов)
- Три типа конечных элементов (один тест):
 - PYRAMID13 (187 элементов)
 - TETRA10 (5 444 элемента)
 - 20-узловые гексаэдры HEX20 (1 496 элементов)
- Три типа спектральных элементов 2го порядка (один тест):
 - PYRAMID5s+TETRA4s (5 168 элементов)
 - 8-узловые гексаэдры HEX8s (1 496 элементов)



Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_y в точке A (0;4;0) равно 0.012 с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [26]:

$$u_R = \mu TR$$

Результаты:

- Полученные значения перемещений в точке A представлены в таблицах:
- Конечные элеметы

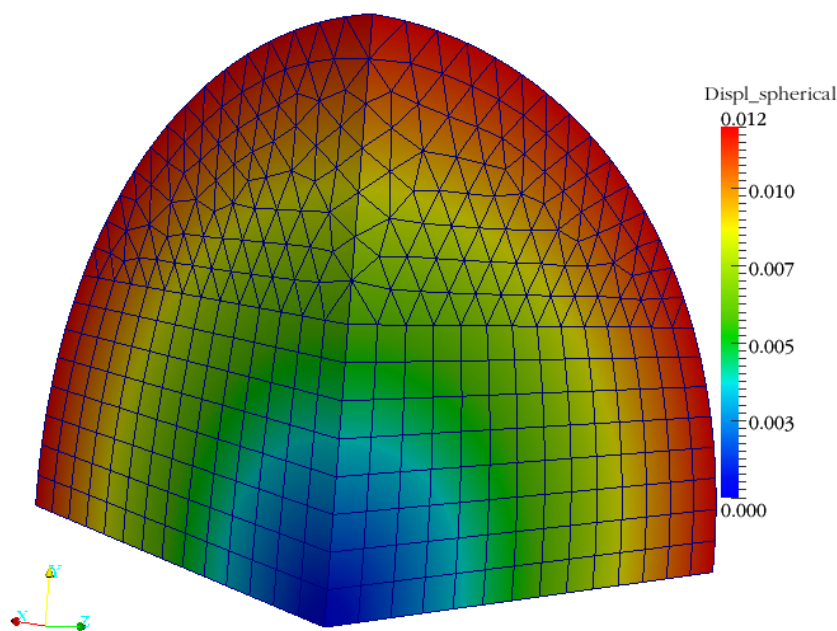
Величина	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS			
		Тетраэдры (TETRA4)		Тетраэдры (TETRA10)	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0 %

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS			
		TETRA4+PYRAMID5+HEX8		TETRA10+PYRAMID13+HEX20	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.01199	<0.01 %

- Спектральные элеметы 2го порядка

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ FIDESYS			
		TETRA4s+PYRAMID5s+HEX8s		TETRA10s+PYRAMID13s+HEX20s	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0 %

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_R для сетки из смешанных типов элементов. Максимальные значения перемещений u_R достигаются в точке A (0;4;0), в которой сравнивались аналитические и численные результаты:



Тест 6.1.3: Полый цилиндр с постоянным температурным нагружением (2D).

Рассматривается задача определения напряжения в полой цилиндрической части в случае постоянного температурного нагружения. Иные нагрузки на цилиндрическую часть отсутствуют.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

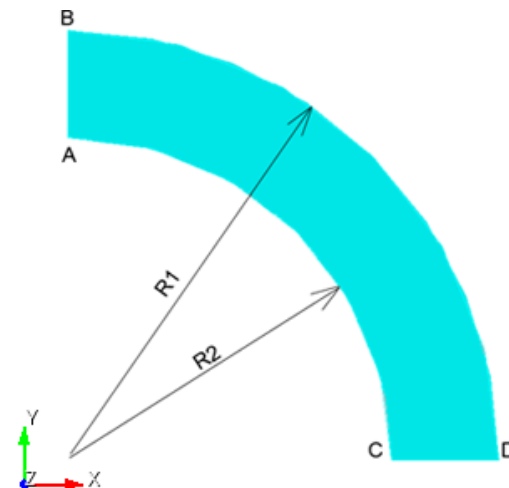
- Размеры цилиндра: радиус $R_1 = 4$ м, $R_2 = 3$ м;
- В силу симметрии задачи рассматривается четверть полуцилиндра.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на линии AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на линии DC
- Сплошная температура на внутренней линии AC

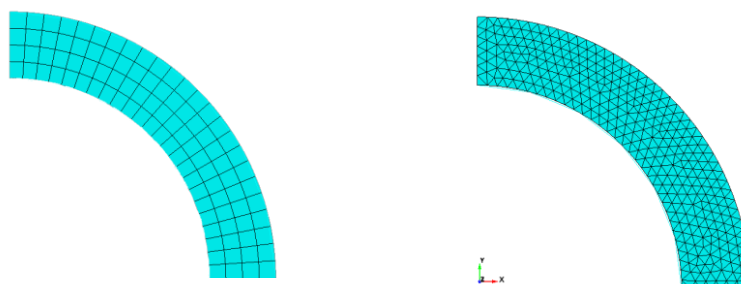
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Температурное расширение $\mu = 0.0001$ 1/°C
- Температура $T = 30^\circ\text{C}$



Сетка:

- Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (540 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (259 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (96 элементов)
 - 3-узловые треугольники Tri3 (1 214 элементов)
 - 6-узловые треугольники Tri6 (594 элемента)
- Шесть типов спектральных элементов (шесть отдельных тестов):
 - Спектральные элементы гексаэдры Quad4s 3го порядка (259 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Quad4s 4го порядка (96 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Quad8s 3го порядка (259 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Quad8s 4го порядка (96 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Quad9s 3го порядка (259 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Quad9s 4го порядка (96 элементов)



Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке D (4,0,0) равно 0.012 с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [26]:

$$u_R = \mu TR_1$$

Результаты:

- Полученные значения перемещений в точке D представлены в таблицах:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ Fidesys (четырёхугольная сетка)					
		Quad4		Quad8		Quad9	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0%	0.012	0%

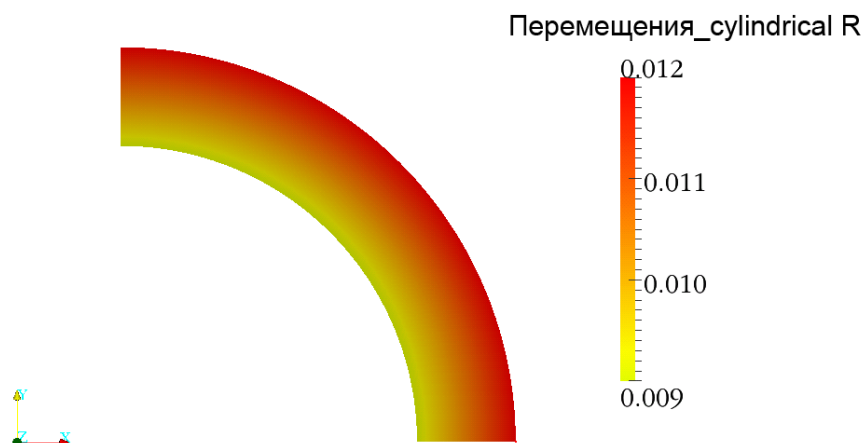
Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ FIDESYS (треугольная сетка)			
		Tri3		Tri6	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0%

- Спектральные элементы

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ FIDESYS Quad4s				Численный анализ FIDESYS Quad8s			
		3-ого порядка		4-ого порядка		3-ого порядка		4-ого порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0%	0.012	0%	0.012	0%

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ FIDESYS Quad9s			
		3-ого порядка		4-ого порядка	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.012	0.012	0%	0.012	0%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_R при разбиении на треугольные элементы. Максимальные значения перемещений достигаются в точке D (4,0,0), в которой сравнивались аналитические и численные результаты:



Тест 6.1.4: Сплошной диск с постоянным температурным нагружением(2D).

Рассматривается задача определения напряжения в сплошном диске в случае постоянного температурного нагружения. Иные нагрузки на дисковую часть отсутствуют.

Геометрическая модель(размеры указаны в метрах):

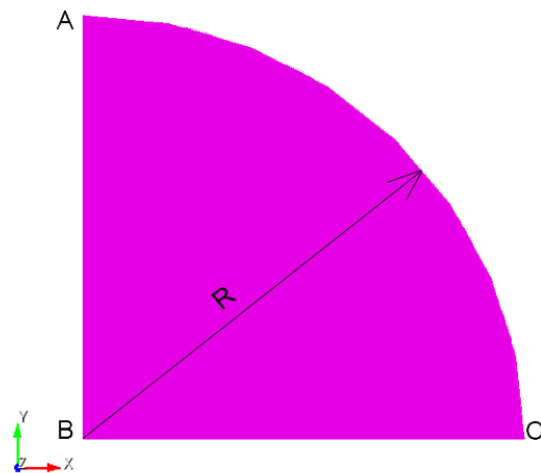
- Размеры диска: радиус $R = 3$ м;
- В силу симметрии задачи рассматривается четверть полудиска

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на линии AB
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на линии DC
- Сплошная температура на внешней линии AC

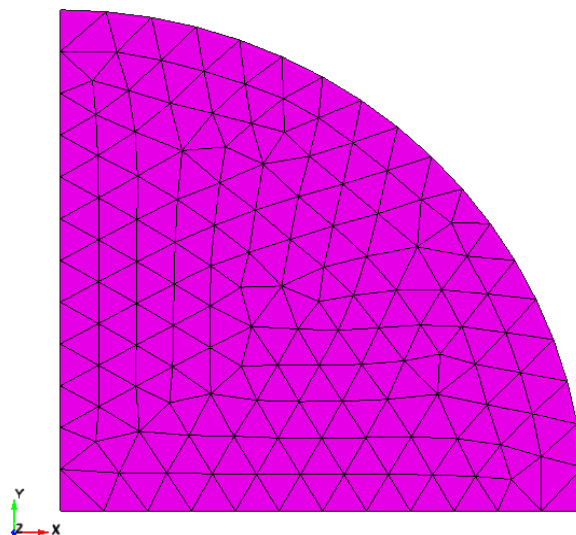
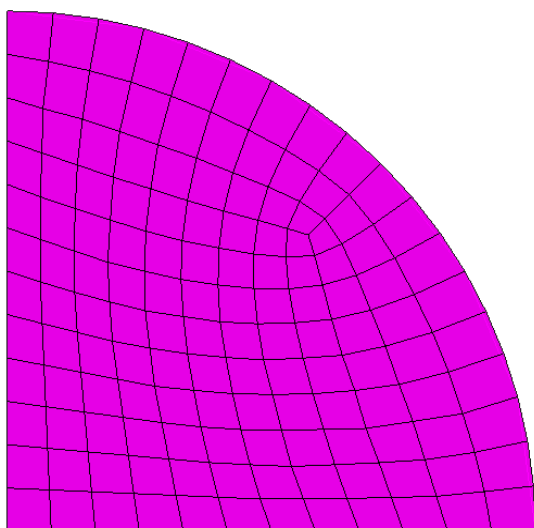
Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 200$ ГПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$
- Температурное расширение $\mu = 0.0001$ $1/^\circ\text{C}$
- Температура $T = 10^\circ\text{C}$



Сетка:

- Пять типов конечных элементов (пять отдельных теста):
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (651 элементов)
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (308 элементов)
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (135 элементов)
 - 3-узловые треугольники Tri3 (1 239 элементов)
 - 6-узловые треугольники Tri6 (256 элемента)



Критерий прохождения теста:

- Перемещение u_x в точке С (4,0,0) равно 0.003 с точностью 1%

Значения вычислены по формуле [26]:

$$u_R = \mu TR$$

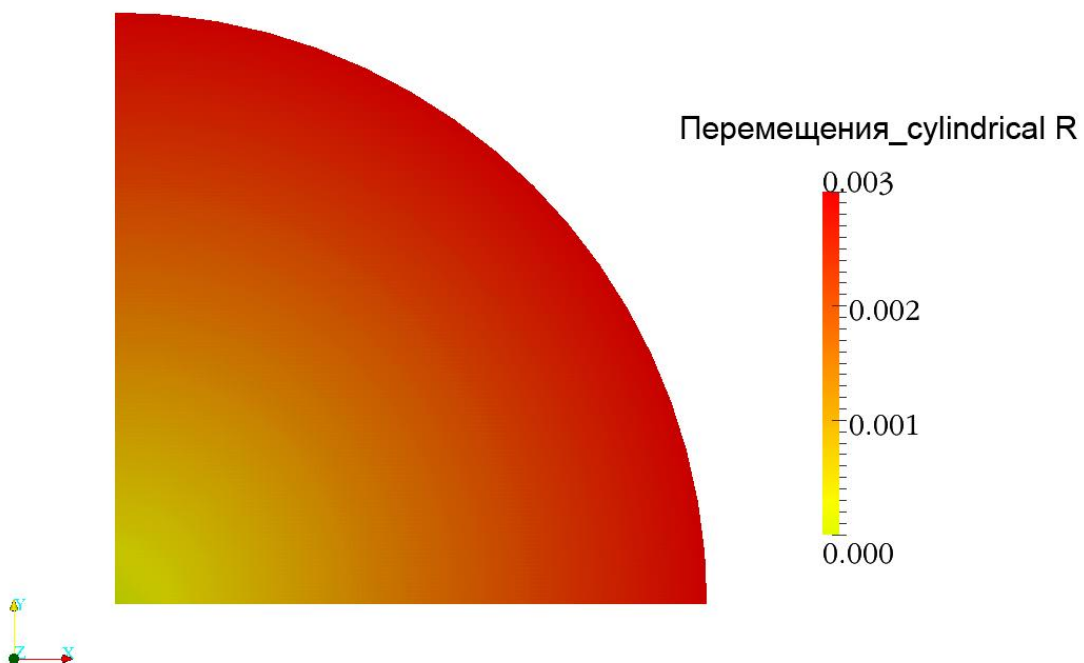
Результаты:

- Полученные значения перемещений в точке С представлены в таблицах:

Величина	Теоретическое значение	Численный анализ Fidesys (четырёхугольная сетка)					
		Quad4		Quad8		Quad9	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.003	0.003	0%	0.003	0%	0.003	0%

Величина	Теоретическое значение, Па	Численный анализ FIDESYS (треугольная сетка)			
		Tri3		Tri6	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
$u_{R,M}$	0.003	0.003	0%	0.003	0%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения перемещений u_R при разбиении на треугольные элементы. Максимальные значения перемещений достигаются в точке С (3,0,0), в которой сравнивались аналитические и численные результаты:



Тесты с известным численным решением

Тест 6.2.1: Полый цилиндр под воздействием постоянной температуры на внутреннюю и внешнюю поверхность (2D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA01/89.

Рассматривается двумерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием постоянных температур.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $R_i = 0.30$ м, $R_e = 0.35$ м.

Граничные условия:

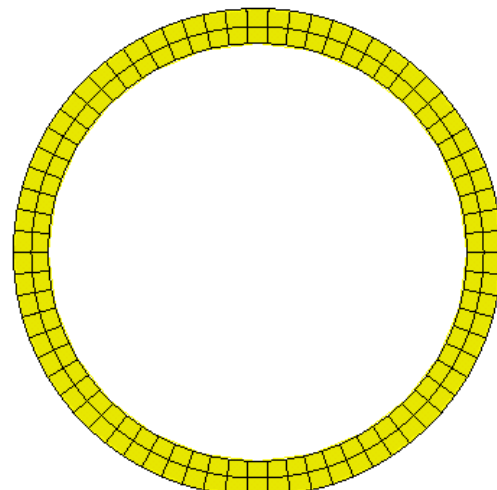
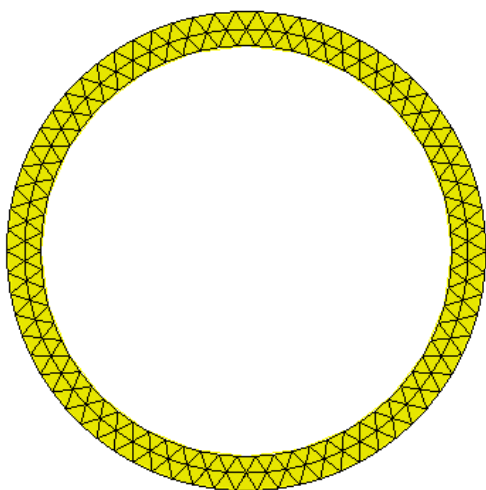
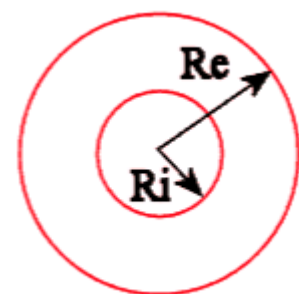
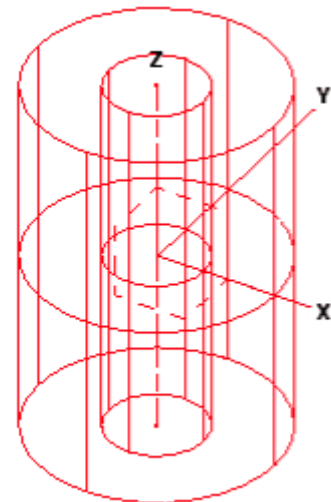
- Внутренняя температура $T_i = 100$ °С;
- Внешняя температура $T_e = 20$ °С.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $V = 1$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3 (2 400 элементов);
 - 6-узловые треугольники Tri6 (2 400 элементов);
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (922 элементов);
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (922 элементов);
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (922 элементов).



Критерий прохождения теста:

Сравнение значений температуры T и теплового потока φ в точках на поверхности цилиндра и внутри него[6]:

- В точке (0.3;0;0) $T = 100.0$ °C, $\varphi = 1\,730$ Вт/м² с точностью 2%;
- В точке (0.31;0;0) $T = 82.98$ °C, $\varphi = 1\,674$ Вт/м² с точностью 2%;
- В точке (0.32;0;0) $T = 66.51$ °C, $\varphi = 1\,622$ Вт/м² с точностью 2%;
- В точке (0.33;0;0) $T = 50.54$ °C, $\varphi = 1\,573$ Вт/м² с точностью 2%;
- В точке (0.34;0;0) $T = 35.04$ °C, $\varphi = 1\,526$ Вт/м² с точностью 2%;
- В точке (0.35;0;0) $T = 20.00$ °C, $\varphi = 1\,483$ Вт/м² с точностью 2%.

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

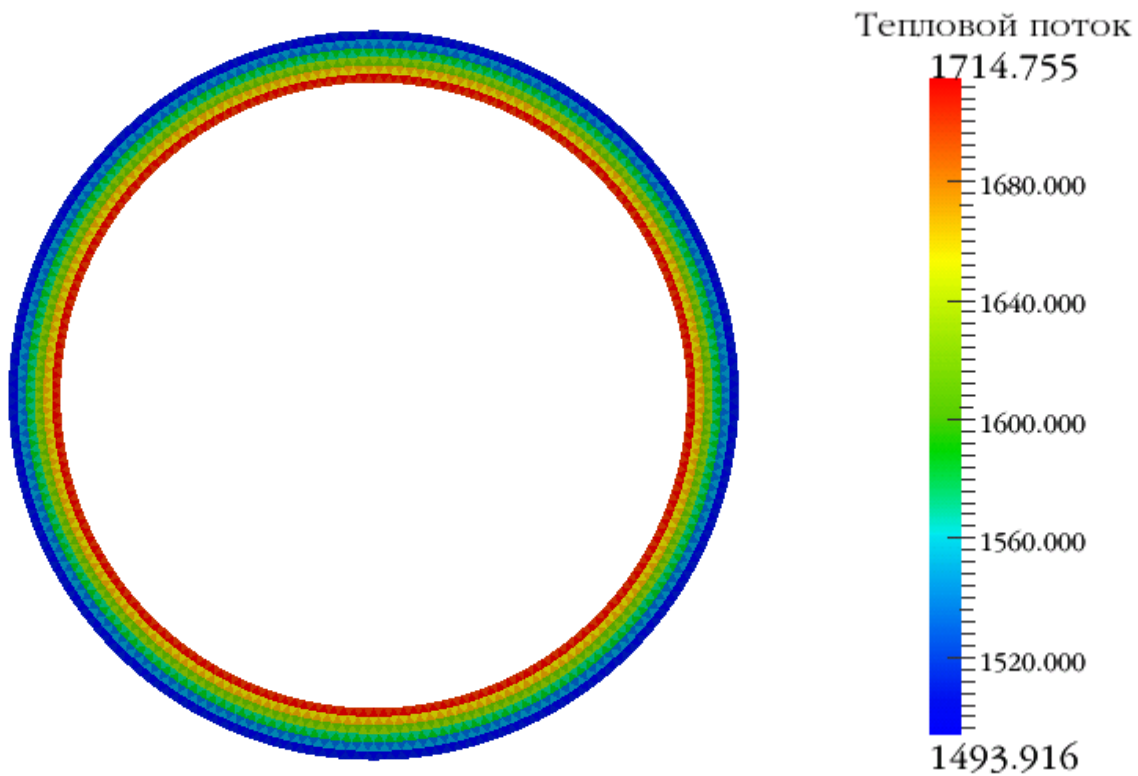
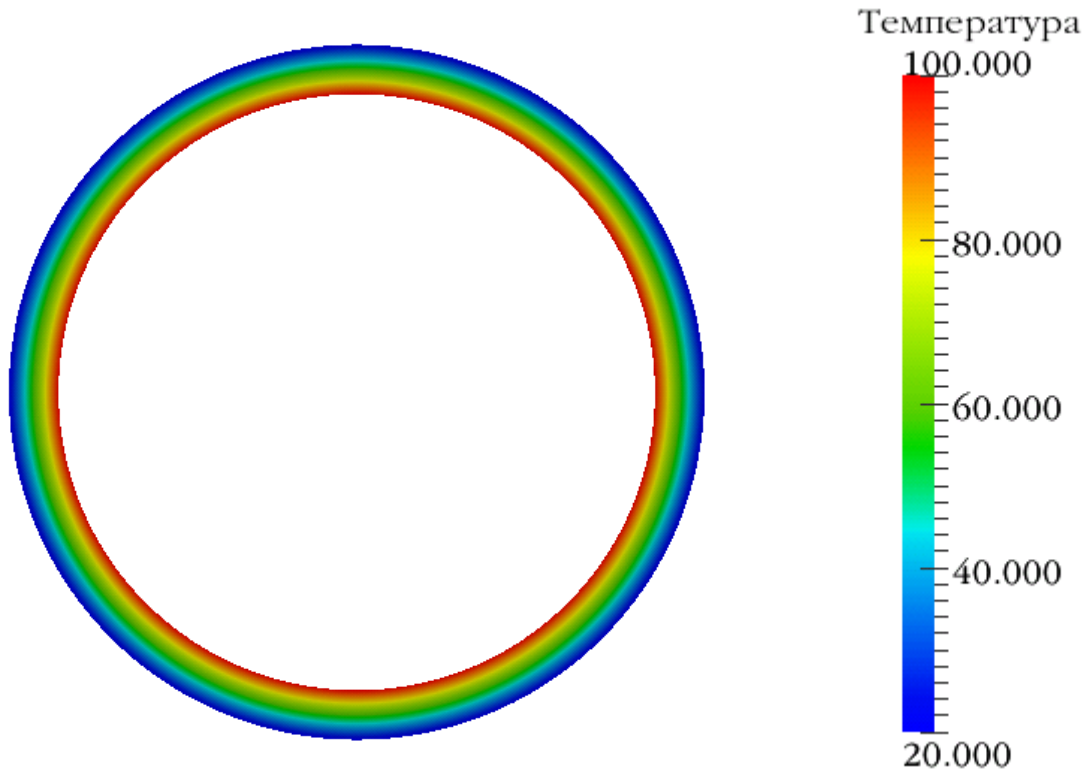
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.3;0;0)	$T = 100.0$	100	0.00%	100	0.00%	100	0.00%	100.0	0%
(0.31;0;0)	$T = 82.98$	83	0.02%	82.983	0.00%	82.983	0.00%	82.98	0%
(0.32;0;0)	$T = 66.51$	66.532	0.03%	66.507	0.00%	66.506	0.01%	66.51	0%
(0.33;0;0)	$T = 50.54$	50.562	0.04%	50.537	0.01%	50.537	0.01%	50.54	0%
(0.34;0;0)	$T = 35.04$	35.061	0.06%	35.044	0.01%	35.044	0.01%	35.04	0%
(0.35;0;0)	$T = 20.00$	20	0.00%	20	0.00%	20	0.00%	20.00	0%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.3;0;0)	$T = 100.0$	100	0.00%	100	0.00%	100.0	0 %
(0.31;0;0)	$T = 82.98$	82.965	0.02%	82.983	0.00%	82.98	0 %
(0.32;0;0)	$T = 66.51$	66.519	0.01%	66.506	0.01%	66.51	0 %
(0.33;0;0)	$T = 50.54$	50.553	0.03%	50.537	0.01%	50.54	0 %
(0.34;0;0)	$T = 35.04$	35.01	0.09%	35.043	0.01%	35.04	0 %
(0.35;0;0)	$T = 20.00$	20	0.00%	20	0.00%	20.00	0 %

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 1\ 730$	1 704.01	1.50%	1 729.5	0.03%	1 729.6	0.02%	1 702	1.62%
(0.31;0;0)	$\varphi = 1\ 674$	1 652.9	1.26%	1 673.9	0.01%	1 674	0.00%	1 666	0.48%
(0.32;0;0)	$\varphi = 1\ 622$	1 602.9	1.18%	1 621.7	0.02%	1 621.7	0.02%	1 614	0.49%
(0.33;0;0)	$\varphi = 1\ 573$	1 553.89	1.21%	1 572.5	0.03%	1 572.5	0.03%	1 565	0.51%
(0.34;0;0)	$\varphi = 1\ 526$	1 506.28	1.29%	1 526.4	0.03%	1 526.2	0.01%	1 519	0.46%
(0.35;0;0)	$\varphi = 1\ 483$	1 506.285	1.57%	1 482.4	0.04%	1 482.5	0.03%	1 505	1.48%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 1\ 730$	1 699.11	1.79%	1 729.9	0.01%	1 702	1.62%
(0.31;0;0)	$\varphi = 1\ 674$	1 654.4	1.17%	1 674	0.00%	1 666	0.48%
(0.32;0;0)	$\varphi = 1\ 622$	1 627.6	0.35%	1 621.9	0.01%	1 614	0.49%
(0.33;0;0)	$\varphi = 1\ 573$	1 571.5	0.10%	1 572.8	0.01%	1 565	0.51%
(0.34;0;0)	$\varphi = 1\ 526$	1 547.4	1.40%	1 526.2	0.01%	1 519	0.46%
(0.35;0;0)	$\varphi = 1\ 483$	1 494.3	0.76%	1 482.8	0.01%	1 505	1.48%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур (сверху) и теплового потока (снизу) при разбиении на треугольные элементы:



Тест 6.2.2: Полый цилиндр под воздействием постоянной температуры на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA01/89.

Рассматривается трёхмерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием постоянных температур.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $R_i = 0.30$ м, $R_e = 0.35$ м.

