



# FIDESYS

система прочностного анализа

Версия 4.1

**Отчет о тестировании**



## Содержание

Введение .....	2
1. Задачи с точными аналитическими решениями.....	4
1.1. Контрольная задача №1.1 .....	4
1.2. Контрольная задача №1.2.....	8
1.3. Контрольная задача №1.3.....	12
1.4. Контрольная задача №1.4.....	16
1.5. Контрольная задача №1.5.....	22
1.6. Контрольная задача №1.6.....	25
1.7. Контрольная задача №1.7.....	32
1.8. Контрольная задача №1.8.....	35
1.9. Контрольная задача №1.9.....	40
1.