Граничные условия:

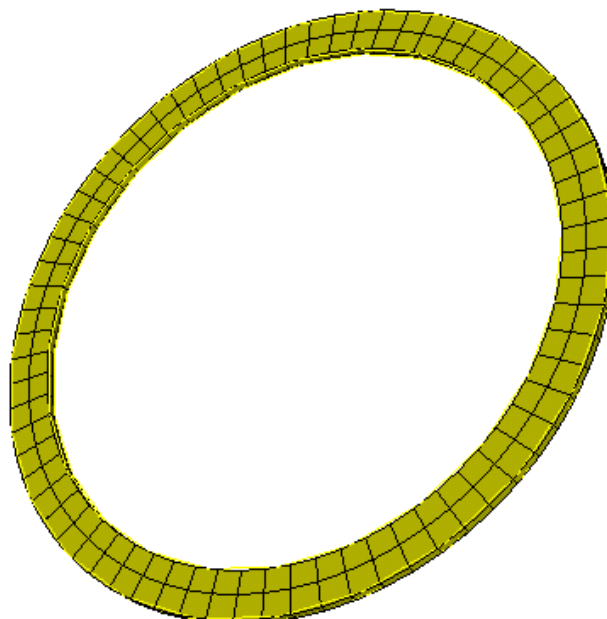
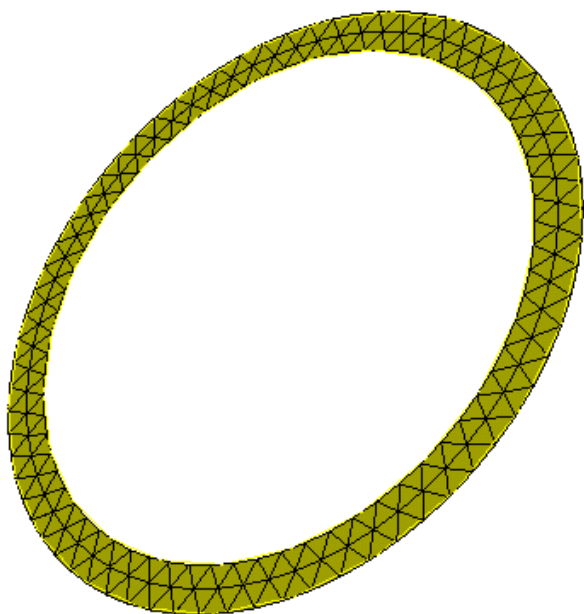
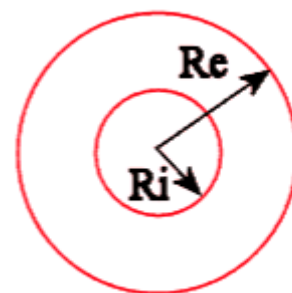
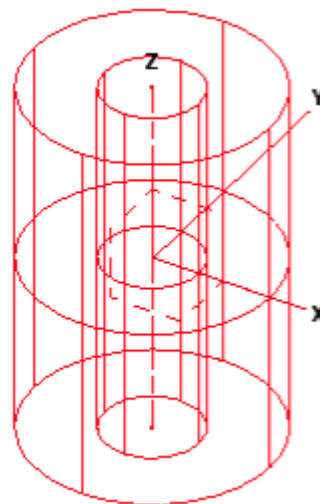
- Внутренняя температура $T_i = 100$ °С;
- Внешняя температура $T_e = 20$ °С;
- Торцы цилиндра закреплены по Z.

Параметры материала:

- Изотропный
- Коэффициент теплопроводности $V = 1$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (8 344 элемента);
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (8 344 элемента);
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (917 элементов);
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (917 элементов);
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (917 элементов).



Критерий прохождения теста:

- Сравнение значений температуры T и теплового потока φ в точках на поверхности цилиндра и внутри него[6]:
 - В точке (0.3;0;0) $T = 100.0$ °C, $\varphi = 1\,730$ Вт/м² с точностью 2%;
 - В точке (0.31;0;0) $T = 82.98$ °C, $\varphi = 1\,674$ Вт/м² с точностью 2%;
 - В точке (0.32;0;0) $T = 66.51$ °C, $\varphi = 1\,622$ Вт/м² с точностью 2%;
 - В точке (0.33;0;0) $T = 50.54$ °C, $\varphi = 1\,573$ Вт/м² с точностью 2%;
 - В точке (0.34;0;0) $T = 35.04$ °C, $\varphi = 1\,526$ Вт/м² с точностью 2%;
 - В точке (0.35;0;0) $T = 20.00$ °C, $\varphi = 1\,483$ Вт/м² с точностью 2%.

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.3;0;0)	$T = 100.0$	100	0.00%	99.992	0.01%	100	0.00%	100.0	0 %
(0.31;0;0)	$T = 82.98$	83	0.02%	82.977	0.00%	82.983	0.00%	82.98	0 %
(0.32;0;0)	$T = 66.51$	66.532	0.03%	66.495	0.02%	66.506	0.01%	66.51	0 %
(0.33;0;0)	$T = 50.54$	50.562	0.04%	50.531	0.02%	50.537	0.01%	50.54	0 %
(0.34;0;0)	$T = 35.04$	35.06	0.06%	35.037	0.01%	35.044	0.01%	35.04	0 %
(0.35;0;0)	$T = 20.00$	20	0.00%	20.016	0.08%	20	0.00%	20.00	0 %

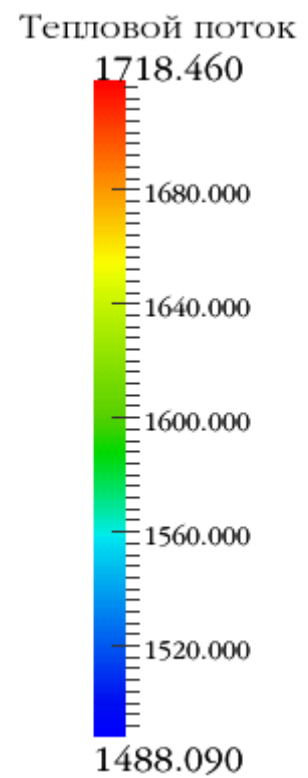
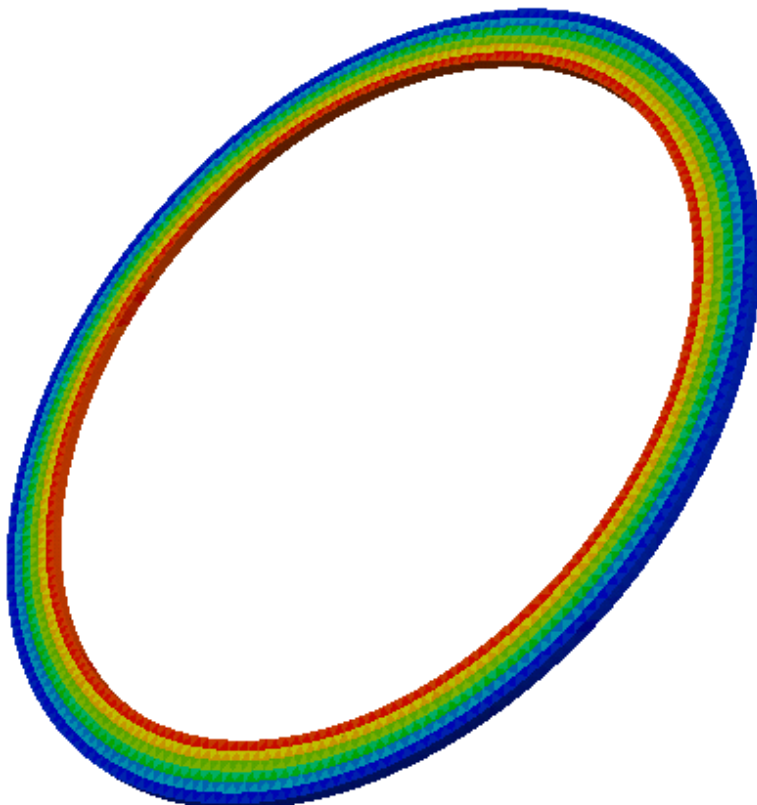
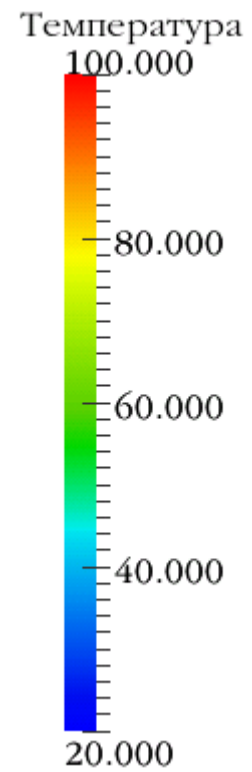
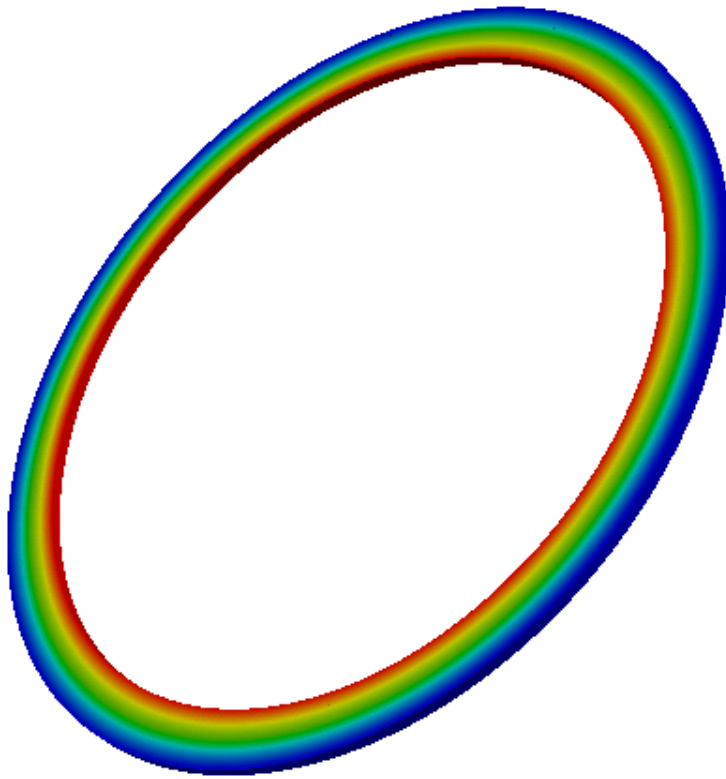
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.3;0;0)	$T = 100.0$	100	0.00%	99.975	0.03%	100.0	0 %
(0.31;0;0)	$T = 82.98$	83.006	0.03%	82.97	0.01%	82.98	0 %
(0.32;0;0)	$T = 66.51$	66.507	0.00%	66.503	0.01%	66.51	0 %
(0.33;0;0)	$T = 50.54$	50.578	0.08%	50.537	0.01%	50.54	0 %
(0.34;0;0)	$T = 35.04$	35.004	0.10%	35.044	0.01%	35.04	0 %
(0.35;0;0)	$T = 20.00$	20	0.00%	20.025	0.12%	20.00	0 %

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 1\ 730$	1 704.01	1.50%	1 729.5	0.03%	1 729.64	0.02%	1 702	1.62%
(0.31;0;0)	$\varphi = 1\ 674$	1 652.9	1.26%	1 673.9	0.01%	1 674	0.00%	1 666	0.48%
(0.32;0;0)	$\varphi = 1\ 622$	1 602.9	1.18%	1 621.7	0.02%	1 621.7	0.02%	1 614	0.49%
(0.33;0;0)	$\varphi = 1\ 573$	1 553.89	1.21%	1 572.5	0.03%	1 572.5	0.03%	1 565	0.51%
(0.34;0;0)	$\varphi = 1\ 526$	1 506.18	1.30%	1 526.3	0.02%	1 526.2	0.01%	1 519	0.46%
(0.35;0;0)	$\varphi = 1\ 483$	1 506.28	1.57%	1 482.5	0.03%	1 482.5	0.03%	1 505	1.48%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 1\ 730$	1 717	0.75%	1 729.8	0.01%	1 702	1.62%
(0.31;0;0)	$\varphi = 1\ 674$	1 661.55	0.74%	1 674.1	0.01%	1 666	0.48%
(0.32;0;0)	$\varphi = 1\ 622$	1 612.65	0.58%	1 622.2	0.01%	1 614	0.49%
(0.33;0;0)	$\varphi = 1\ 573$	1 575.9	0.18%	1 572.8	0.01%	1 565	0.51%
(0.34;0;0)	$\varphi = 1\ 526$	1 530.7	0.31%	1 526.3	0.02%	1 519	0.46%
(0.35;0;0)	$\varphi = 1\ 483$	1 494.4	0.77%	1 482.8	0.01%	1 505	1.48%



- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур (сверху) и теплового потока (снизу) при разбиении на тетраэдральные элементы:



Тест 6.2.3: Полый цилиндр под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (2D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA03/89.

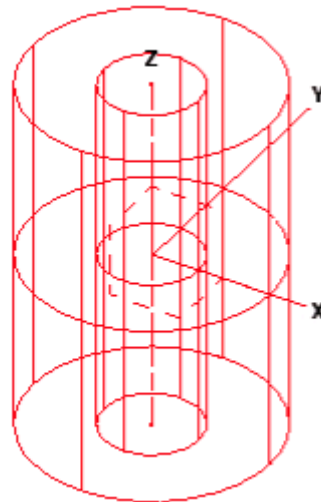
Рассматривается двумерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием конвекции.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $R_i = 0.30$ м, $R_e = 0.391$ м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности:
 - $h_i = 150$ Вт/м²/°С;
 - $T_i = 500$ °С;
- Конвекция на внешней поверхности:
 - $h_e = 142$ Вт/м²/°С;
 - $T_e = 20$ °С.

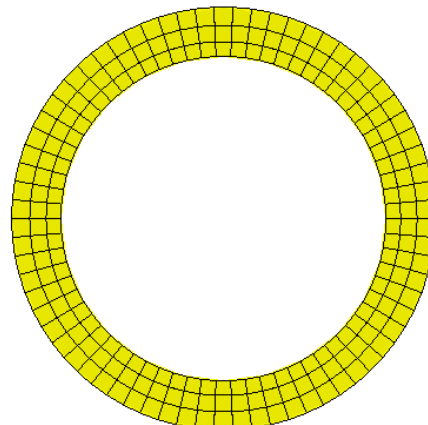
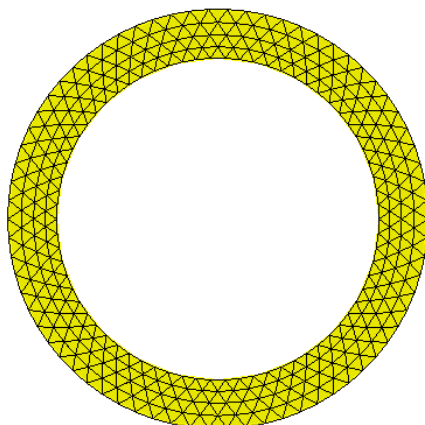
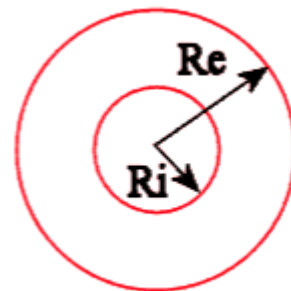


Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $V = 40$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3 (4 000 элементов);
 - 6-узловые треугольники Tri6 (4 000 элементов);
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (1 588 элементов);
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (1 588 элементов);
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (1 588 элементов).



Критерий прохождения теста:

- Сравнение значений температуры T и теплового потока φ в точках на внешней и внутренней поверхности цилиндра[6]:
- В точке (0.3;0;0) $T = 272.3$ °C, $\varphi = 3.416E4$ Вт/м² с точностью 2%;
- В точке (0.391;0;0) $T = 205.1$ °C, $\varphi = 2.628E4$ Вт/м² с точностью 2%.

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

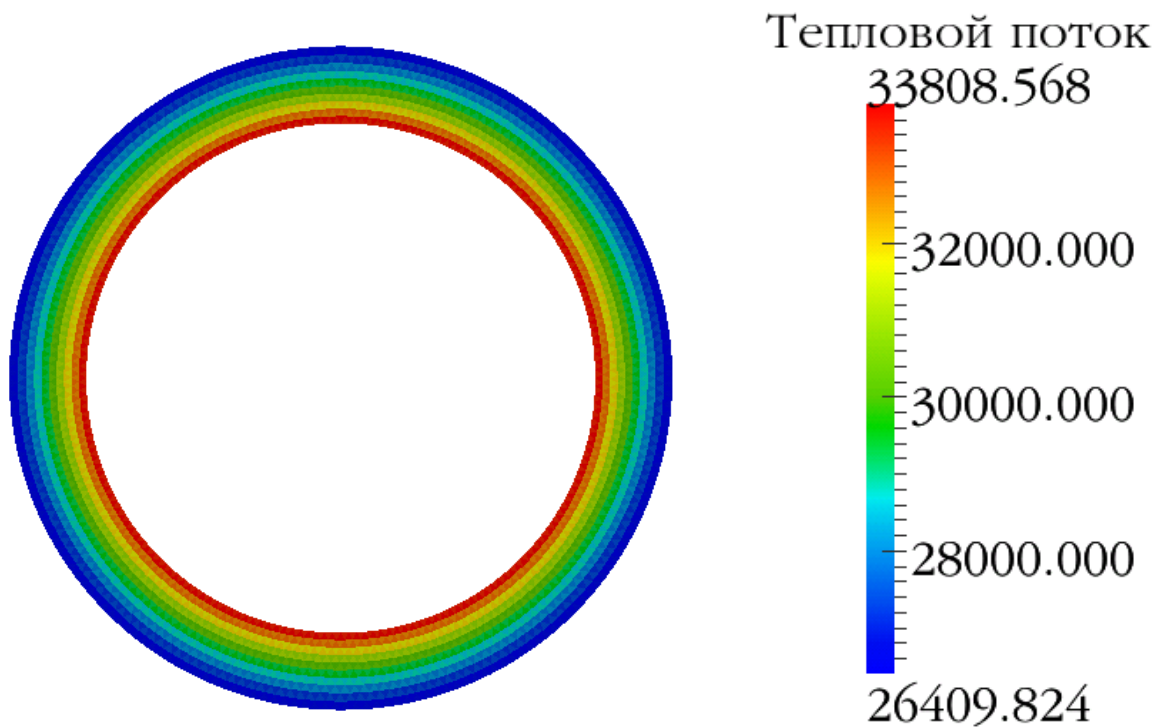
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9		Значение, °C	Ошибка
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка		
(0.3;0;0)	$T = 272.3$	272.34	0.01%	272.35	0.02%	272.35	0.02%	272.5	0.07%
(0.391;0;0)	$T = 205.1$	204.58	0.25%	208.68	1.75%	208.68	1.75%	204.6	0.24%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6		Значение, °C	Ошибка
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка		
(0.3;0;0)	$T = 272.3$	272.35	0.02%	272.35	0.02%	272.5	0.07%
(0.391;0;0)	$T = 205.1$	204.58	0.25%	204.57	0.26%	204.6	0.24%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 3.416E4$	33 693.05	1.37%	34 132	0.08%	34 141	0.06%	3.38E+04	1.11%
(0.391;0;0)	$\varphi = 2.628E4$	26 666.72	1.47%	26 633.04	1.34%	26 633.04	1.34%	2.64E+04	0.53%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 3.416E4$	33 517.13	1.88%	34 145	0.04%	3.38E+04	1.11%
(0.391;0;0)	$\varphi = 2.628E4$	26 411	0.50%	26 206	0.28%	2.64E+04	0.53%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур (сверху) и теплового потока (снизу) при разбиении на треугольные элементы:



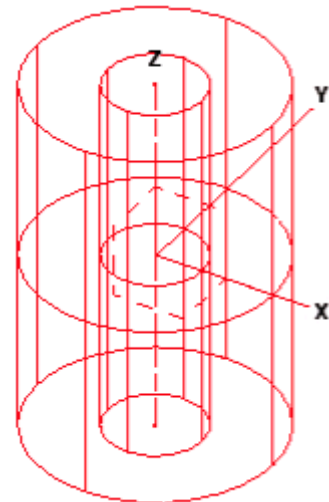
Тест 6.2.4: Полый цилиндр под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA03/89.

Рассматривается трёхмерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием конвекции.

Геометрическая модель (размеуказаны в метрах):

- $R_i = 0.30$ м, $R_e = 0.391$ м.



Граничные условия:

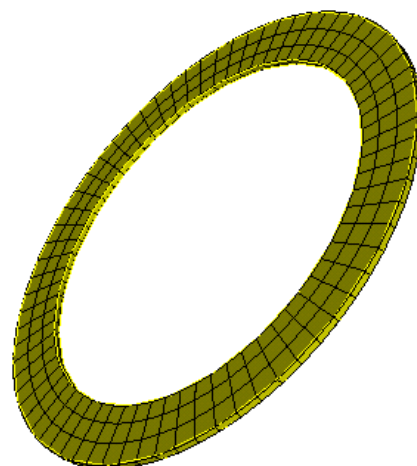
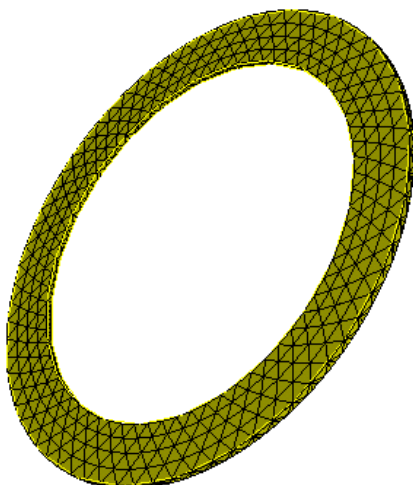
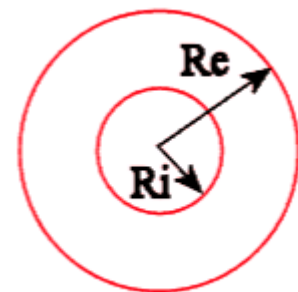
- Конвекция на внутренней поверхности:
 - $h_i = 150$ Вт/м²/°С;
 - $T_i = 500$ °С;
- Конвекция на внешней поверхности:
 - $h_e = 142$ Вт/м²/°С;
 - $T_e = 20$ °С.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $\nu = 40$ Вт/(м ·°С).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (10 837 элементов);
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (10 837 элементов);
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (1 588 элементов);
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (1 588 элементов);
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (1 588 элементов).



Критерий прохождения теста:

- Сравнение значений температуры T и теплового потока φ в точках на внешней и внутренней поверхности цилиндра[6]:
 - В точке (0.3;0;0) $T = 272.3$ °C, $\varphi = 3.416E4$ Вт/м² с точностью 2%;
 - В точке (0.391;0;0) $T = 205.1$ °C, $\varphi = 2.628E4$ Вт/м² с точностью 2%.

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

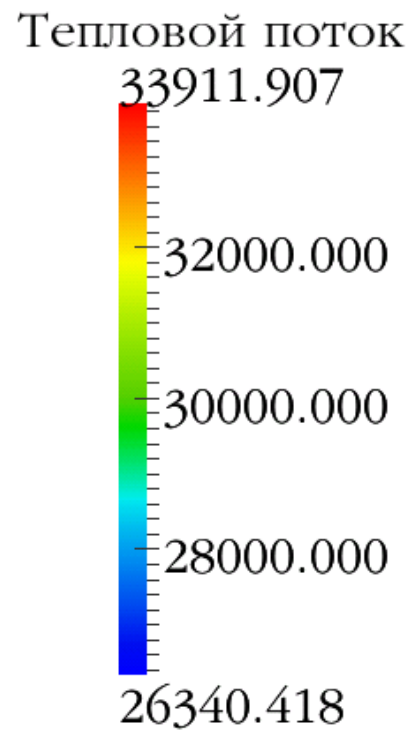
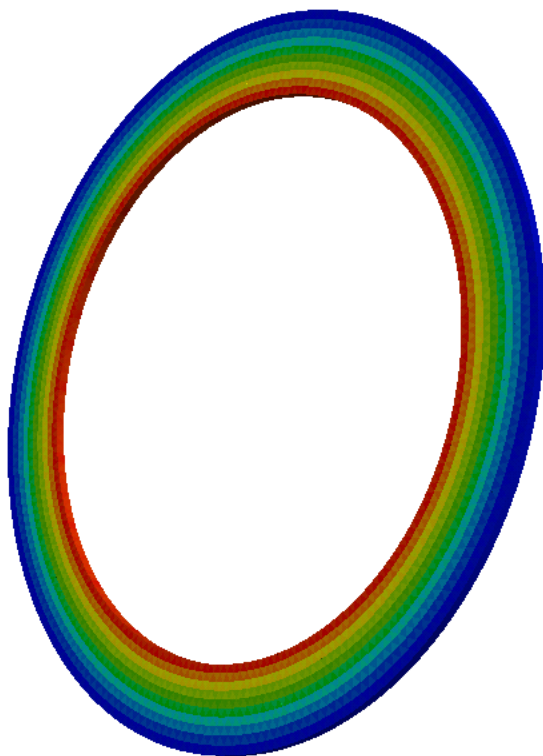
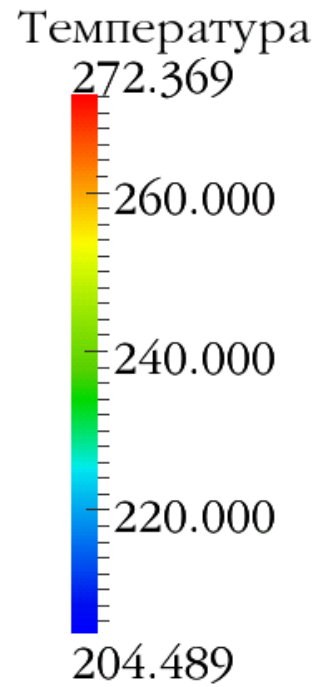
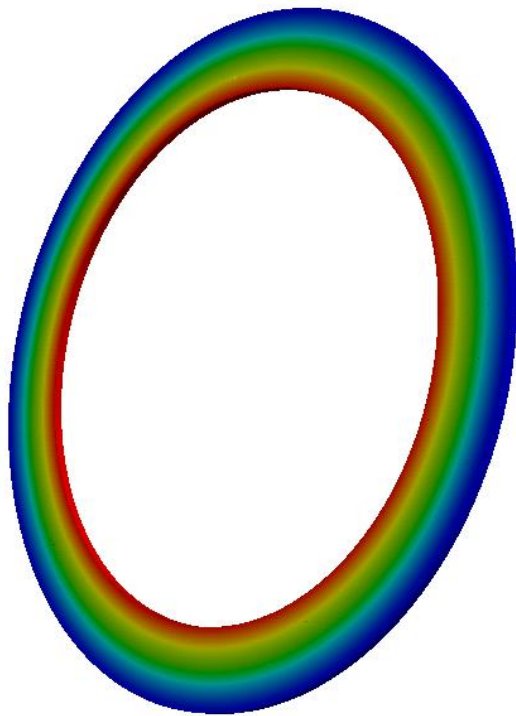
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27		Значение, °C	Ошибка
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка		
(0.3;0;0)	$T = 272.3$	272.34	0.01%	272.35	0.02%	272.353	0.02%	272.5	0.07%
(0.391;0;0)	$T = 205.1$	204.58	0.25%	204.58	0.25%	204.57	0.26%	204.6	0.24%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10		Значение, °C	Ошибка
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка		
(0.3;0;0)	$T = 272.3$	272.35	0.02%	272.34	0.01%	272.5	0.07%
(0.391;0;0)	$T = 205.1$	204.58	0.25%	204.58	0.25%	204.6	0.24%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 3.416E4$	33 693.05	1.37%	34 131.00	0.08%	34 140.7	0.06%	3.38E+04	1.11%
(0.391;0;0)	$\varphi = 2.628E4$	26 570.54	1.11%	26 201	0.30%	26 202	0.30%	2.64E+04	0.53%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 3.416E4$	33 813.18	1.02%	34 144	0.05%	3.38E+04	1.11%
(0.391;0;0)	$\varphi = 2.628E4$	26 340.658	0.23%	26 209	0.27%	2.64E+04	0.53%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур (сверху) и теплового потока (снизу) при разбиении на тетраэдральные элементы:





Тест 6.2.5: Полый цилиндр из двух материалов под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (2D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA08/89.

Рассматривается двумерная задача о полом цилиндре, сделанном из двух материалов, на внутреннюю и внешнюю поверхности которого действует конвекция.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $R_i = 0.30$ м, $R_m = 0.35$ м, $R_e = 0.37$ м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности:

$$- h_i = 150 \text{ Вт/м}^2/\text{°C};$$

$$- T_i = 70 \text{ °C}.$$

- Конвекция на внешней поверхности:

$$- h_e = 200 \text{ Вт/м}^2/\text{°C};$$

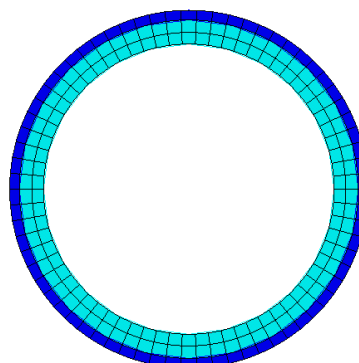
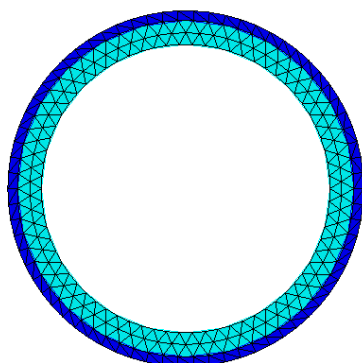
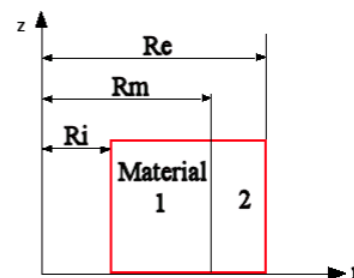
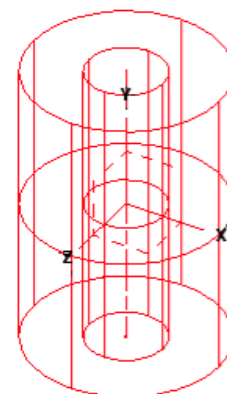
$$- T_e = -15 \text{ °C}.$$

Параметры материалов:

- Изотропные;
- Коэффициент теплопроводности материала №1 $V_1 = 40$ Вт/(м · °C);
- Коэффициент теплопроводности материала №2 $V_2 = 20$ Вт/(м · °C).

Сетка:

- Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3 (49 600 элементов);
 - 6-узловые треугольники Tri6 (49 600 элементов);
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (21 083 элемента);
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (21 083 элемента);
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (21 083 элемента).



Критерий прохождения теста:

- Сравнение значений теплового потока φ в точках на внешней и внутренней поверхности цилиндра, а также в точке стыка материалов[6]:
- В точке (0.3;0;0) $\varphi = 6\,687$ Вт/м² с точностью 4%;
- В точке (0.35;0;0) $\varphi = 5\,732$ Вт/м² с точностью 4%.
- В точке (0.37;0;0) $\varphi = 5\,422$ Вт/м² с точностью 4%.

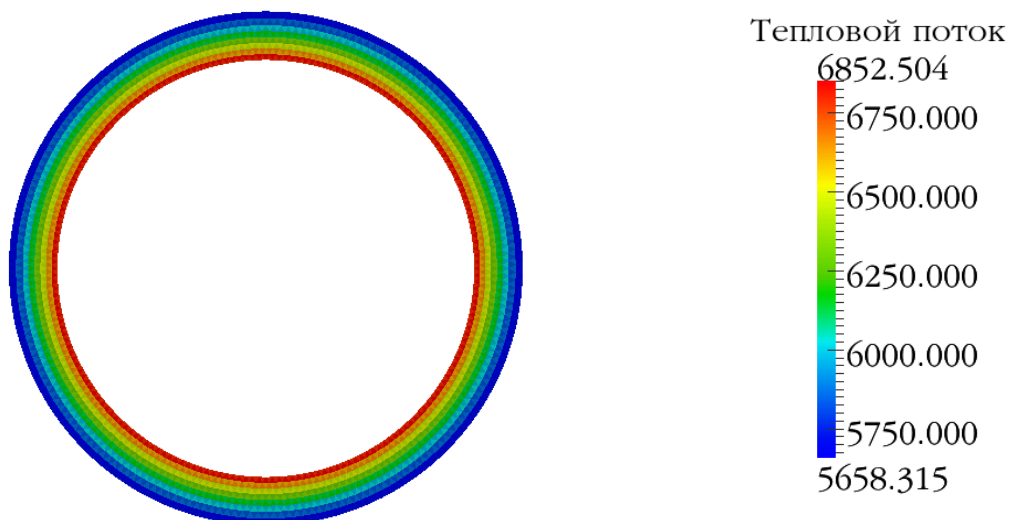
Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 6\,687$	6887.255	2.99%	6914	3.39%	6914.1	3.40%	6 609	1.17%
(0.35;0;0)	$\varphi = 5\,732$	5949.946	3.80%	5926.3	3.39%	5926.4	3.39%	5 768	0.63%
(0.37;0;0)	$\varphi = 5\,422$	5629.443	3.83%	5628.9	3.82%	5628.9	3.82%	5 497	1.38%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 6\,687$	6882.453	2.92%	6914.1	3.40%	6 609	1.17%
(0.35;0;0)	$\varphi = 5\,732$	5938.9	3.61%	5926.4	3.39%	5 768	0.63%
(0.37;0;0)	$\varphi = 5\,422$	5618.4	3.62%	5607.6	3.42%	5 497	1.38%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения теплового потока при разбиении на треугольные элементы:



Тест 6.2.6: Полый цилиндр из двух материалов под воздействием конвекции на внутреннюю и внешнюю поверхность (3D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA08/89.

Рассматривается трёхмерная задача о полом цилиндре, сделанном из двух материалов, на внутреннюю и внешнюю поверхность которого действует конвекция.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $R_i = 0.30$ м, $R_m = 0.35$ м, $R_e = 0.37$ м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности:

- $h_i = 150$ Вт/м²/°С;
- $T_i = 70$ °С.

- Конвекция на внешней поверхности:

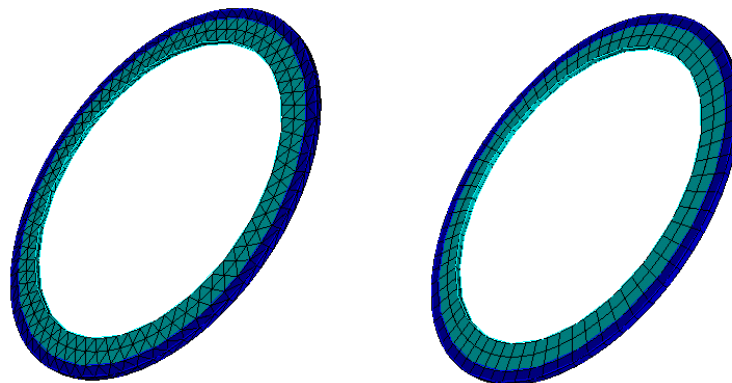
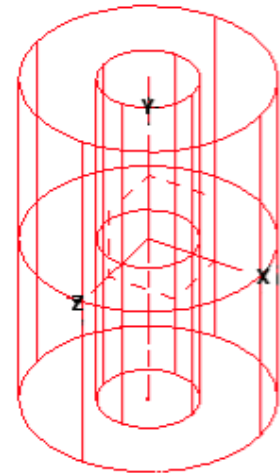
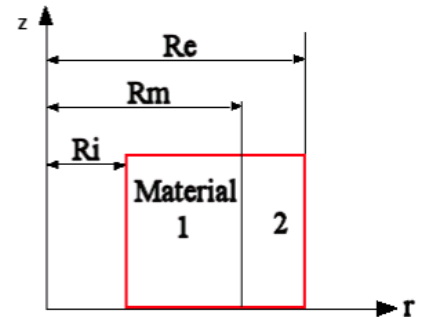
- $h_e = 200$ Вт/м²/°С;
- $T_e = -15$ °С.

Параметры материалов:

- Изотропные;
- Коэффициент теплопроводности материала №1 $V_1 = 40$ Вт/(м·°С);
- Коэффициент теплопроводности материала №2 $V_2 = 20$ Вт/(м·°С).

Сетка:

- Пять типов конечных элементов (пять отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (742 829 элементов);
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (742 829 элементов);
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (21 083 элементов);
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (21 083 элементов);
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (21 083 элементов).



Критерий прохождения теста:

- Сравнение значений теплового потока φ в точках на внешней и внутренней поверхности цилиндра, а также в точке стыка материалов[6]:
- В точке (0.3;0;0) $\varphi = 6\ 687\ \text{Вт/м}^2$ с точностью 4%;
- В точке (0.35;0;0) $\varphi = 5\ 732\ \text{Вт/м}^2$ с точностью 4%.
- В точке (0.37;0;0) $\varphi = 5\ 422\ \text{Вт/м}^2$ с точностью 4%.

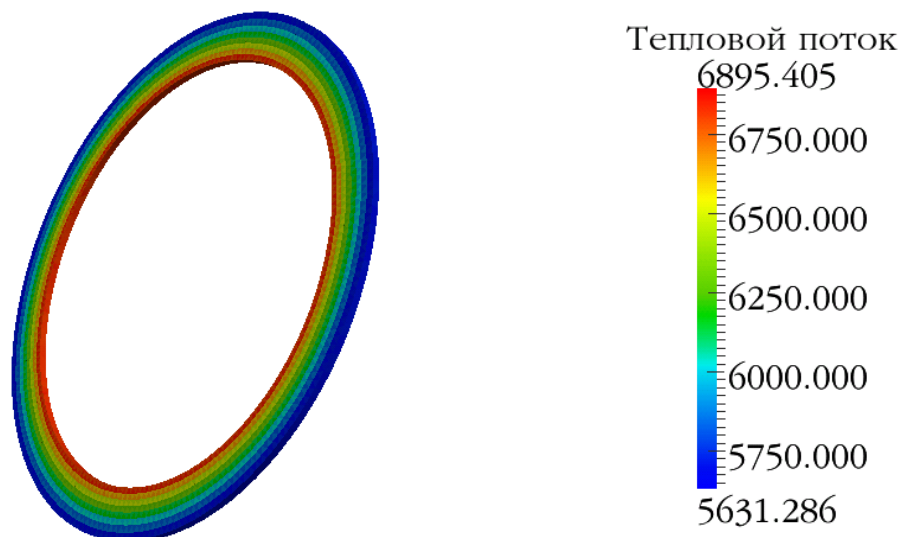
Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 6\ 687$	6887.215	2.99%	6914	3.39%	6914.1	3.40%	6 609	1.17%
(0.35;0;0)	$\varphi = 5\ 732$	5949.966	3.80%	5926.4	3.39%	5926.36	3.39%	5 768	0.63%
(0.37;0;0)	$\varphi = 5\ 422$	5628.305	3.80%	5607.6	3.42%	5606.02	3.39%	5 497	1.38%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0.3;0;0)	$\varphi = 6687$	6886.503	2.98%	6914.12	3.40%	6 609	1.17%
(0.35;0;0)	$\varphi = 5732$	5951.204	3.82%	5926.48	3.39%	5 768	0.63%
(0.37;0;0)	$\varphi = 5422$	5607.507	3.42%	5606.23	3.40%	5 497	1.38%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения теплового потока при разбиении на тетраэдральные элементы:



Тест 6.2.7: Теплопроводность цилиндрической стены (2D)

Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977.

Рассматривается двумерная задача о цилиндрической стене, внутри которой равномерно распределены источники тепла; генерируемое ими тепло рассеивается в окружающую среду через внешнюю поверхность трубки.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Внутренний радиус $r_1 = 0.1$ м;
- Внешний радиус $r_2 = 0.25$ м;
- Длина стены $L = 1$ м.

Граничные условия:

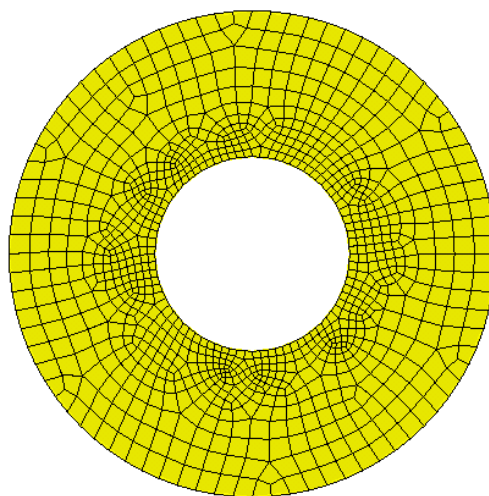
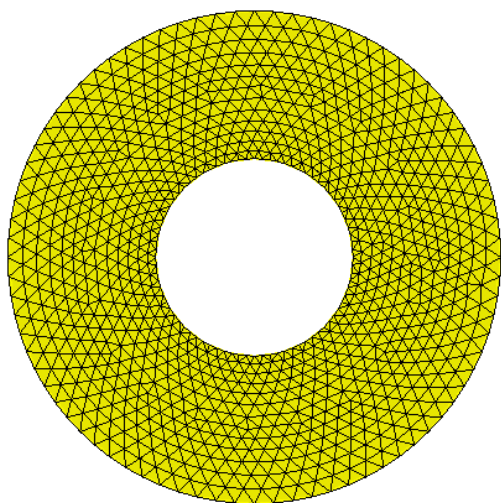
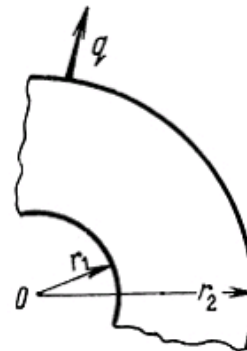
- Температура на внутренней поверхности $T_i = 373.15$ К;
- Тепловой поток на внешней поверхности: $\varphi = -15\,000$ Вт/м².

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $V = 43$ Вт/(м · К).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3 (6 372 элемента);
 - 6-узловые треугольники Tri6 (6 372 элемента);
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (3 142 элемента);
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (3 142 элемента);
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (3 142 элемента).



Критерий прохождения теста:

- Сравнение значения температуры T в точке на внешней поверхности стены[]:
- В точке (0.25;0;0) T = 21.71 К с точностью 4%.

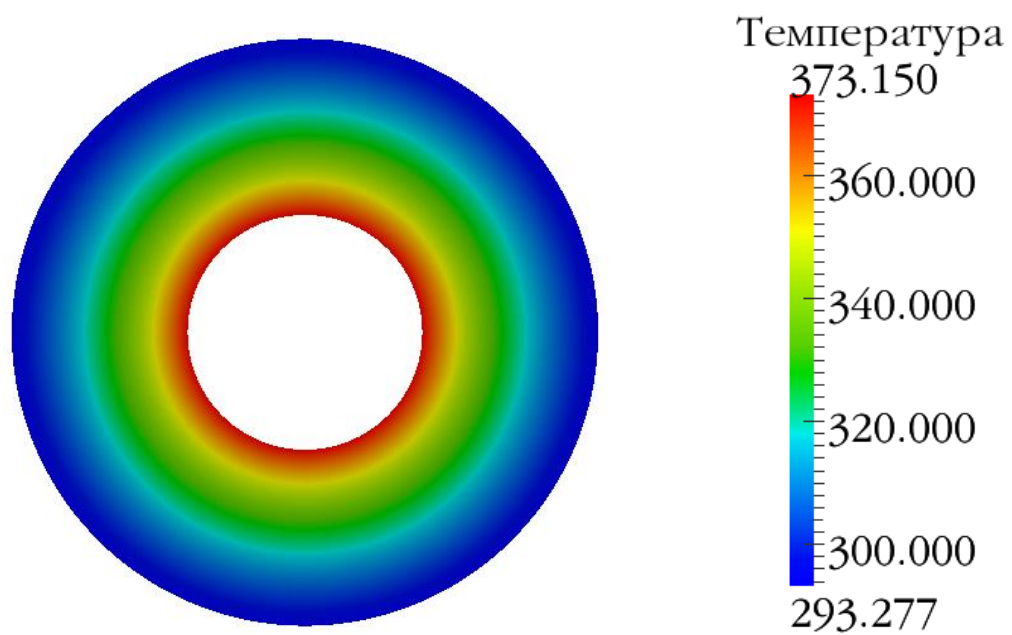
Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и AutoFEM[16,25]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, К	Численный анализ							
		FIDESYS						AutoFEM	
		Quad4		Quad8		Quad9			
		Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка
(0.25;0;0)	T = 303.081513	293.28	3.23%	293.24	3.25%	293.24	3.25%	303.7442	0.21%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, К	Численный анализ					
		FIDESYS				AutoFEM	
		Tri3		Tri6			
		Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка
(0.25;0;0)	T = 303.081513	293.28	3.23%	293.24	3.25%	303.7442	0.21%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур при разбиении на треугольные элементы:



Тест 6.2.8: Теплопроводность цилиндрической стены (3D)

Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977.

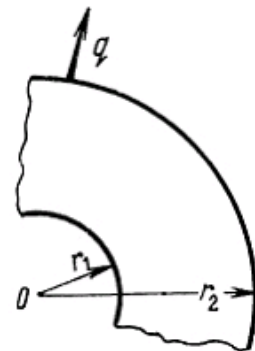
Рассматривается трёхмерная задача о цилиндрической стене, внутри которой равномерно распределены источники тепла; генерируемое ими тепло рассеивается в окружающую среду через внешнюю поверхность трубки.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Внутренний радиус $r_1 = 0.1$ м;
- Внешний радиус $r_2 = 0.25$ м;
- Длина стены $L = 1$ м.

Граничные условия:

- Температура на внутренней поверхности $T_i = 373.15$ К;
- Тепловой поток на внешней поверхности: $\varphi = -15\,000$ Вт/м².

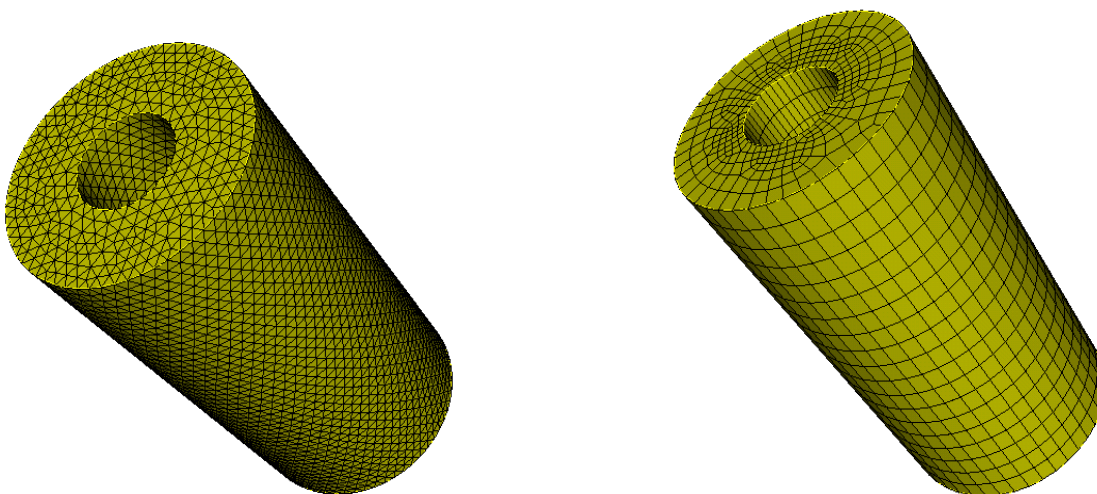


Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $V = 43$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (104 848 элементов);
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (104 848 элементов);
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (6 327 элементов);
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (6 327 элементов);
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (6 327 элементов).



Критерий прохождения теста:

- Сравнение значения температуры T в точке на внешней поверхности стены[16]:
 - В точке (0.25;0;0) T = 21.71 К с точностью 4%.

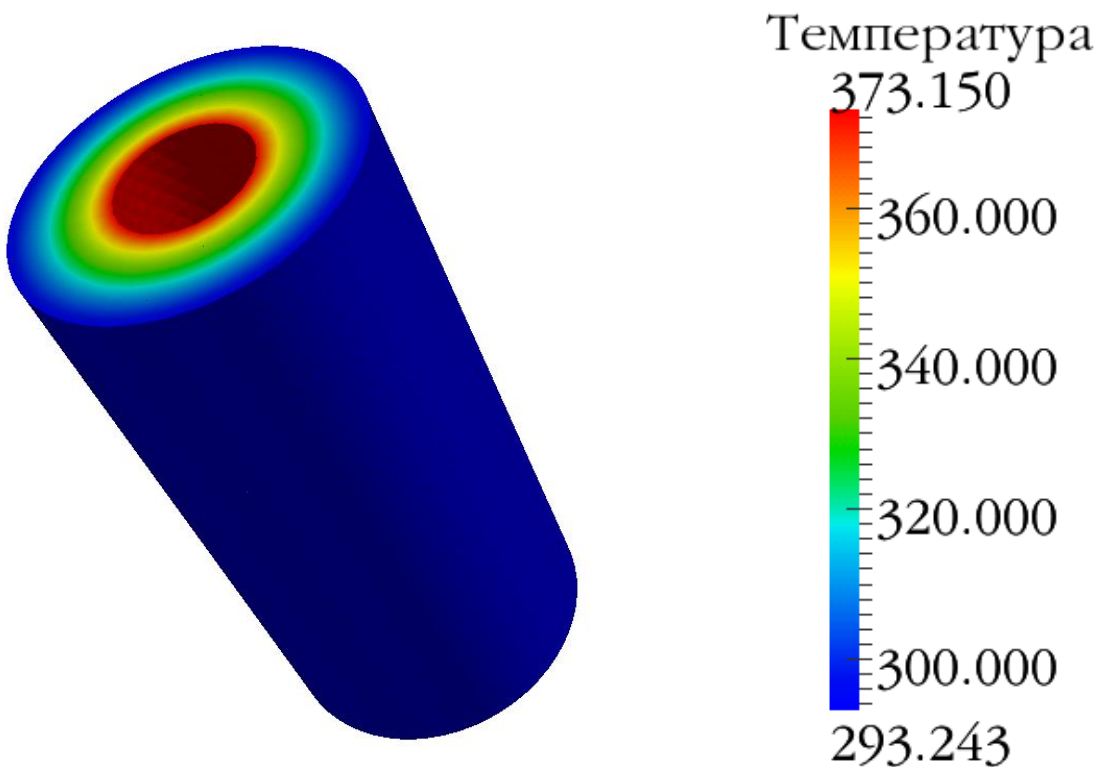
Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и AutoFEM[16,25]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, К	Численный анализ							
		FIDESYS						AutoFEM	
		HEX8		HEX20		HEX27			
		Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка
(0.25;0;0)	T = 303.081513	293.9	3.03%	293.6	3.13%	293.241	3.25%	303.7442	0.21%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, К	Численный анализ					
		FIDESYS				AutoFEM	
		TETRA4		TETRA10			
		Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка	Значение, К	Ошибка
(0.25;0;0)	T = 303.081513	293.63	3.12%	293.59	3.13%	303.7442	0.21%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур при разбиении на тетраэдральные элементы:



Тест 6.2.9: Одномерная стена под воздействием постоянной конвекции (2D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLL03/89.

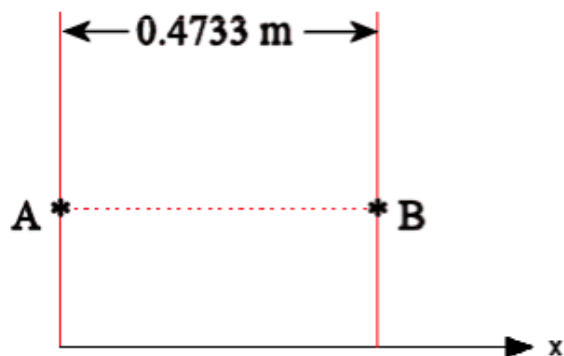
Рассматривается двумерная задача об одномерной стене, на обеих поверхностях которой происходит процесс конвективного теплообмена.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ширина стены $L = 0.4733$ м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности:
 - $h_i = 20$ Вт/м²/°С;
 - $T_i = -20$ °С;
- Конвекция на внешней поверхности:
 - $h_e = 10$ Вт/м²/°С;
 - $T_e = 500$ °С.

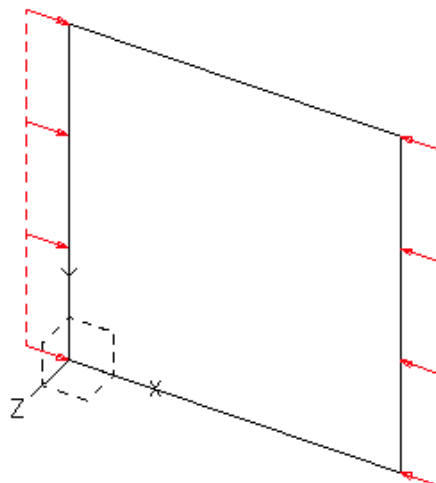
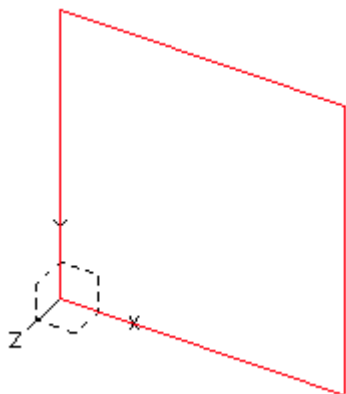


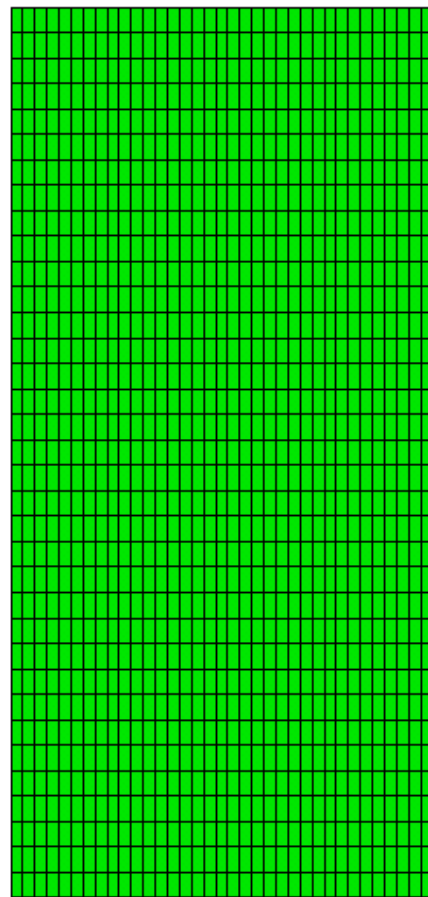
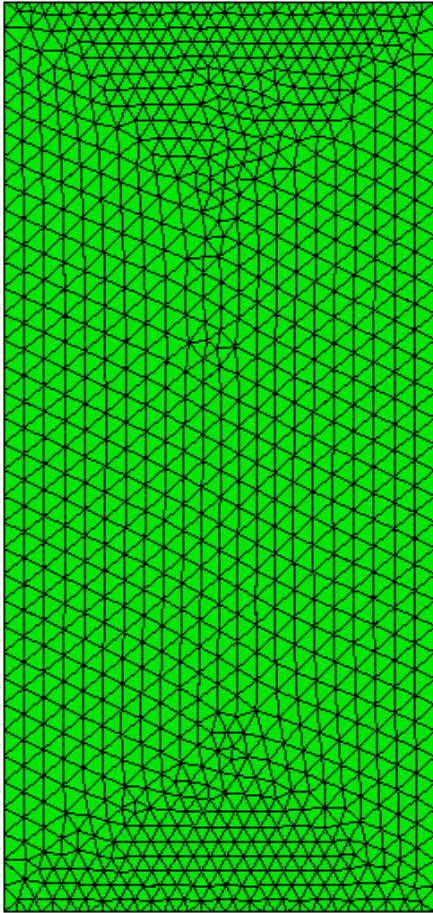
Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $\nu = 1$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 3-узловые треугольники Tri3 (15 460 элементов);
 - 6-узловые треугольники Tri6 (15 460 элементов);
 - 4-узловые четырёхугольники Quad4 (10 000 элементов);
 - 8-узловые четырёхугольники Quad8 (10 000 элементов);
 - 9-узловые четырёхугольники Quad9 (10 000 элементов).





Критерий прохождения теста:

- Сравнение значений температуры T в точках на внешней и внутренней поверхности стены, а также значения теплового потока φ в точке внутри стены[6]:
 - В точке $(-0.23655;0;0)$ $T = 21.71$ °C с точностью 1%;
 - В точке $(0.23655;0;0)$ $T = 416.6$ °C с точностью 1%.
 - В точке $(0;0;0)$ $\varphi = 834.2$ Вт/м² с точностью 1%.

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9		Значение, °C	Ошибка
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка		
(-0.23655;0;0)	T = 21.71	21.797	0.40%	21.7969	0.40%	21.7969	0.40%	21.71	0%
(0.23655;0;0)	T = 416.6	416.49	0.03%	412.4	1.01%	412.4	1.01%	416.6	0%

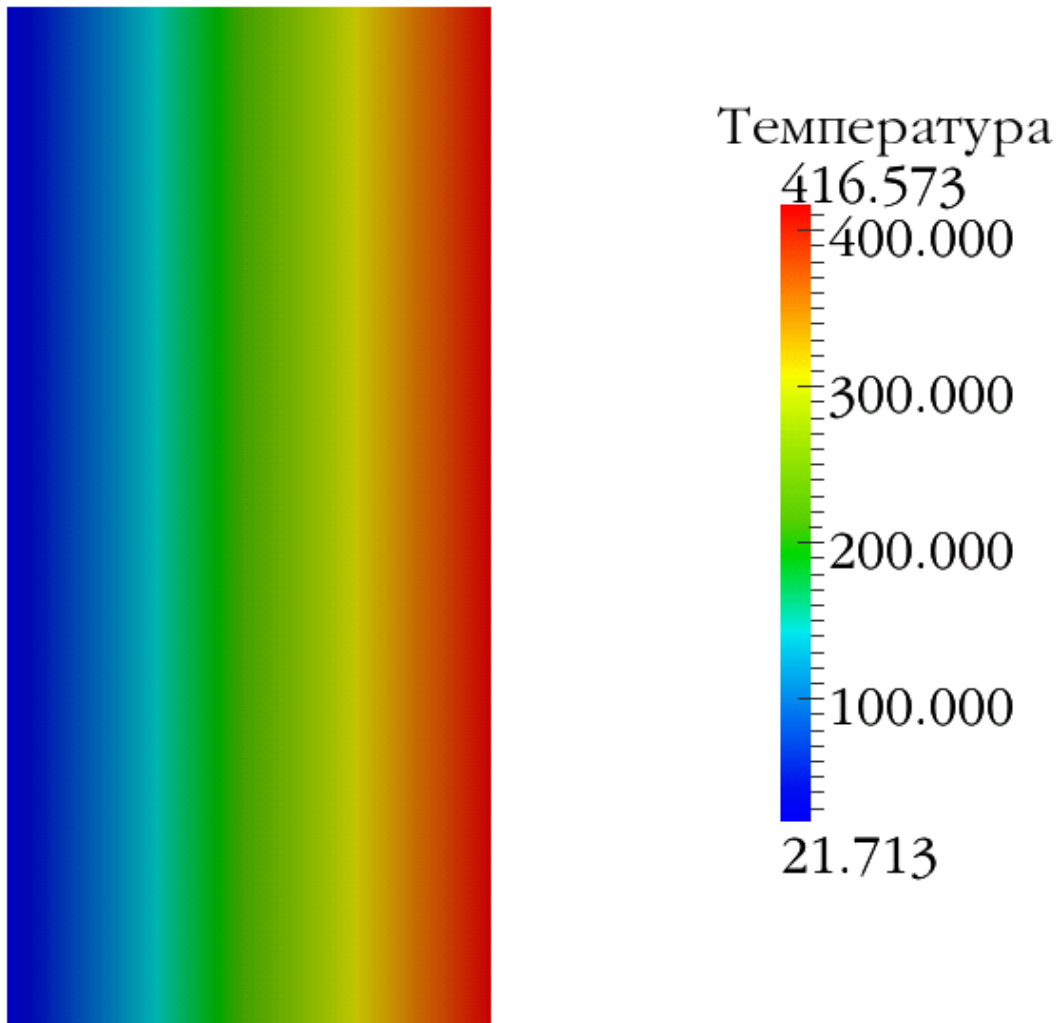
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6		Значение, °C	Ошибка
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка		
(-0.23655;0;0)	T = 21.71	21.797	0.40%	21.797	0.40%	21.71	0%
(0.23655;0;0)	T = 416.6	416.49	0.03%	416.49	0.03%	416.6	0%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		Quad4		Quad8		Quad9		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0;0;0)	φ = 834.2	834.27	0.01%	834.27	0.01%	834.27	0.01%	834.3	0.01%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		Tri3		Tri6		Значение, Вт/м ²	Ошибка
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка		
(0;0;0)	φ = 834.2	834.27	0.01%	834.27	0.01%	834.3	0.01%



- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур при разбиении на треугольные элементы:



Тест 6.2.10: Одномерная стена под воздействием постоянной конвекции (3D)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLL03/89.

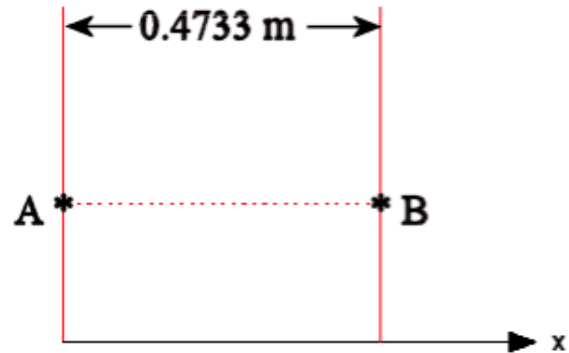
Рассматривается трёхмерная задача об одномерной стене, на обеих поверхностях которой происходит процесс конвективного теплообмена.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ширина стены $L = 0.4733$ м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности:
 - $h_i = 20$ Вт/м²/°С;
 - $T_i = -20$ °С;
- Конвекция на внешней поверхности:
 - $h_e = 10$ Вт/м²/°С;
 - $T_e = 500$ °С.

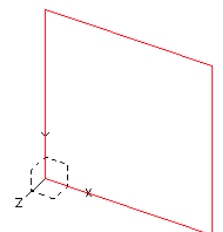
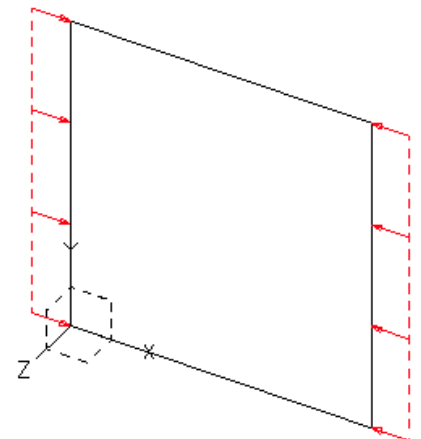


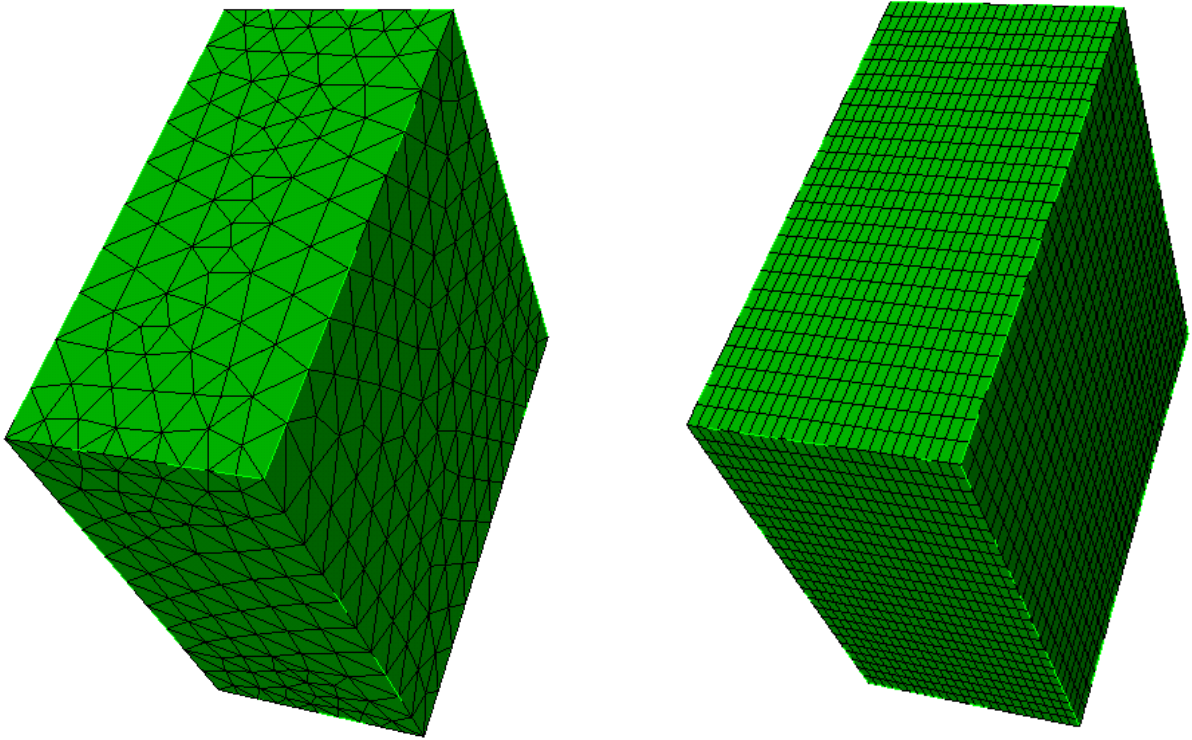
Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $\nu = 1$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Пять типов элементов (пять отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (6 424 элемента);
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (6 424 элемента);
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (15 625 элементов);
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (15 625 элементов);
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (15 625 элементов).
- Шесть типов спектральных элементов (шесть отдельных тестов):
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 3го порядка (512 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 4го порядка (216 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex20s 3го порядка (512 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex20s 4го порядка (216 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex27s 3го порядка (512 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex27s 4го порядка (216 элементов)





Критерий прохождения теста:

- Сравнение значений температуры T в точках на внешней и внутренней поверхности стены, а также значения теплового потока φ в точке внутри стены[6]:
 - В точке $(-0.23655;0;0)$ $T = 21.71$ °C с точностью 1%;
 - В точке $(0.23655;0;0)$ $T = 416.6$ °C с точностью 1%.
 - В точке $(0;0;0)$ $\varphi = 834.2$ Вт/м² с точностью 1%.

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и NASTRAN[6]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
$(-0.23655;0;0)$	$T = 21.71$	21.797	0.40%	21.812	0.47%	21.797	0.40%	21.71	0%
$(0.23655;0;0)$	$T = 416.6$	416.49	0.03%	416.47	0.03%	416.49	0.03%	416.6	0%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10			
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(-0.23655;0;0)	T = 21.71	21.797	0.40%	21.825	0.53%	21.71	0%
(0.23655;0;0)	T = 416.6	416.49	0.03%	416.46	0.03%	416.6	0%

- Спектральные элементы:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ FIDESYS (HEX8s)				Численный анализ FIDESYS (HEX20s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(-0.23655;0;0)	T = 21.71	21.7969	0.40%	21.7969	0.40%	21.7969	0.40%	21.7969	0.40%
(0.23655;0;0)	T = 416.6	416.49	0.03%	416.49	0.03%	416.49	0.03%	416.49	0.03%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ FIDESYS (HEX27s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(-0.23655;0;0)	T = 21.71	21.7969	0.40%	21.7969	0.40%
(0.23655;0;0)	T = 416.6	416.49	0.03%	416.49	0.03%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м²	Численный анализ							
		FIDESYS						NASTRAN	
		HEX8		HEX20		HEX27			
		Значение, Вт/м²	Ошибка	Значение, Вт/м²	Ошибка	Значение, Вт/м²	Ошибка	Значение, Вт/м²	Ошибка
(0;0;0)	φ = 834.2	834.27	0.01%	834.27	0.01%	834.27	0.01%	834.3	0.01%

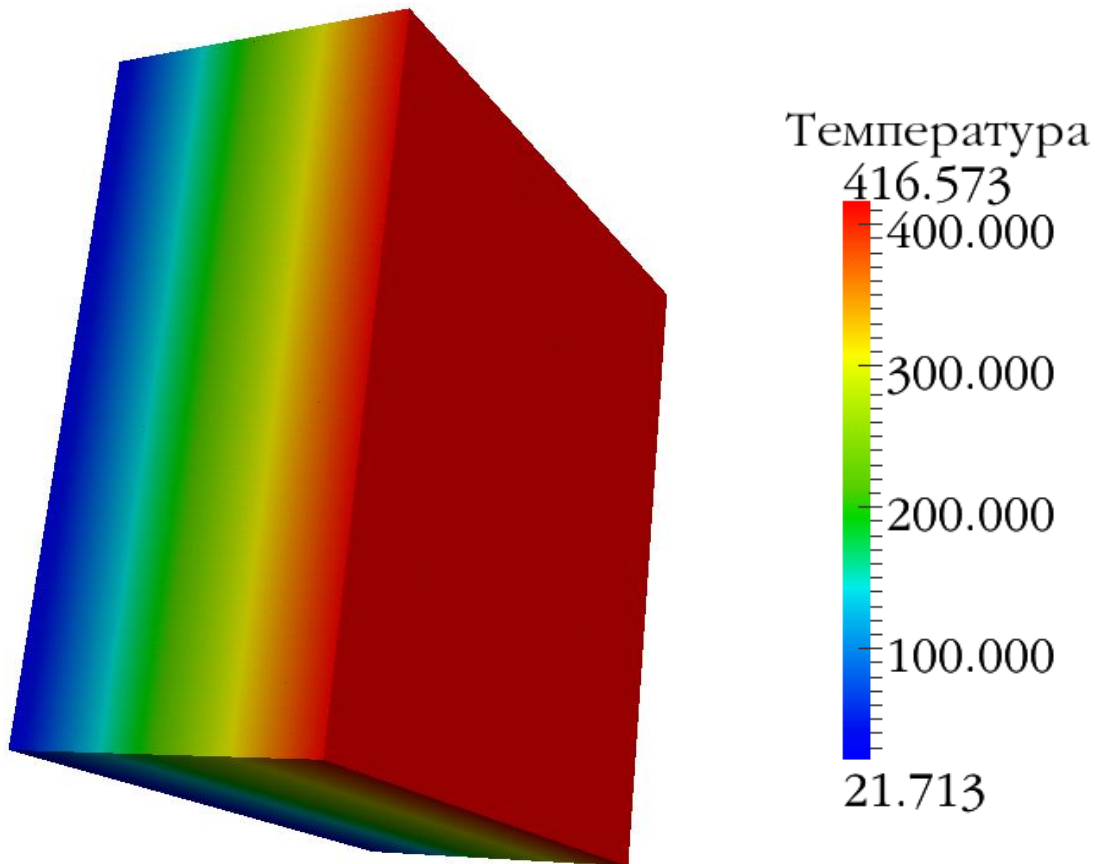
Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м²	Численный анализ					
		FIDESYS				NASTRAN	
		TETRA4		TETRA10			
		Значение, Вт/м²	Ошибка	Значение, Вт/м²	Ошибка	Значение, Вт/м²	Ошибка
(0;0;0)	φ = 834.2	834.27	0.01%	834.27	0.01%	834.3	0.01%

- Спектральные элементы:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ FIDESYS (HEX8s)				Численный анализ FIDESYS (HEX20s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0;0;0)	$\varphi = 834.2$	834.269	0.01%	834.269	0.01%	834.269	0.01%	834.269	0.01%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, Вт/м ²	Численный анализ FIDESYS (HEX27s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, Вт/м ²	Ошибка	Значение, Вт/м ²	Ошибка
(0;0;0)	$\varphi = 834.2$	834.269	0.01%	834.269	0.01%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур при разбиении на тетраэдральные элементы:



Тест 6.2.11: Цилиндрический стержень под воздействием теплового потока (балочная модель)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA05/89.

Рассматривается трёхмерная задача о цилиндрическом стержне, на оба торца которого воздействует температура, а на внешнюю поверхность воздействует тепловой поток.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $L = 1$ м, $r = 0.01$ м.

Граничные условия:

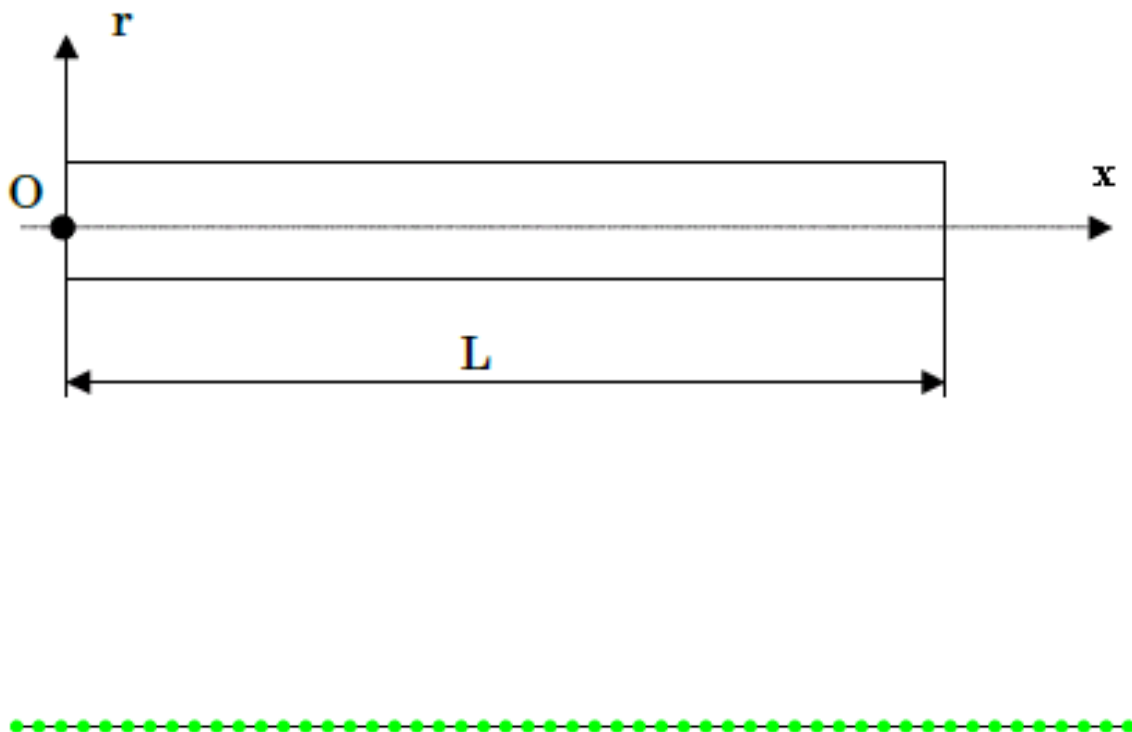
- Температура $T_1 = 0$ °С;
- Температура $T_2 = 500$ °С;
- Тепловой поток $\varphi = -200$ Вт/м².

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности материала $V = 33.33$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Линейные балки Beam2 (50 элементов).



Критерий прохождения теста:

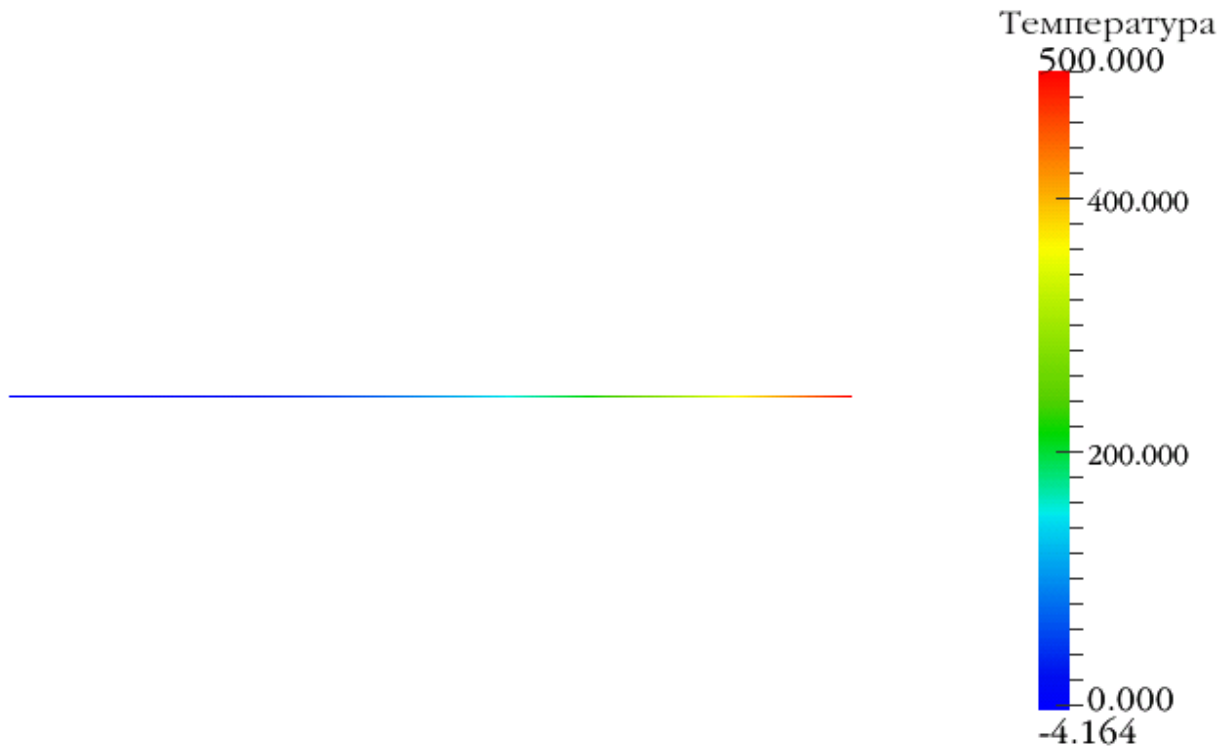
- Сравнение значений температуры T в точках, находящихся на стержне, с точностью 1%. [22]

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и SolidWorks[22]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	FIDESYS		SolidWorks	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0;0;0)	T = 0.00	0.00	0.00%	0.00	0.00%
(0.1;0;0)	T = -4.00	-4.00541	0.14%	-4	0.00%
(0.2;0;0)	T = 4.00	3.99038	0.24%	4	0.00%
(0.3;0;0)	T = 24.00	23.9874	0.05%	24	0.00%
(0.4;0;0)	T = 56.00	55.9856	0.03%	56	0.00%
(0.5;0;0)	T = 100.00	99.985	0.02%	100	0.00%
(0.6;0;0)	T = 156.00	155.986	0.01%	156	0.00%
(0.7;0;0)	T = 224.00	223.987	0.01%	224	0.00%
(0.8;0;0)	T = 304.00	303.99	0.00%	304	0.00%
(0.9;0;0)	T = 396.00	395.995	0.00%	396	0.00%
(1.0;0;0)	T = 500.00	500	0.00%	500	0.00%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур:



Тест 6.2.12: Цилиндрический стержень под воздействием конвективного теплообмена (балочная модель)

Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA06/89.

Рассматривается трёхмерная задача о цилиндрическом стержне, на оба торца которого воздействует температура, на внешней поверхности которого происходит конвективный теплообмен.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- $L = 1$ м, $r = 0.01$ м.

Граничные условия:

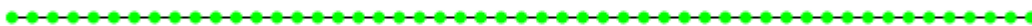
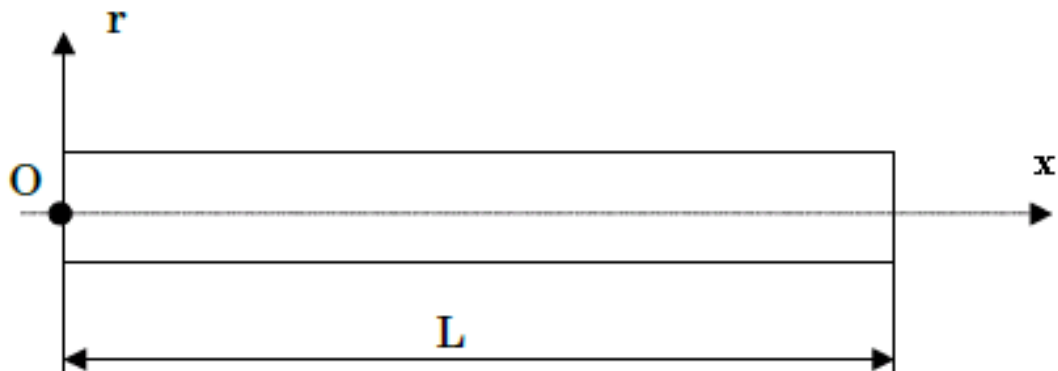
- Температура $T_1 = 0$ °С;
- Температура $T_2 = 500$ °С;
- Конвекция на внешней поверхности:
 - $h_e = 10$ Вт/м²/°С;
 - $T_e = 0$ °С.

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности материала $V = 33.33$ Вт/(м · °С).

Сетка:

- Линейные балки Beam2 (50 элементов).



Критерий прохождения теста:

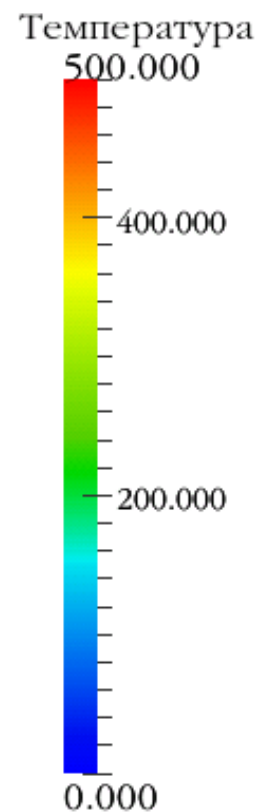
- Сравнение значений температуры T в точках, находящихся на стержне, с точностью 1%. [22]

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и SolidWorks[22]:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	FIDESYS		SolidWorks	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0;0;0)	T = 0.00	0.00	0.00%	0.00	0.00%
(0.1;0;0)	T = 0.37	0.366978	0.82%	0.37	0.00%
(0.2;0;0)	T = 0.97	0.965888	0.42%	0.97	0.00%
(0.3;0;0)	T = 2.19	2.17524	0.67%	2.19	0.00%
(0.4;0;0)	T = 4.78	4.75934	0.43%	4.78	0.00%
(0.5;0;0)	T = 10.39	10.3514	0.37%	10.4	0.10%
(0.6;0;0)	T = 22.56	22.4854	0.33%	22.56	0.00%
(0.7;0;0)	T = 48.95	48.8303	0.24%	48.95	0.00%
(0.8;0;0)	T = 106.21	106.036	0.16%	106.2	0.01%
(0.9;0;0)	T = 230.44	230.257	0.08%	230.3	0.06%
(1.0;0;0)	T = 500.00	500	0.00%	500	0.00%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур:



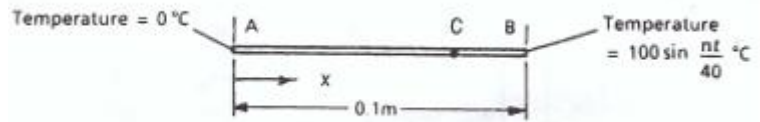
Тест 6.2.13: Одномерная нестационарная теплопередача

NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis “One-Dimensional Transient Heat Transfer”, Test No T3 [5].

Рассматривается трёхмерная задача об одномерной нестационарной теплопередаче внутри балки.

Геометрическая модель:

- Длина балки $L = 0.1$ м;
- Сечение балки квадратное, 0.01×0.01 м.



Граничные условия:

- Температура в точке А $T_A = 0$ °С;
- Температура в точке В изменяется по гармоническому закону: $T_B = 100 \sin \frac{nt}{40}$ °С;

Параметры материалов:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности $V = 35$ Вт/(м · °С);
- Удельная теплоёмкость $C = 440.5$ Дж/(кг · °С);
- Плотность $\rho = 7\,200$ кг/м³.

Сетка:

Рассматривалось три варианта расчетной схемы:

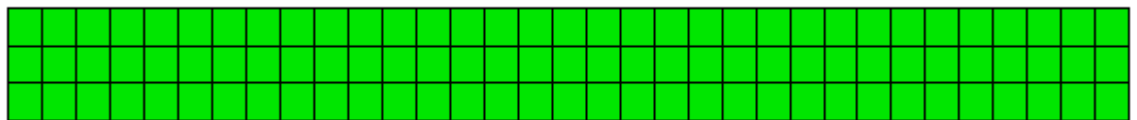
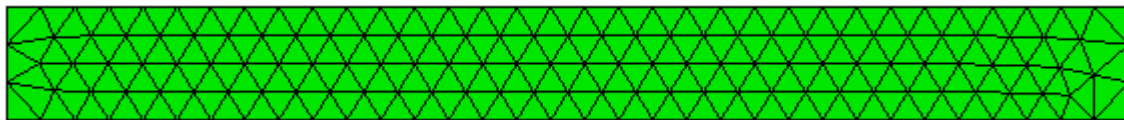
- Балочная схема (один отдельный тест):
 - Линейные балочные элементы Beam2 (10 элементов)
- Оболочечная схема (два отдельных теста):
 - 3-узловые треугольные оболочки TriShell3 (258 элементов)
 - 6-узловые треугольные оболочки TriShell6 (258 элементов)
 - 4-узловые четырехугольные оболочки Shell4 (99 элементов)
 - 8-узловые четырехугольные оболочки Shell8 (99 элементов)
 - 9-узловые четырехугольные оболочки Shell9 (99 элементов)
- Объемная схема (одиннадцать отдельных тестов):
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (1 352 элемента)
 - 10-узловые тетраэдры Tetra10 (1 352 элемента)
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (1 200 элементов)
 - 20-узловые гексаэдры Hex20 (1 200 элементов)
 - 27-узловые гексаэдры Hex27 (1 200 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 3го порядка (288 элементов)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex8s 4го порядка (84 элемента)
 - Спектральные элементы гексаэдры Hex20s 3го порядка (288 элементов)

- Спектральные элементы гексаэдры Hex20s 4го порядка (84 элемента)
- Спектральные элементы гексаэдры Hex27s 3го порядка (288 элементов)
- Спектральные элементы гексаэдры Hex27s 4го порядка (84 элемента)

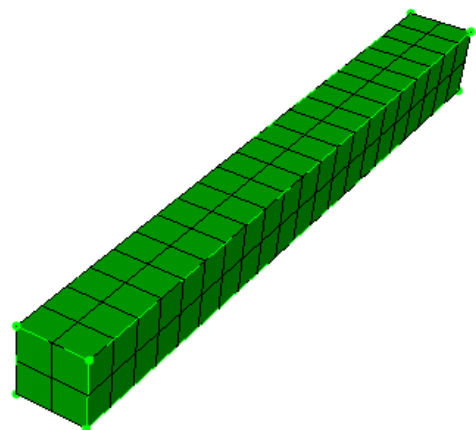
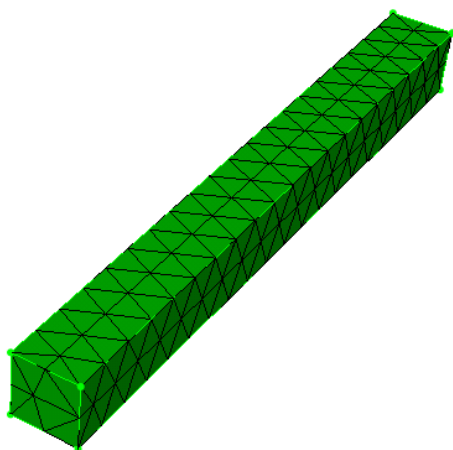
Балочная схема:



Оболочечная схема:



Объёмная схема:



Критерий прохождения теста:

- Температура T в точке $C (0.8;0;0)$ в некоторый момент времени $t = 32c$ равна $36.60 \text{ } ^\circ\text{C}$ с погрешностью 3% [5].

Результаты:

- В таблицах приведены результаты расчёта FIDESYS и ANSYS:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Балочная схема	
		FIDESYS (элементы Beam2)	
		Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.8738	0.75%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Оболочечная схема			
		FIDESYS			
		Треугольные (TriShell3)		Треугольные (TriShell6)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.2863	0.86%	36.3292	0.74%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Оболочечная схема					
		FIDESYS					
		Четырёхугольные (Shell4)		Четырёхугольные (Shell8)		Четырёхугольные (Shell9)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.2241	1.03%	36.94	0.93%	36.94	0.93%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Объёмная схема (тетраэдры)			
		FIDESYS			
		Тетраэдры (TETRA4)		Тетраэдры (TETRA10)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.2302	1.01%	36.1248	1.30%

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Объёмная схема (гексаэдры)					
		FIDESYS					
		Гексаэдры (HEX8)		Гексаэдры (HEX20)		Гексаэдры (HEX27)	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.1676	1.18%	36.1202	1.31%	36.1169	1.32%

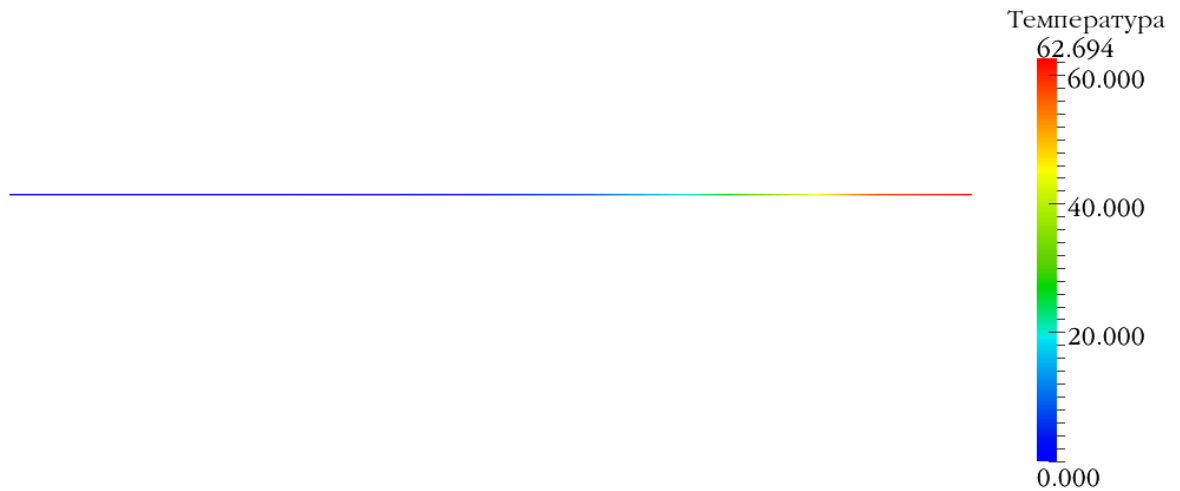
- Спектральные элементы:

Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ FIDESYS (HEX8s)				Численный анализ FIDESYS (HEX20s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
		(0.8;0;0)	T = 36.60	36.1254	1.30%	36.1209	1.31%	36.1254	1.30%

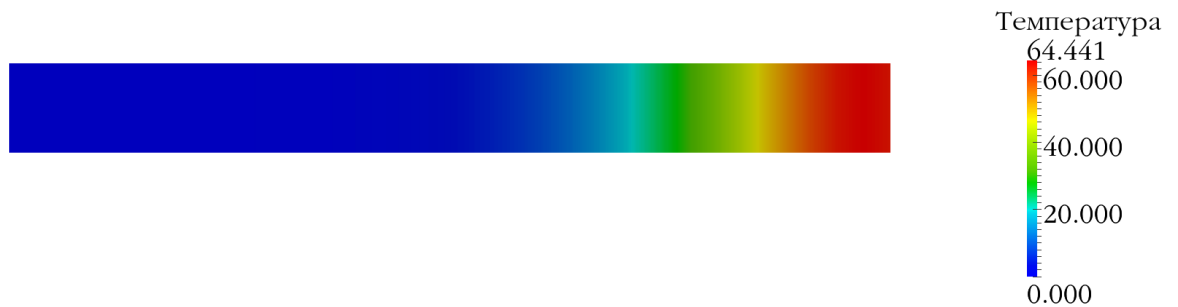
Координаты точки	Критерий прохождения теста, °C	Численный анализ FIDESYS (HEX27s)			
		Элементы 3-го порядка		Элементы 4-го порядка	
		Значение, °C	Ошибка	Значение, °C	Ошибка
(0.8;0;0)	T = 36.60	36.1254	1.30%	36.1209	1.31%

- На картинке ниже представлена исходная модель с полем распределения температур в момент времени $t = 32c$:

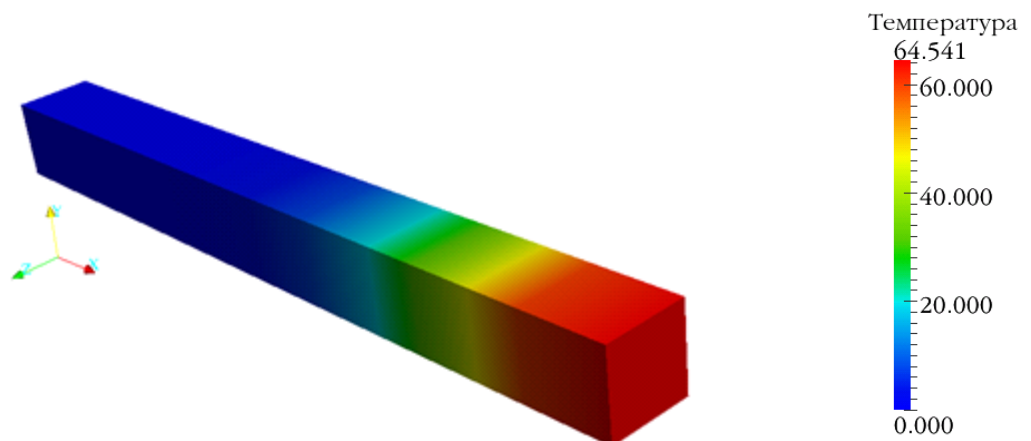
Балочная схема:



Оболочечная схема:



Объёмная схема:



Контактные задачи

Тест 7.1. Контакт цилиндрического ролика (2D)

«Benchmark 1: 2D Cylinder Roller Contact» NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks

Рассматривается задача о вдавливании цилиндра в алюминиевый блок. Цилиндр нагружается силой 35 кН в вертикальном направлении. В данном тесте приведено решение для 2D случая для плоско-деформированного состояния с коэффициентом трения 0 и 0.1 (два отдельных теста).

Геометрическая модель:

- Высота блока $H = 200$ мм
- Ширина блока $t = 200$ мм
- Диаметр цилиндра $D = 100$ мм
- В виду симметрии рассматривается $\frac{1}{2}$ часть модели

Параметры материалов:

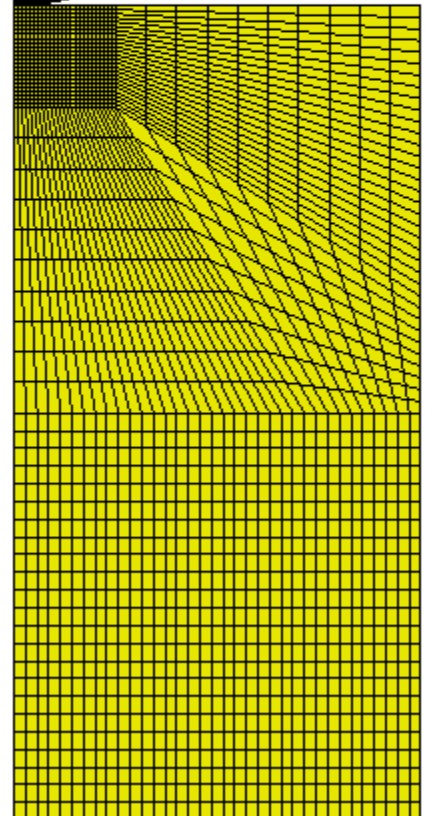
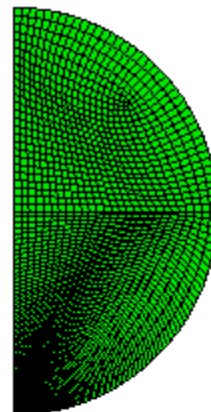
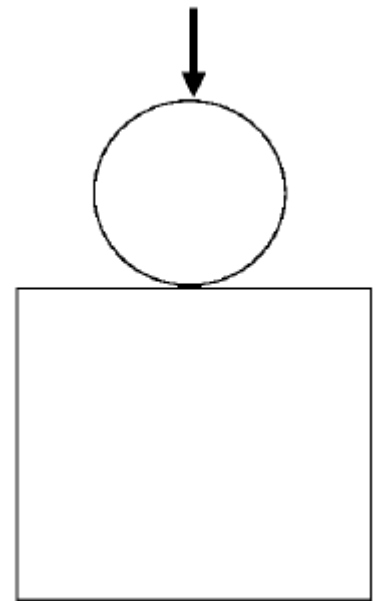
- Изотропный
- Модуль упругости цилиндра $E_{\text{цил}} = 210$ кН/мм²
- Модуль упругости блока $E_{\text{блока}} = 70$ кН/мм²
- Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{цил}} = \nu_{\text{блока}} = 0.3$

Граничные условия:

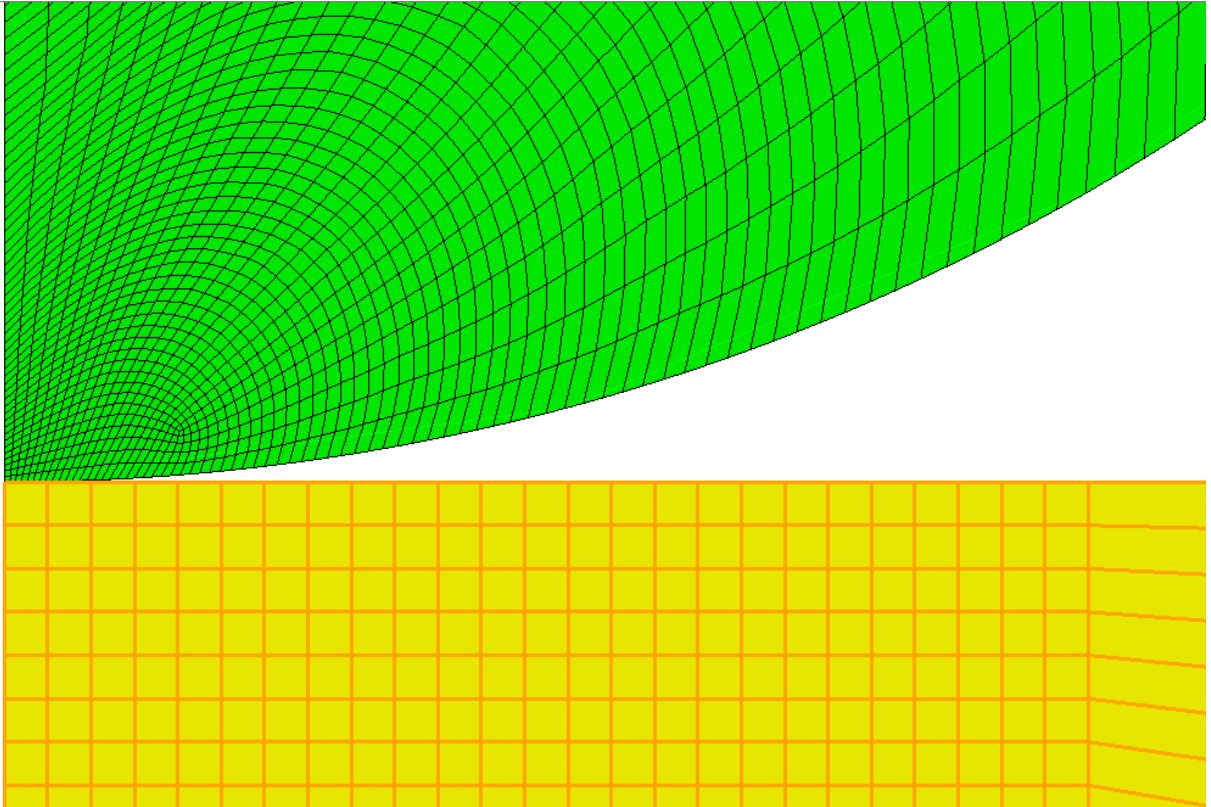
- Левые боковые поверхности цилиндра и блока закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- Нижняя грань блока жестко закреплена $u_x = u_y = 0$
- К верхней точки цилиндра приложена сила $F = 35$ кН (для симметричного случая $F = 17.5$ кН)

Сетка:

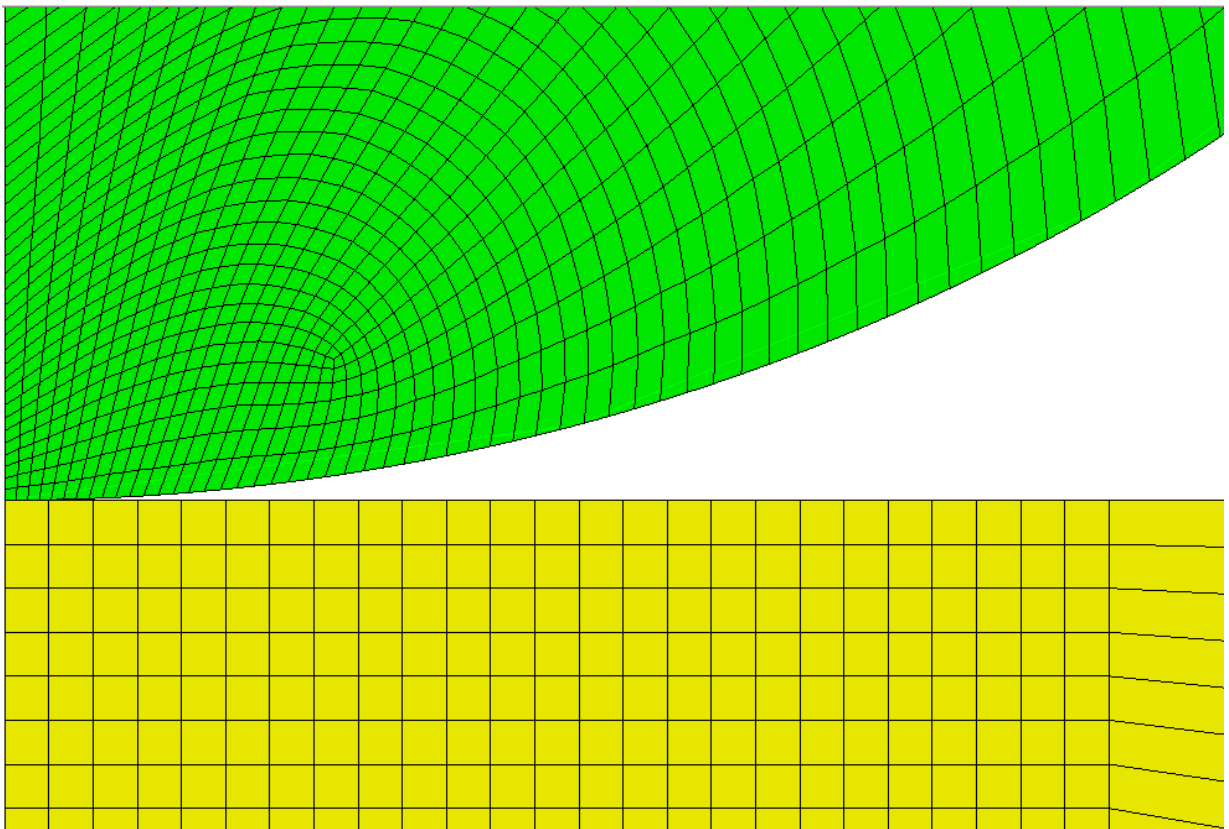
- Пять типов конечных элементов (пять отдельных теста):
 - 4-узловые четырехугольники Quad4
 - 8-узловые четырехугольники Quad8
 - 9-узловые четырехугольники Quad9
 - 3-узловые треугольники Tri3
 - 6-узловые треугольники Tri6



Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов QUAD4



Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов QUAD8/QUAD9



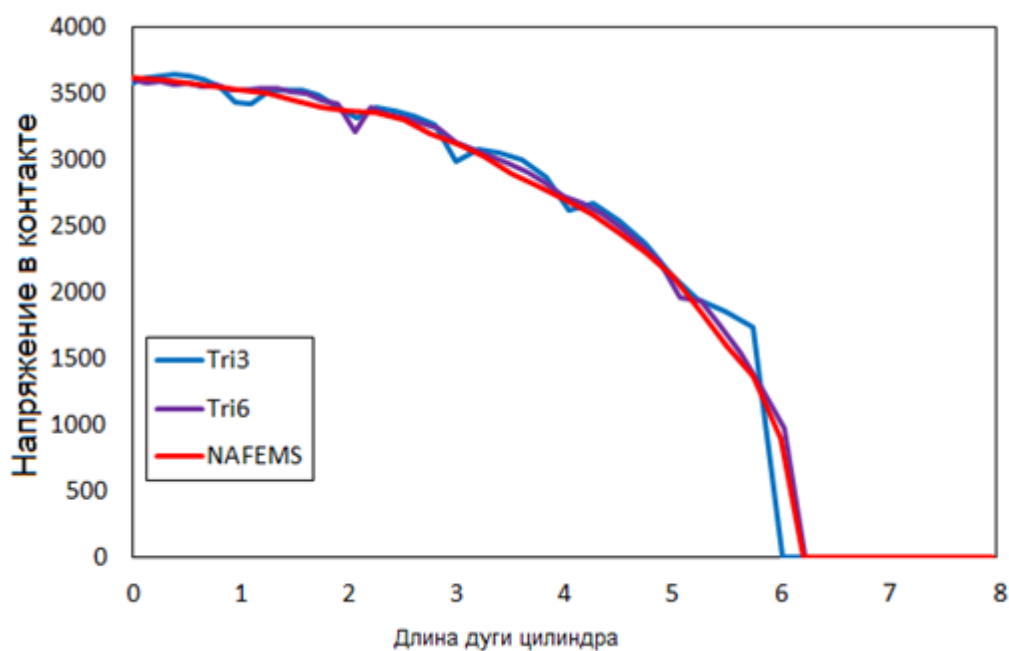
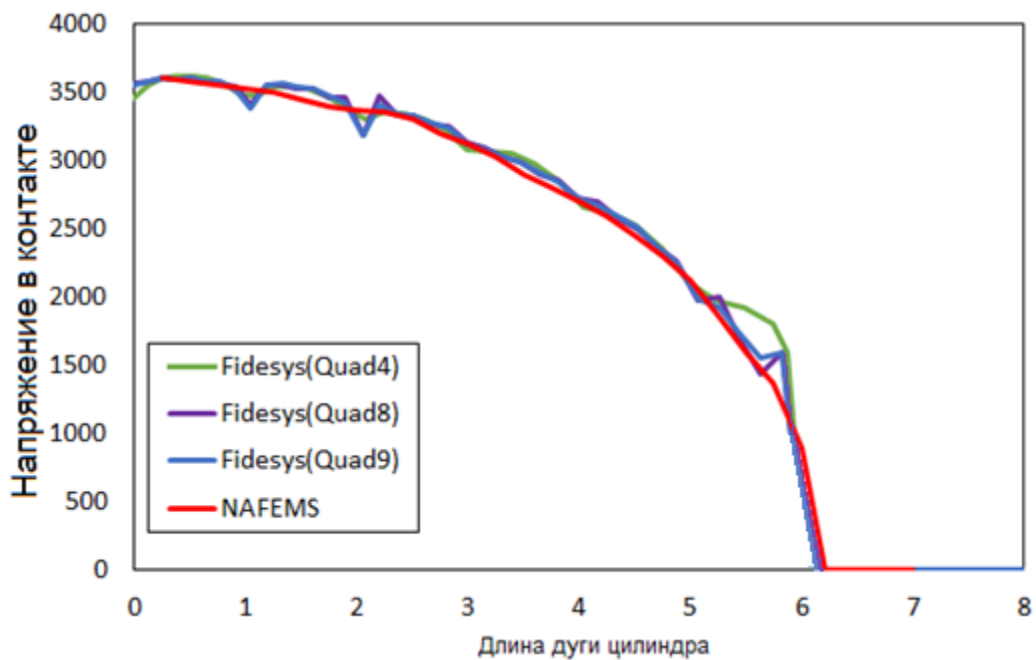
Критерий прохождения теста:

- Длина зоны контакта 6.21 мм
- Максимальное напряжение в контакте $p_{max} = 3\,585.37 \text{ Н/мм}^2$

Результаты:

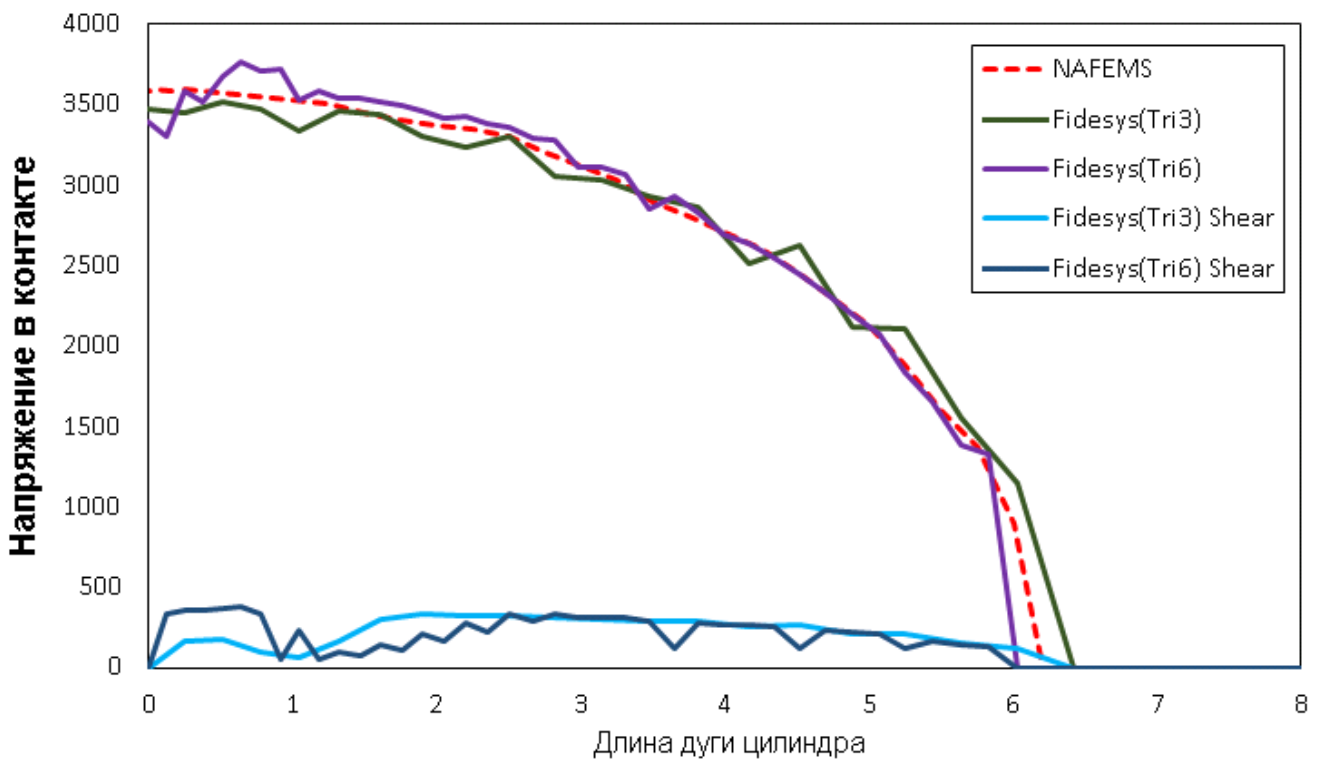
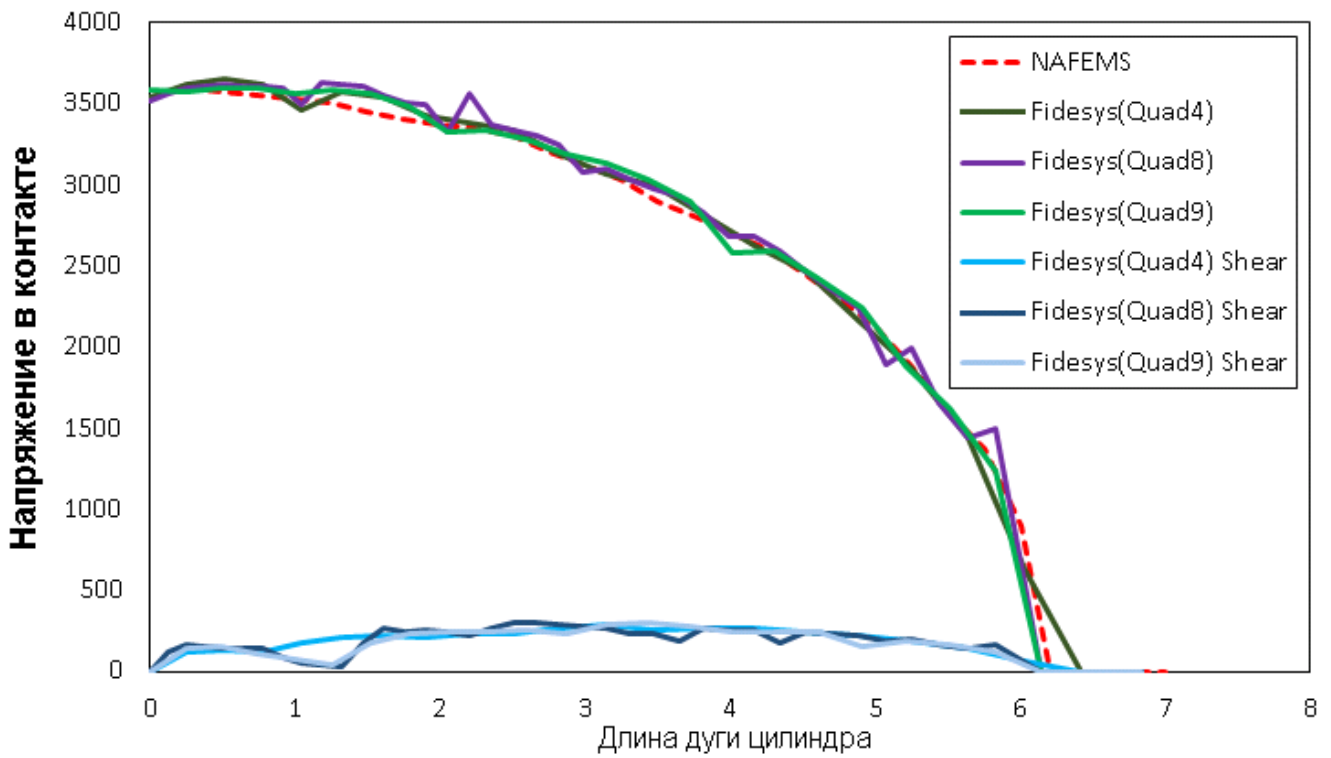
- На следующих графиках приведены зависимости напряжений в контакте для данных NAFEMS⁵⁵ [33], FIDESYS.

Распределение напряжений в контакте на поверхности цилиндра вблизи контакта (случай без трения)

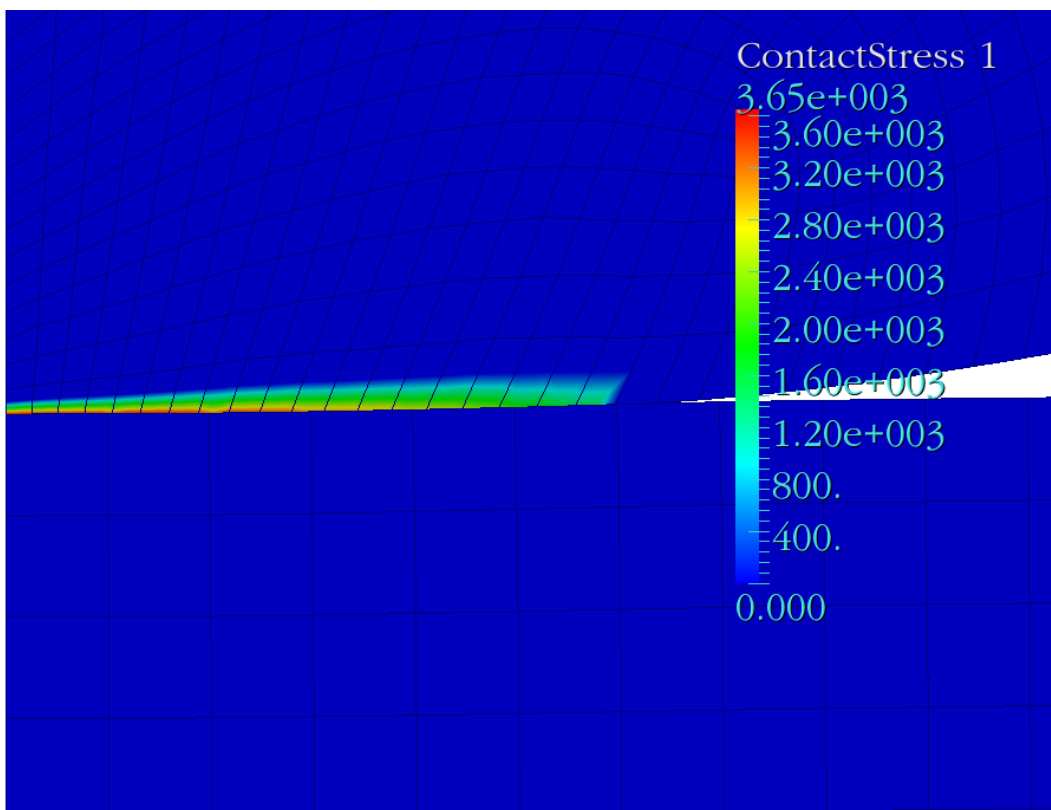
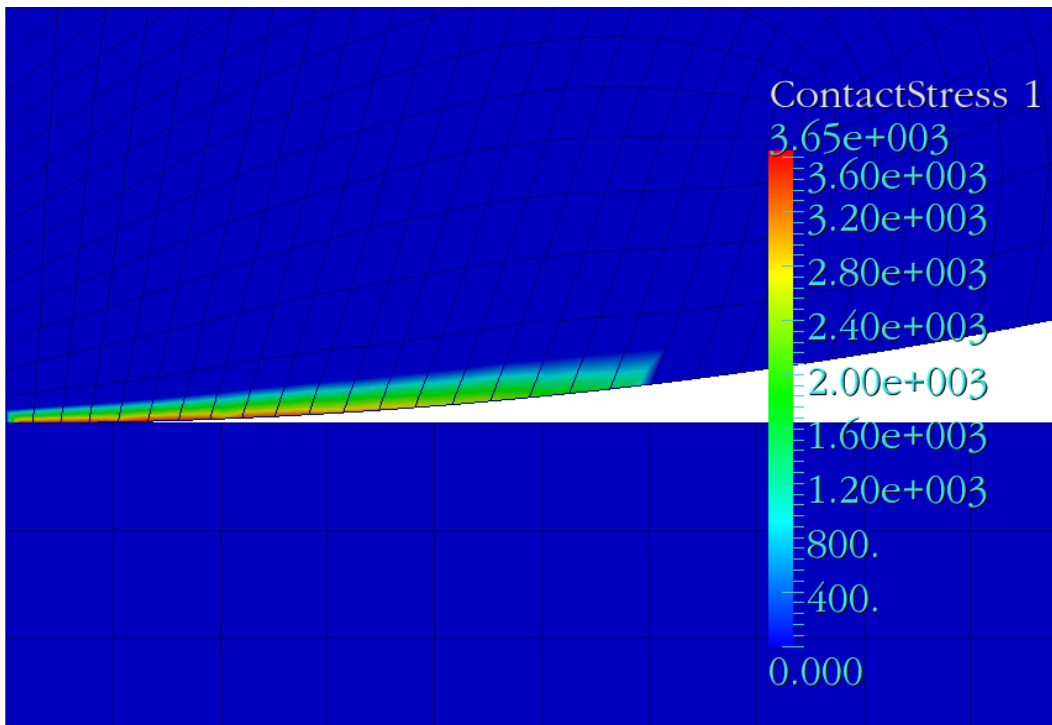


⁵⁵ Численные решения в указанном источнике NAFEMS получены при помощи программ ABAQUS и MSC.MARC.

Распределение напряжений в контакте на поверхности цилиндра вблизи контакта (коэффициент трения 0.1)



- На картинках ниже представлены распределения напряжений в контакте, полученные для элементов quad9, на недеформированном и деформированном видах модели, соответственно.





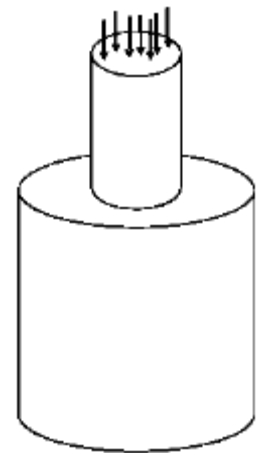
Тест 7.2. 3D-Штамп (цилиндр с закругленными гранями)

«Benchmark 2: 3D Punch (Rounded Edges)» NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks

Рассматривается задача о вдавливании стального штампа с закругленными гранями в алюминиевое основание. Штамп нагружается равномерным давлением в вертикальном направлении. В данном тесте приведено решение для 3D случая с учетом и без учета трения (коэффициент трения 0 и 0.1 - два отдельных теста).

Геометрическая модель:

- Диаметр штампа $D_{\text{штампа}} = 100$ мм
- Высота штампа $H_{\text{штампа}} = 100$ мм
- Диаметр основания $D_{\text{осн}} = 200$ мм
- Высота основания $H_{\text{осн}} = 200$ мм
- В виду симметрии рассматривается $\frac{1}{4}$ часть модели



Параметры материалов:

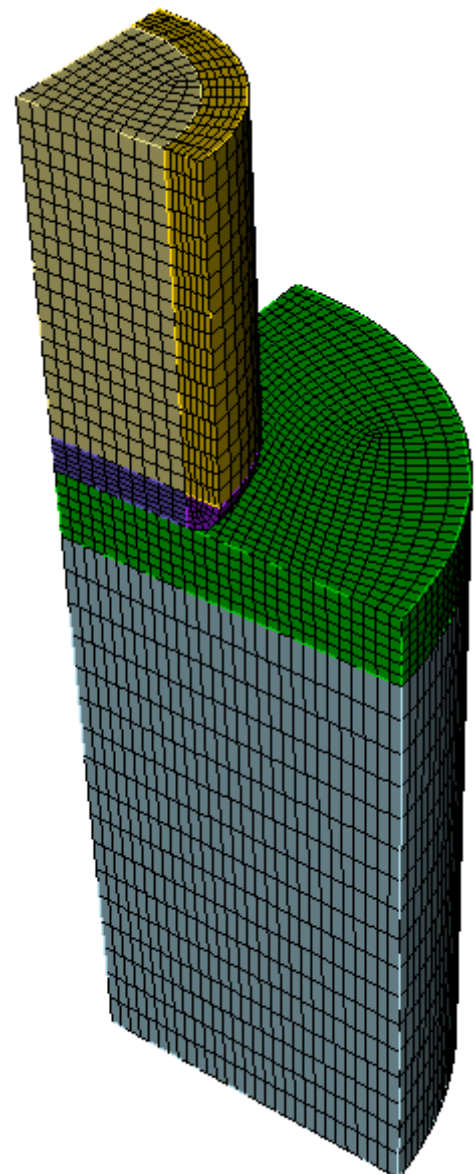
- Изотропный
- Модуль упругости штампа $E_{\text{штампа}} = 210$ кН/мм²
- Модуль упругости основания $E_{\text{осн}} = 70$ кН/мм²
- Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{цил}} = \nu_{\text{блока}} = 0.3$

Граничные условия:

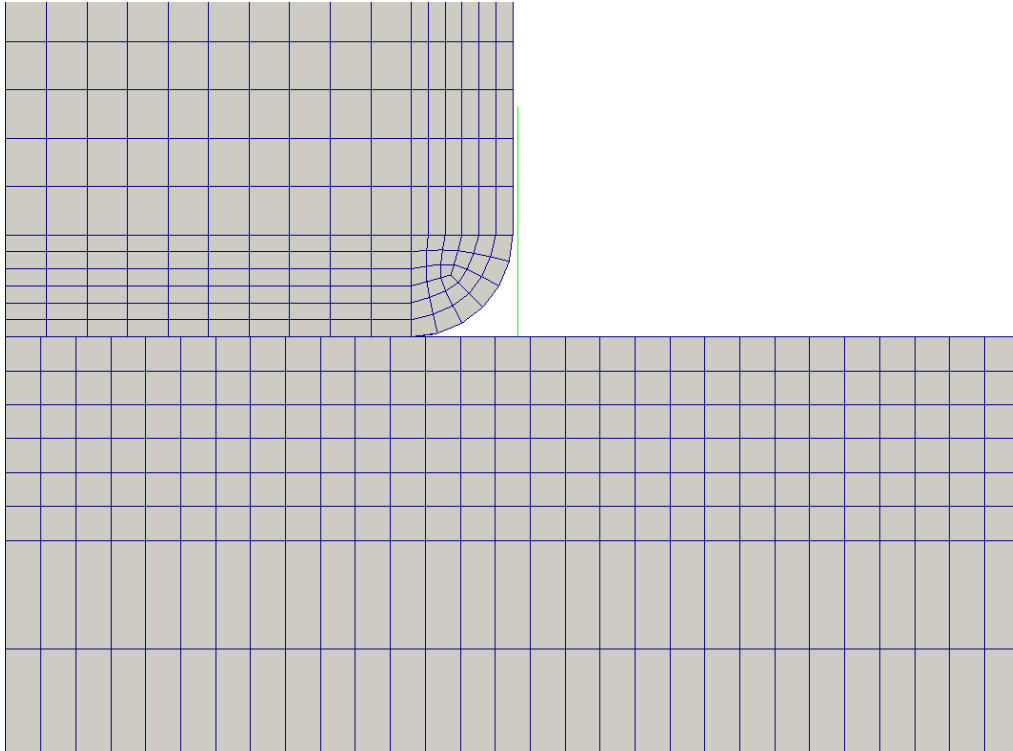
- Внутренние боковые поверхности штампа и основания закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- Нижняя грань основания жестко закреплена $u_x = u_y = u_z = 0$
- На верхнюю поверхность штампа приложено равномерное давление $P = 100$ Н/мм²

Сетка:

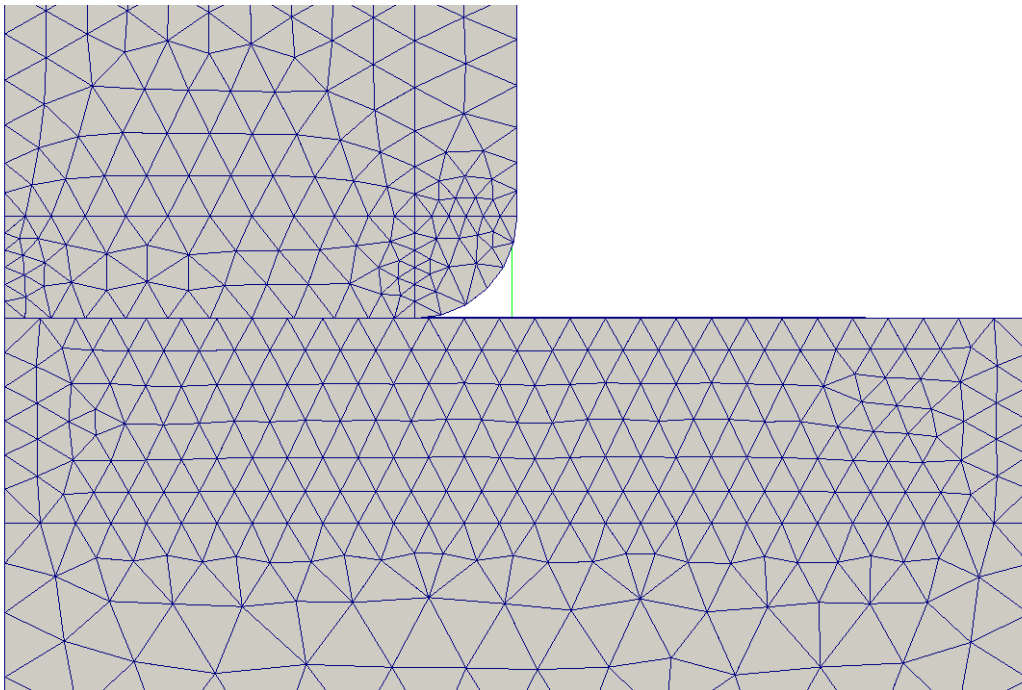
- Примерные размеры элементов:
 - Для штампа 4 мм
 - Для основания 3.5 мм
- Два типа конечных элементов (два отдельных теста):
 - 8-узловые гексаэдры Hex8 (штамп 4 656 элементов, основание 18 515 элементов)
 - 4-узловые тетраэдры Tetra4 (штамп 23 007 элементов, основание 57 828 элементов)



Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов Hex8:



Фрагмент конечно-элементной сетки для элементов Tetra4:



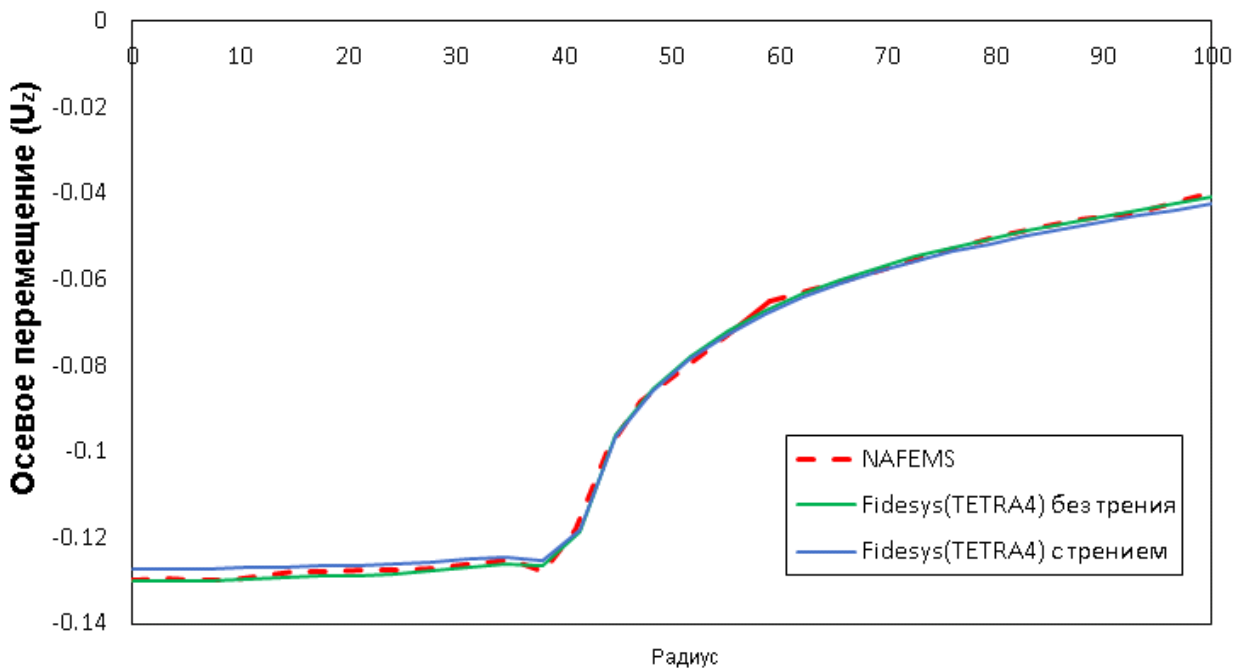
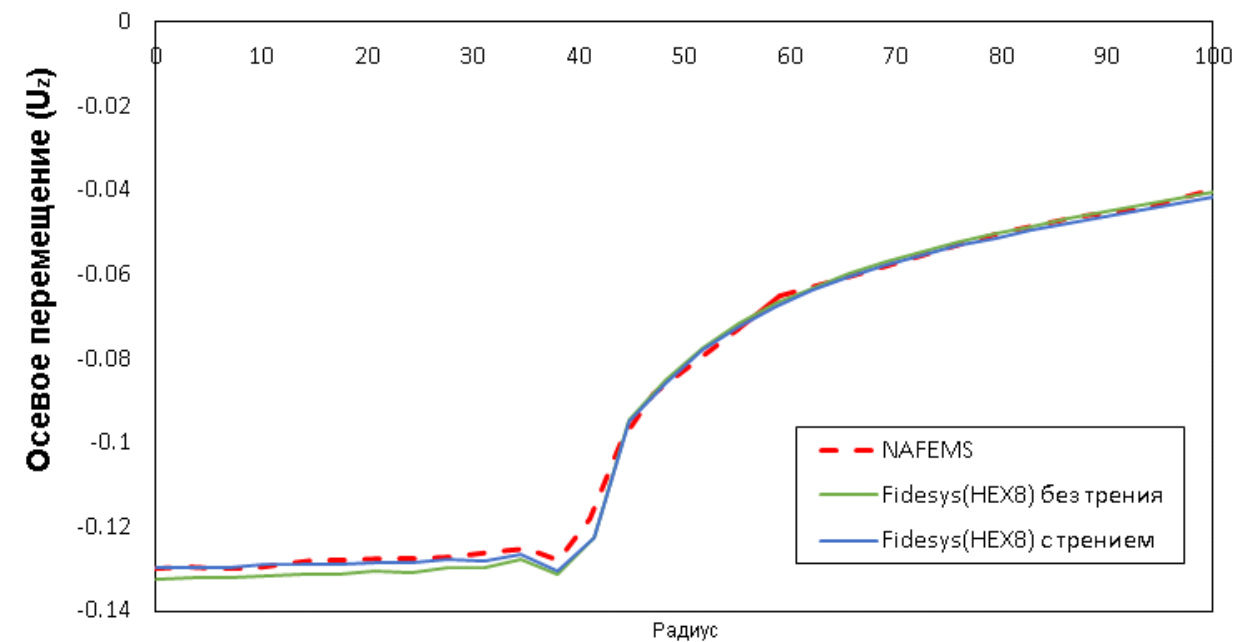
Критерий прохождения теста:

- Малые отличия перемещений и напряжений в контакте, полученных в CAE Fidesys, от приведенных в NAFEMS⁵⁶

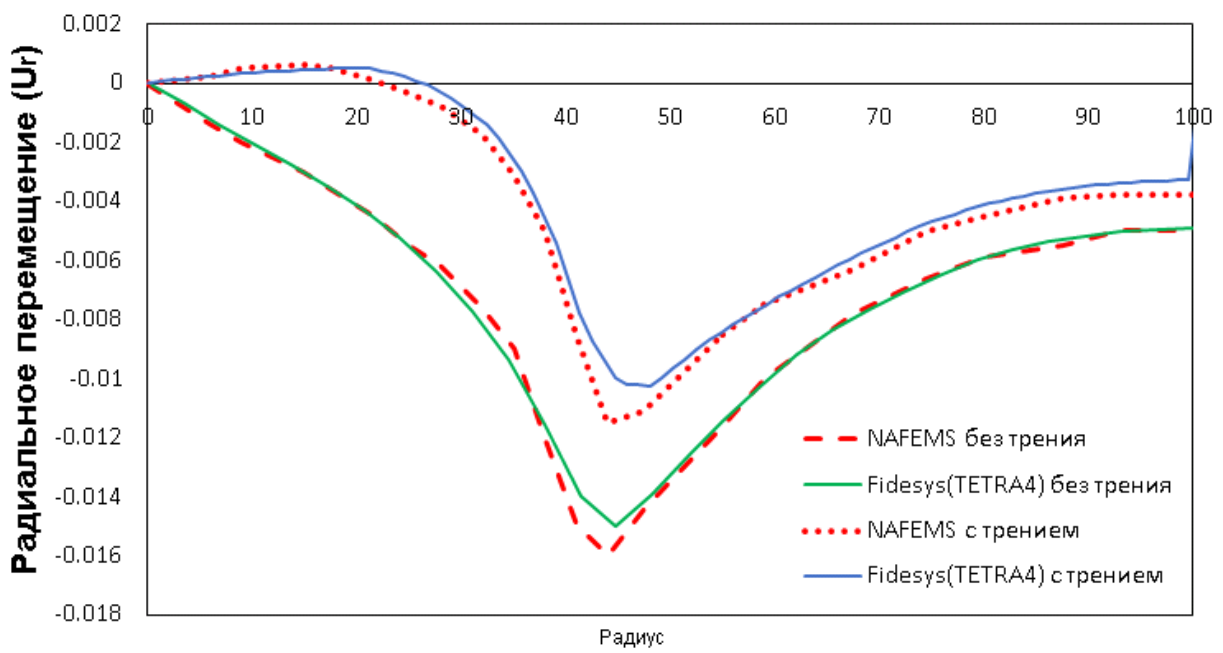
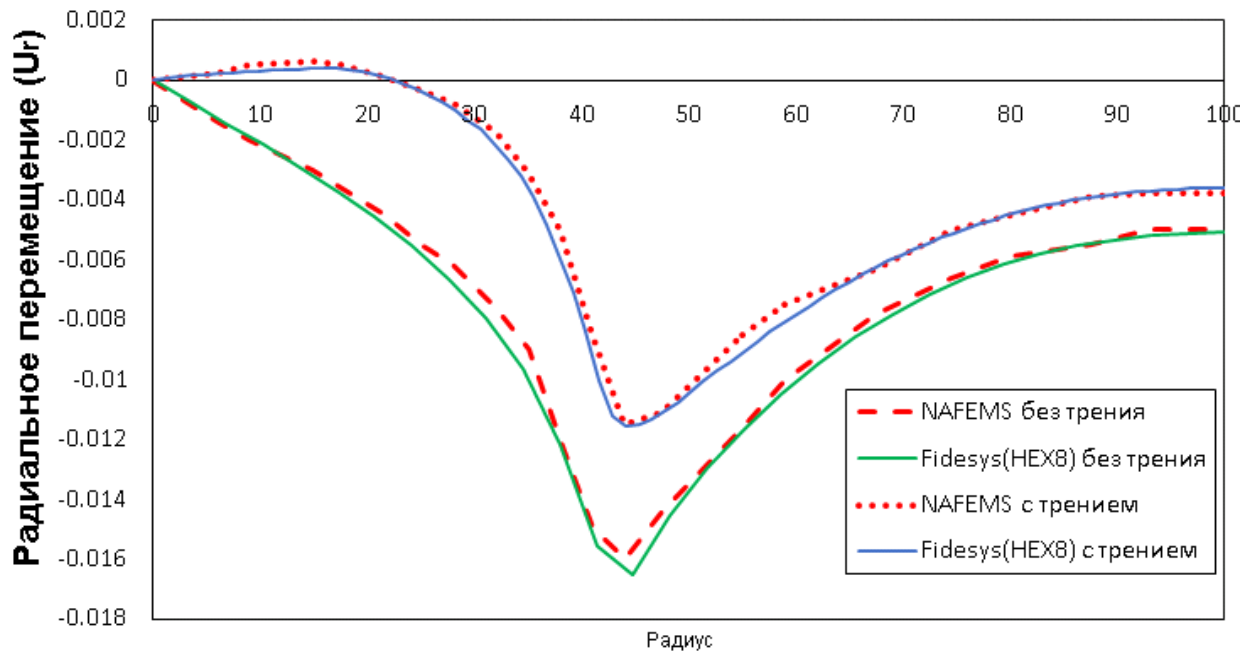
Результаты:

- На следующих графиках приведены зависимости напряжений в контакте для данных NAFEMS [33], FIDESYS.

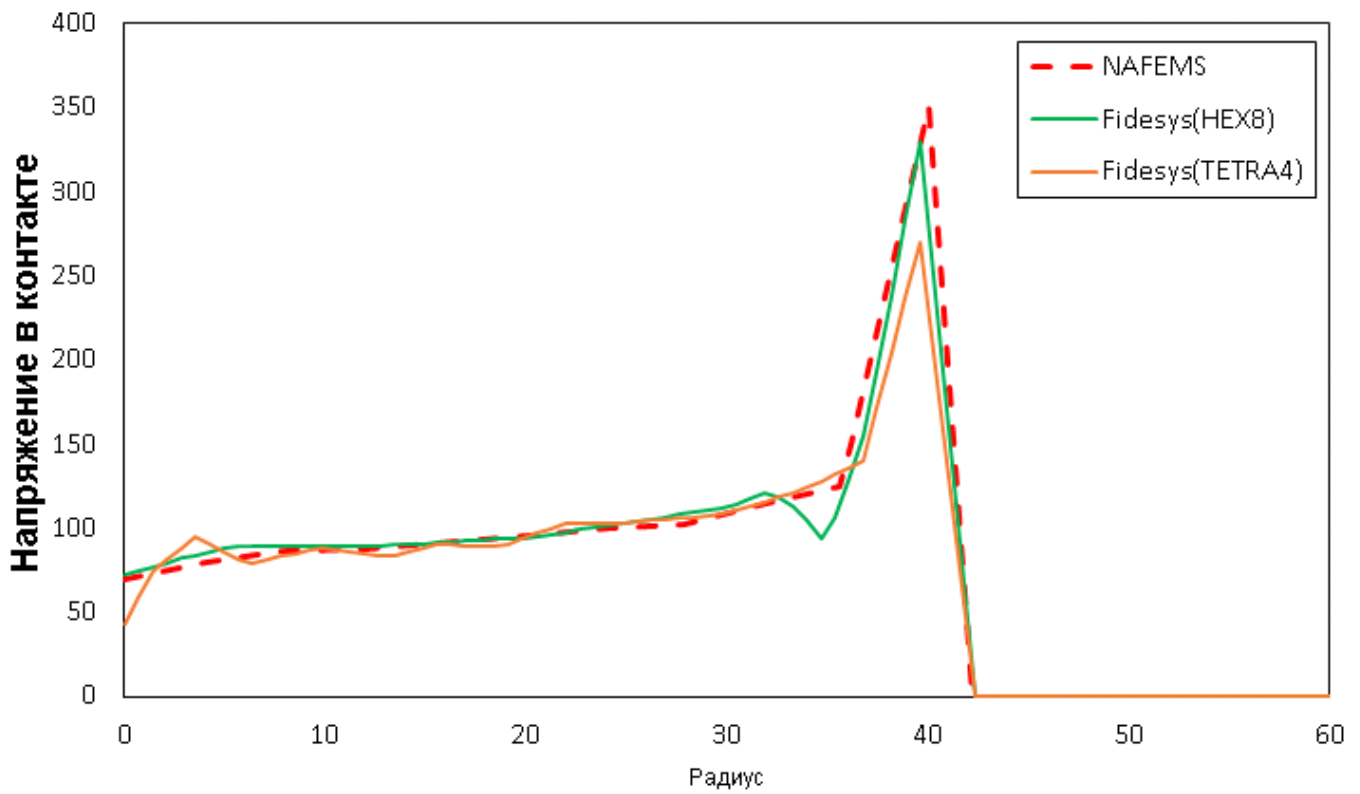
Распределение перемещений U_z вдоль радиуса основания



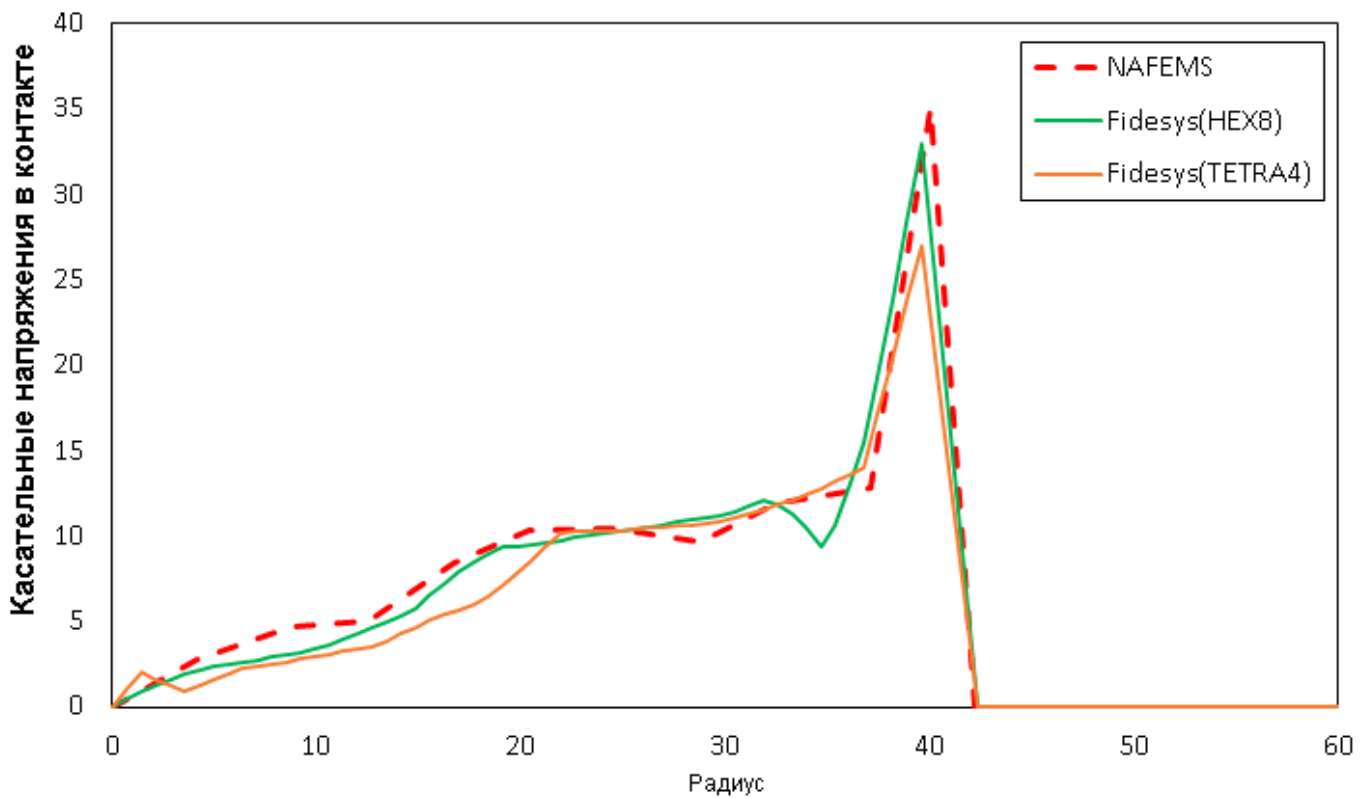
⁵⁶ Численные решения в указанном источнике NAFEMS получены при помощи программ ABAQUS и MSC.MARC..

Распределение перемещений U_r вдоль радиуса основания

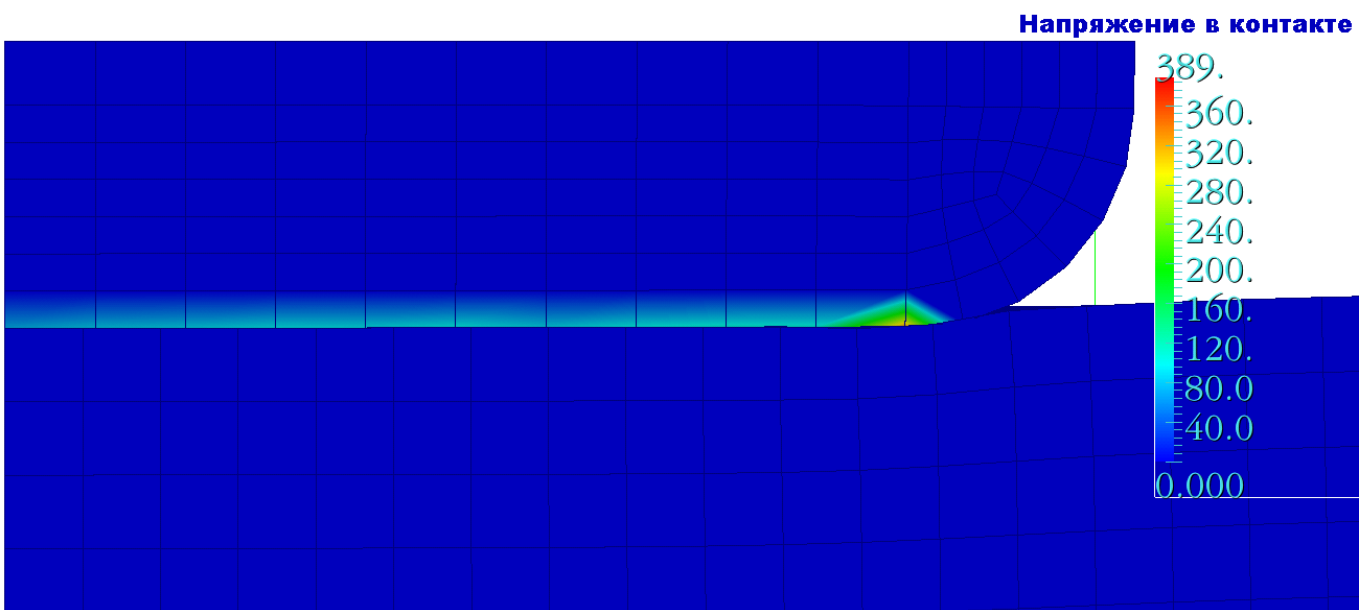
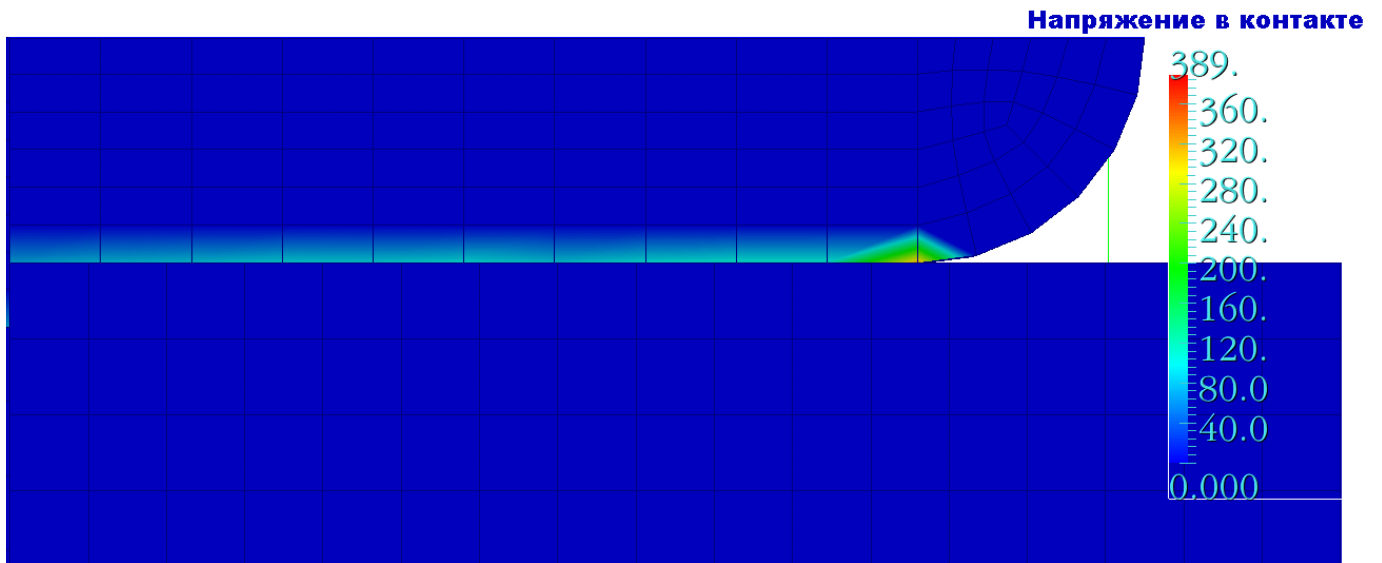
Распределение напряжений в контакте вдоль радиуса штапма с учетом трения 0.1



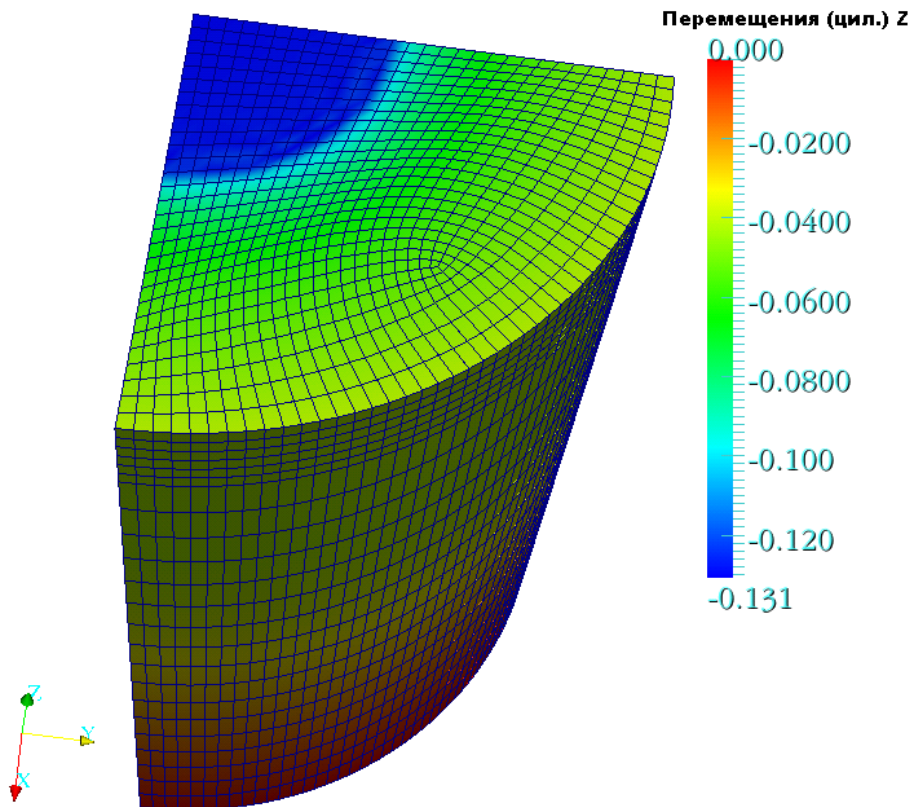
Распределение напряжений в контакте вдоль радиуса штапма с учетом трения 0.1



- На картинках ниже представлено распределение напряжения в контакте, полученное для элементов HEX8, на недеформированном и деформированном видах для фрагмента модели.



- На картинке ниже представлено распределения осевых перемещений для основания и напряжения в контакте для штампа, полученные для элементов HEX8.





Тест 7.3. Нагружение штифта (3Д)

«Benchmark 5: 3D Loaded Pin» NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks

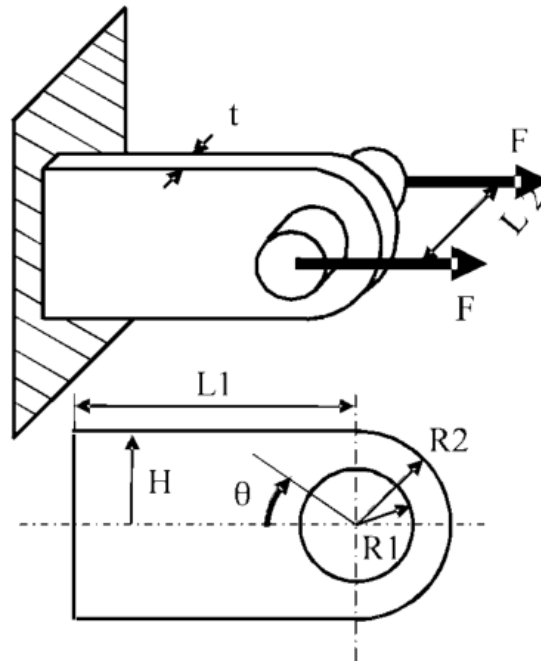
Рассматривается задача о нагружении стального штифта силой 100 кН. В данном тесте приведено решение для 3D случая с учетом трения 0.1.

Геометрическая модель:

- $L1 = 200$ мм
- $L2 = 20$ мм
- $H = 100$ мм
- $t = 10$ мм
- $R1 = 50$ мм
- $R2 = 100$ мм

Параметры материала:

- Изотропный
- Материал штифта:
 - Модуль упругости $E_{\text{штифта}} = 210 \times 10^3$ Н/мм²
 - Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{штифта}} = 0.3$
- Материал полосы:
 - Модуль упругости $E_{\text{полосы}} = 1.85 \times 10^4$ Н/м²
 - Коэффициент Пуассона $\nu_{\text{полосы}} = 0.3$



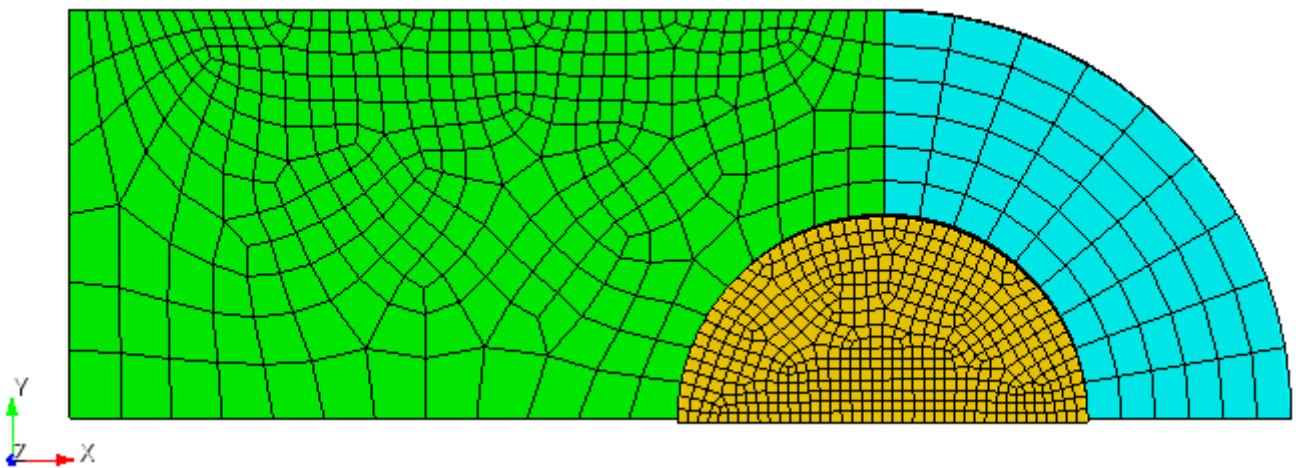
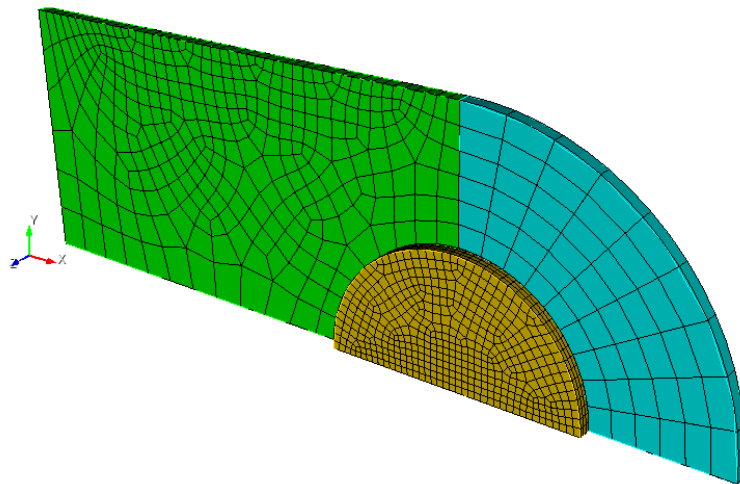
Граничные условия:

- Рассматривается ¼ часть модели
- Внутренние боковые поверхности штампа и основания закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- Нижняя грань основания жестко закреплена $u_x = u_y = u_z = 0$
- На верхнюю поверхность штампа приложена сила $P = 50$ кН (с учетом симметрии прикладывается суммарная сила 25 кН)

Сетка:

- 27-узловые гексаэдры HEX27

Конечно-элементная сетка для элементов Hex27:



Настройки контактной пары:

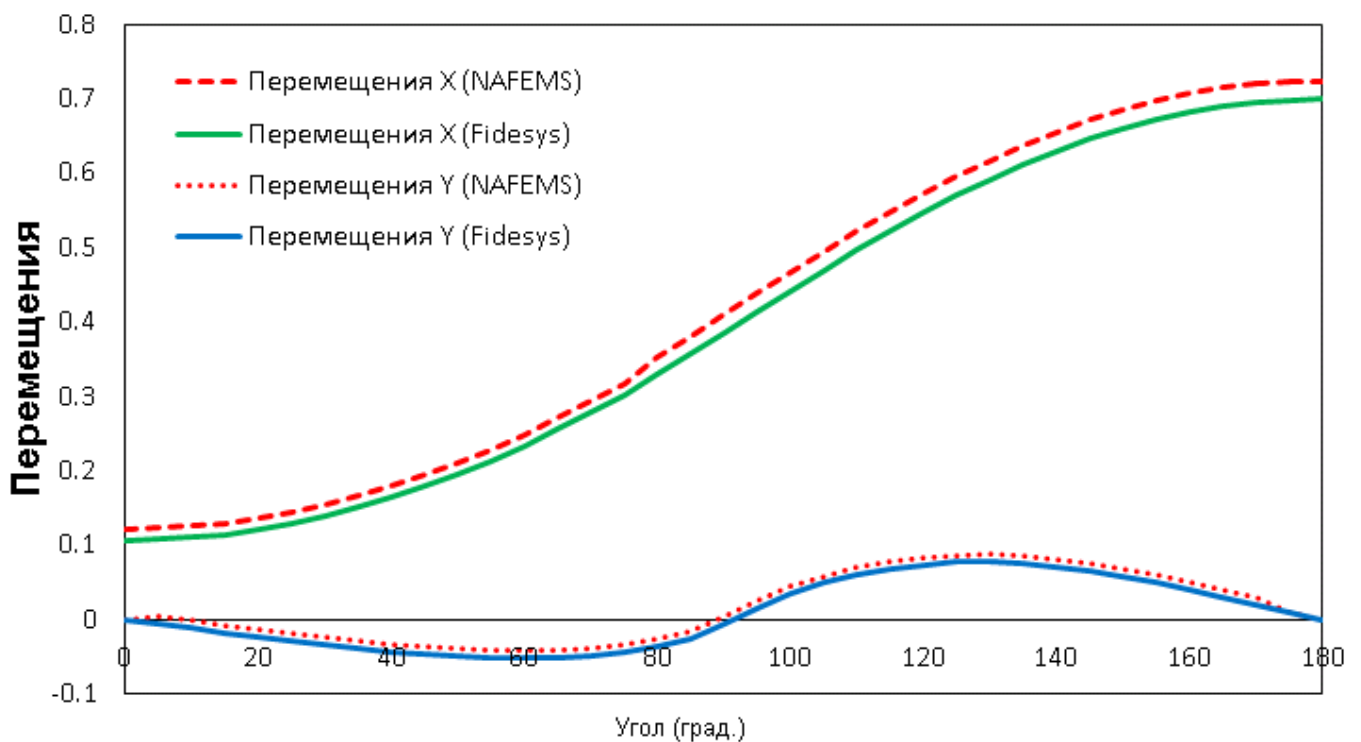
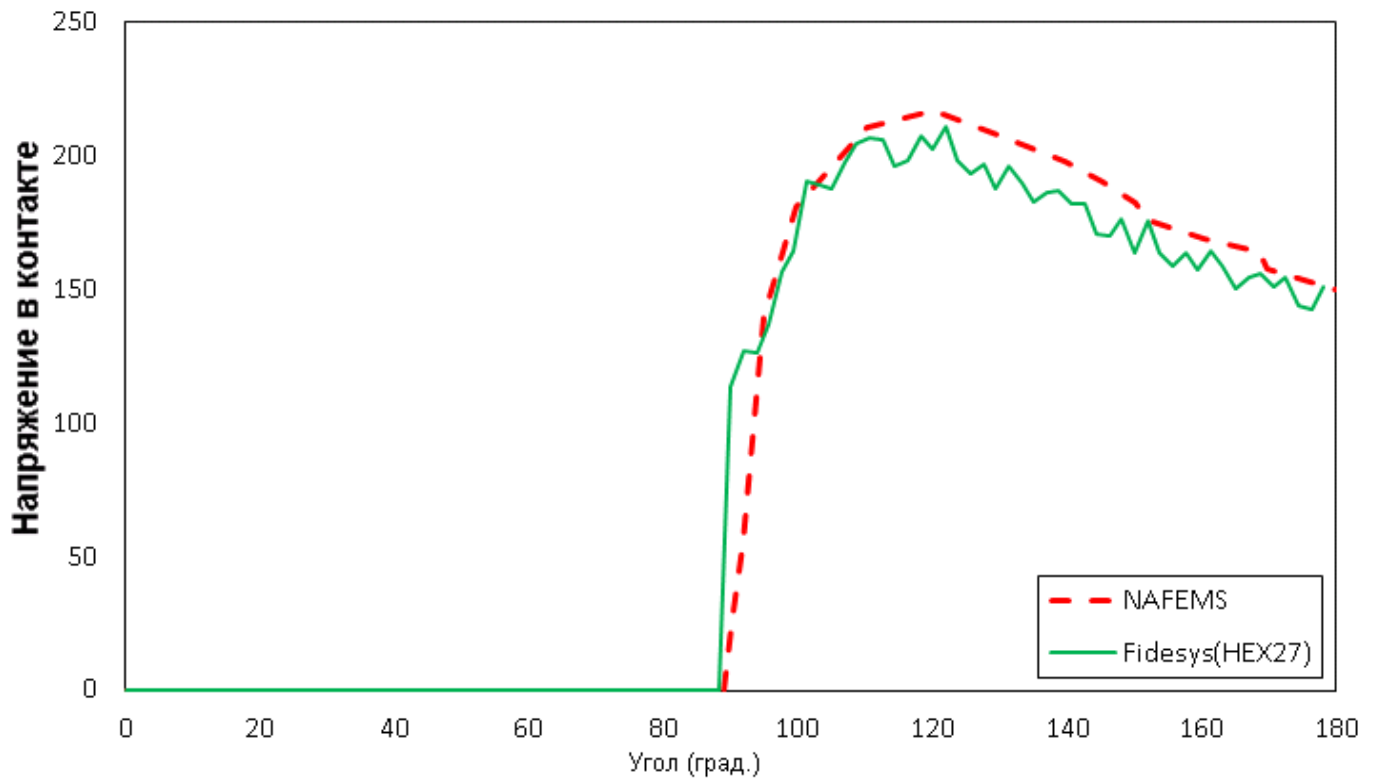
- Ведущий регион: внутренняя вогнутая поверхность полосы
- Ведомый регион: внешняя выпуклая поверхность штифта
- Коэффициент трения 0.1
- Коэффициент жесткости по нормали 0.05
- Коэффициент жесткости по касательной 0.5
- Точность определения контакта 0.1

Критерий прохождения теста:

- Малые отличия перемещений и напряжений в контакте, полученных в CAE Fidesys, от приведенных в NAFEMS

Результаты:

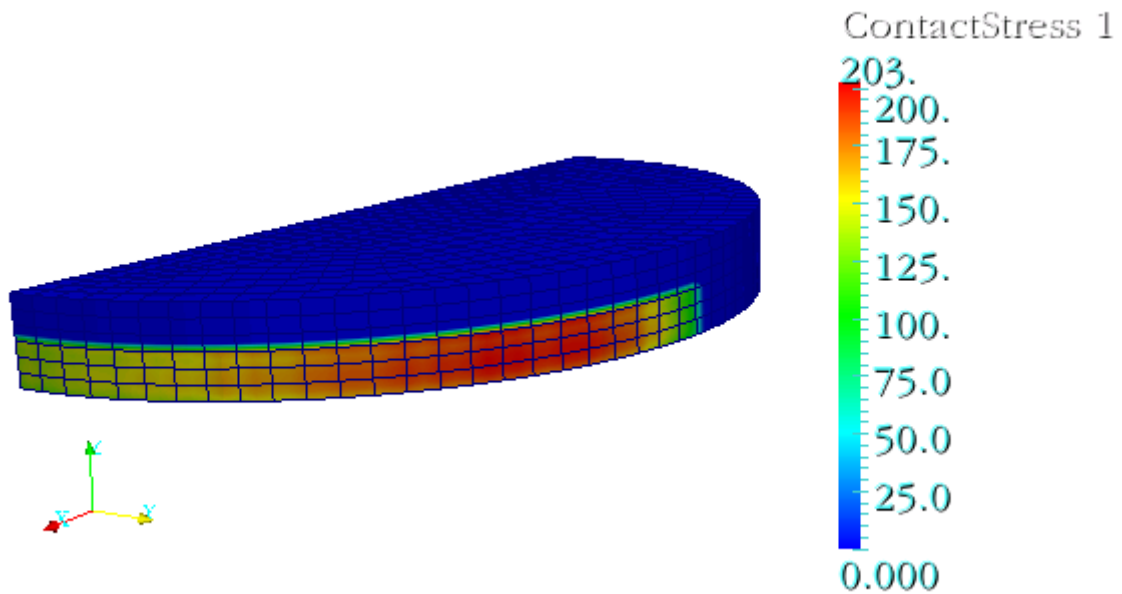
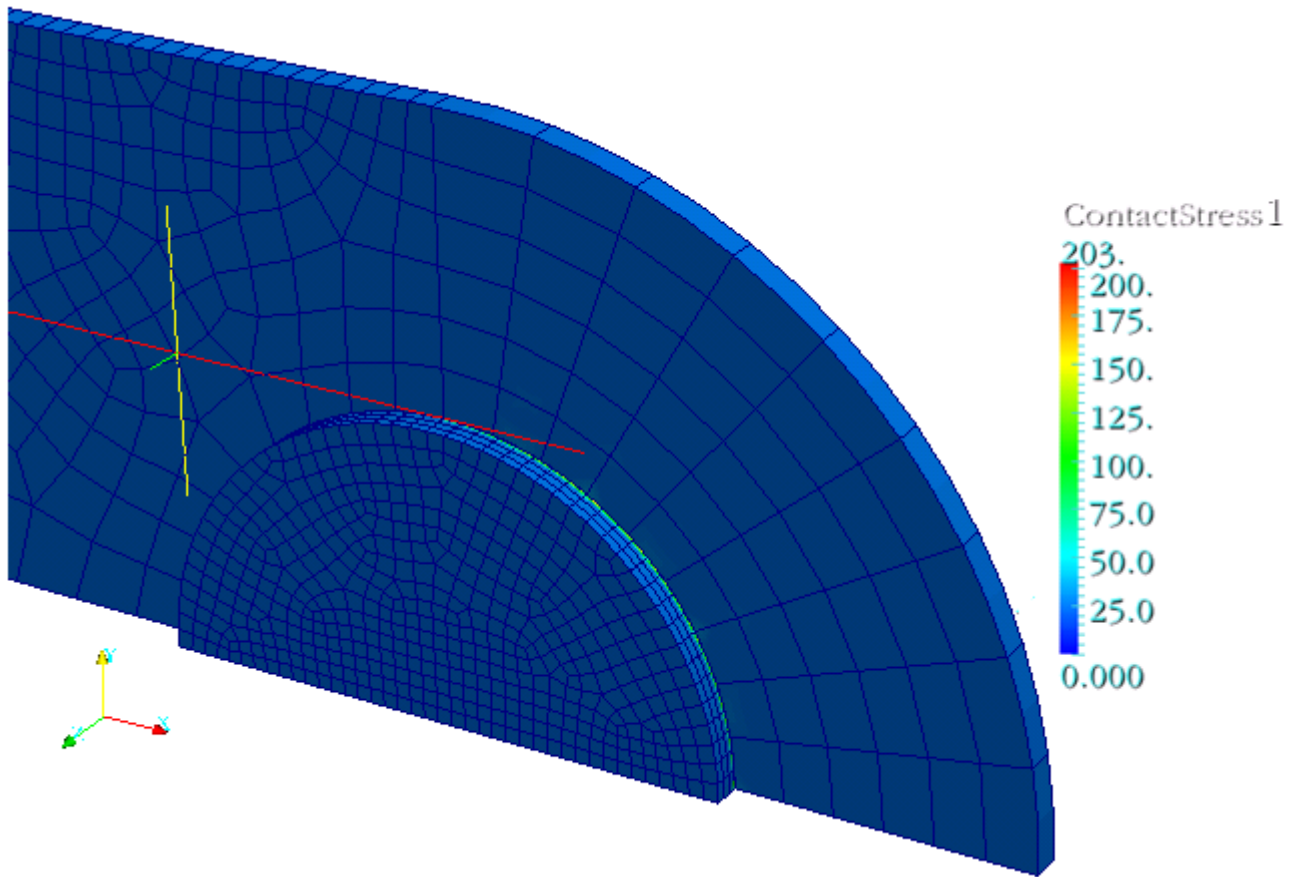
- На следующих графиках приведены зависимости напряжений в контакте и перемещений (в элементах ведущего региона) для данных NAFEMS⁵⁷ [33], FIDESYS.



⁵⁷ Численные решения в указанном источнике NAFEMS получены при помощи программ ABAQUS и MSC.MARC.



- На картинках ниже представлено распределение напряжения в контакте, полученные для элементов HEX27, на недеформированном виде для фрагмента модели.



Тест 7.4. Задача Герца для двух полуфер

G. DUMONT: "Method of the active stresses applied to the unilateral contact" Note HI-75/93/016

Решается задача Герца для двух полуфер. На верхнюю и нижнюю грани полуфер прикладывается перемещение U_y , равное 2 и -2, соответственно. В данном тесте приведено решение для 3D случая без учета трения.

Геометрическая модель:

- Радиус сфер $R = 50$ мм
- В виду симметрии рассматривается $\frac{1}{4}$ часть модели

Параметры материалов:

- Изотропный
- Модуль упругости $E = 20\,000$ МПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$

Граничные условия:

- Боковые поверхности закреплены по нормали к ним (условие симметрии)
- К верхней поверхности верхней полушеры приложено перемещение $U_y = -2$ мм
- К нижней поверхности нижней полушеры приложено перемещение $U_y = 2$ мм

Сетка:

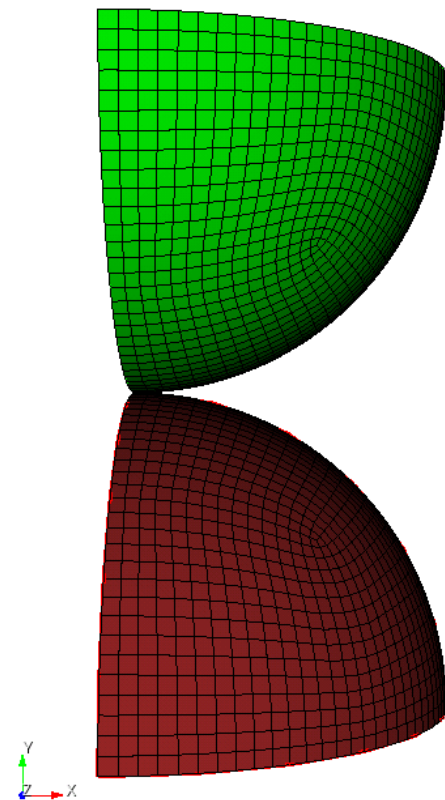
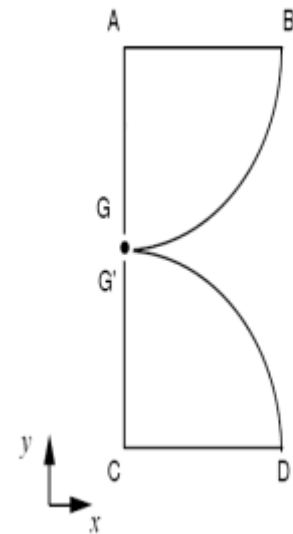
- 8-узловые гексаэдры HEX8

Критерий прохождения теста:

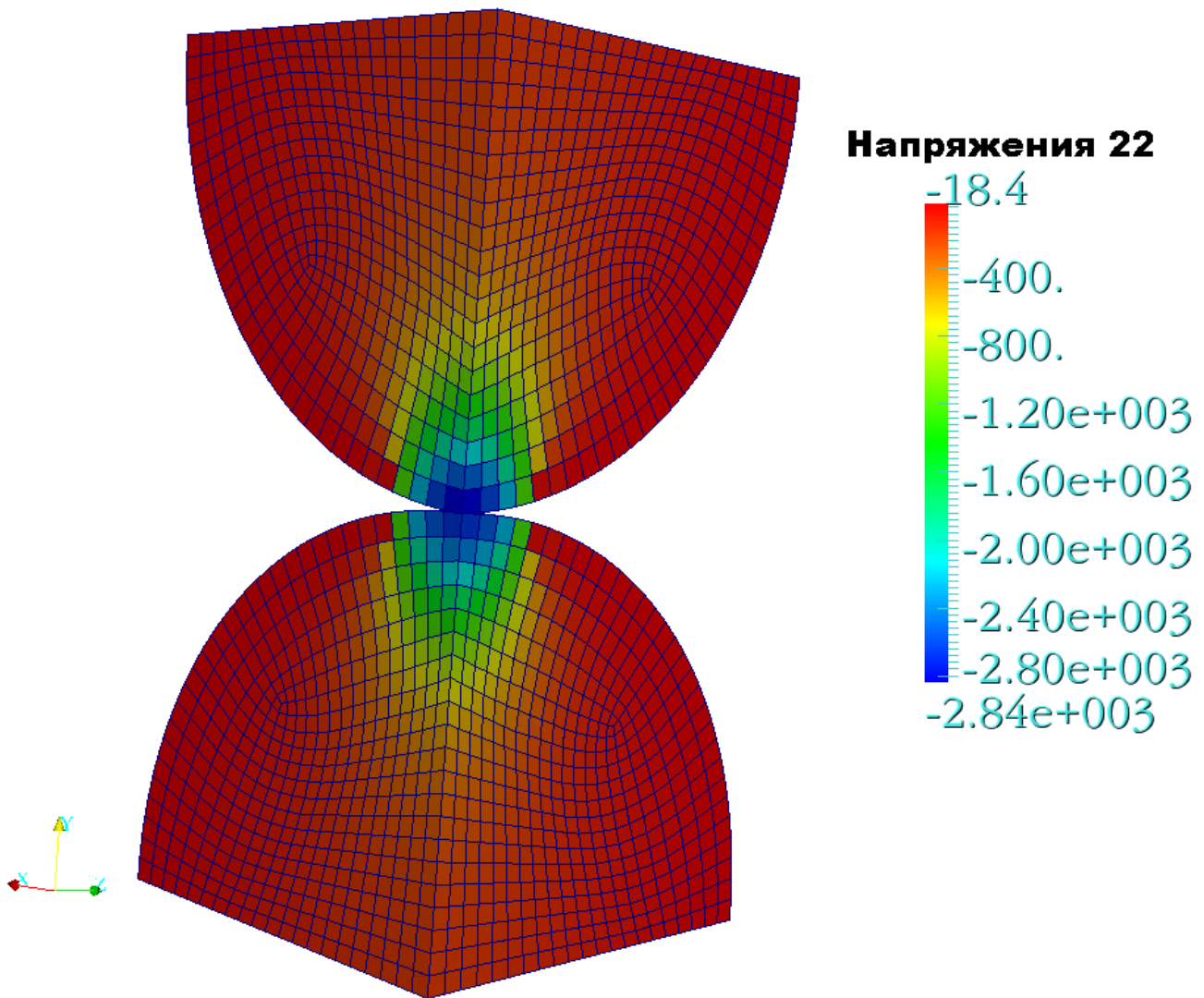
- Напряжение σ_{22} в точке G равно -2 798.3 МПа [10]

Результаты:

- Полученное в результате решения значение напряжения σ_{22} в точке G равно -2 837.1 МПа и отличается от исходного на 1.4%.



- На картинке ниже представлено распределение напряжения σ_{22} в контакте, полученные для элементов HEX8.



Расчет эффективных свойств композитов

Тест 8.1. Однослойный волокнистый композит ($N_{нитей}=1$)

Решается задача о нахождении эффективных свойств материала для однослойного волокнистого композита. Модель представляет собой прямоугольный параллелепипед со сторонами 25x16x16 мм. По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 мм и радиусом 2.85459861019 мм (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%). Решение задачи взято из источника [36].

Геометрическая модель:

- Параллелепипед 25 мм x 16 мм x 16 мм

Материал:

- Свойства материала нити:
 - Модуль упругости $E=2\ 000$ МПа
 - Коэффициент Пуассона $\nu=0.2$
- Свойства материала матрицы:
 - Модуль упругости $E=2$ МПа
 - Коэффициент Пуассона $\nu=0.3$

Граничные условия:

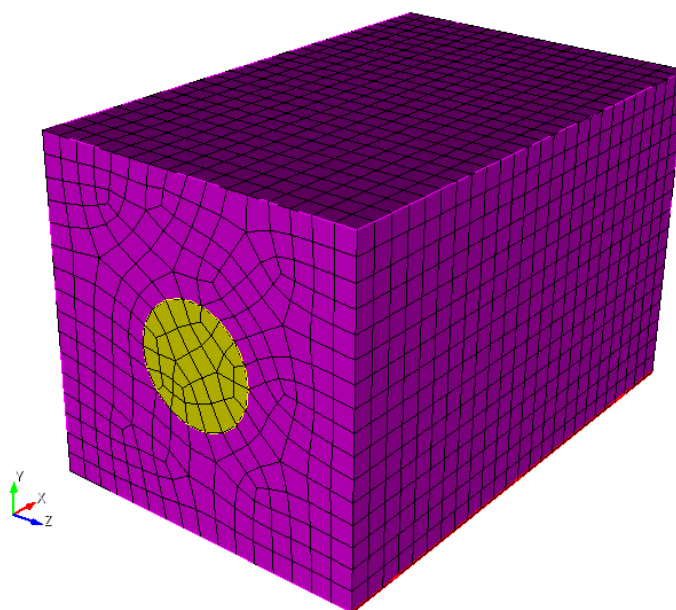
- Периодические

Сетка:

- 8-узловые гексаэдры Hex8

Критерий прохождения теста (точность 3%):

- $C_{1111} = 202.48$ МПа
- $C_{1122} = 1.22711$ МПа
- $C_{1133} = 1.22711$ МПа
- $C_{1212} = 0.938421$ МПа
- $C_{1313} = 0.938421$ МПа
- $C_{2222} = 3.11029$ МПа
- $C_{2233} = 1.33286$ МПа
- $C_{2323} = 0.888717$ МПа
- $C_{3333} = 3.11029$ МПа



Результаты:

- В таблице ниже представлено сравнение значений для критерия прохождения теста и результаты расчёта, полученные FIDESYS.

Величина	Критерий прохождения теста	FIDESYS	
		Hex8	
		Значение	Ошибка
C_1111	1.2	1.2	<0.01%
C_1122	0.4	0.4	<0.01%
C_1133	0.4	0.4	<0.01%
C_1212	0.4	0.4	<0.01%
C_1313	0.4	0.4	<0.01%
C_2222	1.2	1.2	<0.01%
C_2233	0.4	0.4	<0.01%
C_2323	0.4	0.4	<0.01%
C_3333	1.2	1.2	<0.01%

Тест 8.2. Двуслойный слоисто-волокнистый композит.

Решается задача о нахождении эффективных свойств материала для двуслойного слоисто-волокнистого композита. Модель имеет следующие параметры: диаметр нити 6.0 мм, угол наклона нитей 30°, шаг нитей 8.0 мм, толщина слоя 16.0 мм. Решение задачи взято из источника [36].

Геометрическая модель:

- Диаметр нити 6.0 мм
- Угол наклона нитей 30°
- Шаг нитей 8.0 мм
- Толщина слоя 16.0 мм

Параметры материала:

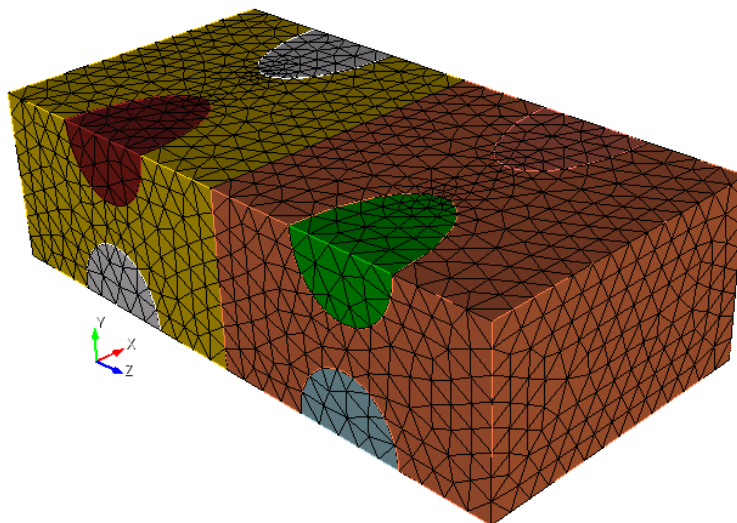
- Свойства материала нити:
 - Модуль упругости $E=200\,000$ МПа
 - Коэффициент Пуассона $\nu=0.25$
- Свойства материала матрицы:
 - Модуль упругости $E=2$ МПа
 - Коэффициент Пуассона $\nu=0.49$

Граничные условия:

- Периодические

Сетка:

- 4-узловые тетраэдры Tetra4.



**Критерий прохождения теста (точность 3%):**

- C_1111 = 24 852.4 МПа
- C_1122 = 8 281.54 МПа
- C_2222 = 2 763.12 МПа
- C_1212 = 8 283.5

Результаты:

- В таблице ниже представлено сравнение значений для критерия прохождения теста и результаты расчёта, полученные FIDESYS.

Величина	Критерий прохождения теста	FIDESYS	
		Tetra4	
		Значение	Ошибка
C_1111	24 852.4	24 852.4	<0.01%
C_1122	8 281.54	8 281.54	<0.01%
C_2222	2 763.12	2 763.12	<0.01%
C_1212	8 283.5	8 283.5	<0.01%

Тест 8.3. Сплошной куб из однородного материала Гука (3D)

Решается задача о нахождении эффективных свойств материала для куба из однородного материала Гука. Решение задачи следует напрямую из определения эффективных свойств: эффективными свойствами однородного материала являются свойства этого материала [34].

Геометрическая модель:

- Сторона куба $L=1$ мм

Параметры материала:

- Материал Гука
- Модуль упругости $E = 1$ МПа
- Коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$

Граничные условия:

- Непериодические

Сетка (два отдельных теста):

- 8-узловые гексаэдры Hex8
- 4-узловые тетраэдры Tetra4

Критерий прохождения теста (точность 1%):

- $C_{1111} = 1.2$ МПа
- $C_{1122} = 0.4$ МПа
- $C_{1133} = 0.4$ МПа
- $C_{1212} = 0.4$ МПа
- $C_{1313} = 0.4$ МПа
- $C_{2222} = 1.2$ МПа
- $C_{2233} = 0.4$ МПа
- $C_{2323} = 0.4$ МПа
- $C_{3333} = 1.2$ МПа

Результаты:

- В таблице ниже представлено сравнение значений для критерия прохождения теста и результаты расчёта, полученные FIDESYS.

Величина	Критерий прохождения теста	FIDESYS			
		Hex8		Tetra4	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
C_1111	1.2	1.2	<0.01%	1.2	<0.01%
C_1122	0.4	0.4	<0.01%	0.4	<0.01%
C_1133	0.4	0.4	<0.01%	0.4	<0.01%
C_1212	0.4	0.4	<0.01%	0.4	<0.01%
C_1313	0.4	0.4	<0.01%	0.4	<0.01%
C_2222	1.2	1.2	<0.01%	1.2	<0.01%
C_2233	0.4	0.4	<0.01%	0.4	<0.01%
C_2323	0.4	0.4	<0.01%	0.4	<0.01%
C_3333	1.2	1.2	<0.01%	1.2	<0.01%

Тест 8.4. Сплошной куб из ортотропного материала.

Решается задача о нахождении эффективных свойств материала для куба из ортотропного материала. Решение задачи следует напрямую из определения эффективных свойств: эффективными свойствами однородного материала являются свойства этого материала [35]

Геометрическая модель:

- Сторона куба $L=1$ мм

Параметры материала:

- Ортотропный
- Модули упругости $E_x = 12$ МПа, $E_y = 8$ МПа, $E_z = 4$ МПа
- Главные коэффициенты Пуассона $\nu_{xy} = 0.25$, $\nu_{xz} = 0.25$, $\nu_{yz} = 0.25$
- Модули сдвига $G_{xy} = 3$ МПа, $G_{xz} = 2$ МПа, $G_{yz} = 1$ МПа

Граничные условия:

- Непериодические

Сетка (два отдельных теста):

- 8-узловые гексаэдры Hex8
- 4-узловые тетраэдры Tetra4

Критерий прохождения теста (точность 1%):

- $C_{1111} = 21$ МПа
- $C_{1122} = 9$ МПа
- $C_{1133} = 7.5$ МПа
- $C_{1212} = 3$ МПа
- $C_{1313} = 2$ МПа
- $C_{2222} = 13$ МПа
- $C_{2233} = 5.5$ МПа
- $C_{2323} = 1$ МПа
- $C_{3333} = 7.25$ МПа

Результаты:

- В таблице ниже представлено сравнение значений для критерия прохождения теста и результаты расчёта, полученные FIDESYS.

Величина	Критерий прохождения теста	FIDESYS			
		Hex8		Tetra4	
		Значение	Ошибка	Значение	Ошибка
C_1111	21	21	<0.01%	21	<0.01%
C_1122	9	9	<0.01%	9	<0.01%
C_1133	7.5	7.5	<0.01%	7.5	<0.01%
C_1212	3	3	<0.01%	3	<0.01%
C_1313	2	2	<0.01%	2	<0.01%
C_2222	13	13	<0.01%	13	<0.01%
C_2233	5.5	5.5	<0.01%	5.5	<0.01%
C_2323	1	1	<0.01%	1	<0.01%
C_3333	7.25	7.25	<0.01%	7.25	<0.01%

Литература

- [1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г., 568 стр.
- [2] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger “Theory of Plates and Shells”. McGraw–Hill New York, 1959, 580 pages.
- [3] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, перев. с англ. – М.: Наука, 1975 г. – 576 стр.
- [4] Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 520 с.
- [5] The Standart NAFEMS Benchmarks, TNSB, Rev. 3, 05/10/1990
- [6] Nastran Verification Manual
- [7] http://ps-2.kev009.com/CATIA-B18/CATIAfr_C2/elfugCATIAfrs.htm
- [8] А.С. Городецкий, И.Д. Евзеров Компьютерные модели конструкций - Киев: Факт, 2005 г. – 344 стр.
- [9] M.V. Barton, “Vibration of Rectangular and Skew Cantilever Plates”, Journal of Applied Mechanics, vol. 18, 1951, p. 129-134.
- [10] <http://www.code-aster.org/V2/doc/v10/en/>
- [11] OLSON,M.D., LINDBERG,G.M., “Vibration analysis of cantilevered curved plates using a new cylindrical shell finite element, 2nd Conf. Matrix Methods in Structural Mechanics”, WPAFB, Ohio, 1968.
- [12] OLSON,M.D., LINDBERG,G.M., “Dynamic analysis of shallow shells with a doubly curved triangular finite element”, JSV, Vol. 19, No 3, pp 299-318, 1971
- [13] Comparison of Autodesk Simulation tools to NAFEMS Benchmarks. © 2011 Autodesk, Inc.
- [14] R.D. Blevins, formulated for natural frequency and shape mode, New York, Van Nostrand, 1979
- [15] M. Petyt, Introduction to Finite Element Vibrational Analysis, Cambridge University Press, 1990
- [16] <http://www.autofemsoft.com/en/examples.html>
- [17] Аналитическое решение: W. Novgaard, “Stress in three dimensional pipe-bends”, Transactions of ASME, vol. 57, FSP 75 – 12, p. 401 – 416.
- [18] Семёнов В.А. “Верификационный отчет по программному комплексу MicroFe”. М.: 2009, 327 стр.
- [19] Тимошенко С.П. Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки – М.: Наука, 1966 г. – 636стр.
- [20] Тимошенко С.П. Соппротивление материалов т.1 – М., 1965 г. – 364 стр.
- [21] SCAD Structure Контрольные примеры, Киев ,2000
- [22] SolidWorks Simulation 2010 Validation
- [23] Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 3. . - М.: Машиностроение, 1968
- [24] S.P. Timoshenko, J.M Manages “Theory of elastic stability” second edition. Dunod, 1966, 500 pages
- [25] Михеев М. А., Михеева И. М. Основы теплопередачи. Изд. 2-е, стереотип. М., «Энергия», 1977.
- [26] Боли Б., Дж.Уэйнер. Теория температурных напряжений. М., Наука, 1974 г. – 249 стр., 259 стр.
- [27] Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том 1. . - М.: Машиностроение, 1968
- [28] Verification Manual for the Mechanical APDL Application, SAS IP, Inc 2009
- [29] Качанов Л.М. Основы теории пластичности – М.: Наука, 1969 г. 420 стр.

[30] NAFEMS Understanding Non-linear Finite Element Analysis Through Illustrative Benchmarks

[31] Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. - Киев: Наук. думка, 1988.

[32] I-Deas Model Solution Verification Manual

[33] NAFEMS Advanced Finite Element Contact Benchmarks

[34] Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М., Наука, 1980. – 512 с

[35] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Издательство Московского университета, 1984. – 335 с.

[36] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М., «Мир», 1982. – 334 с.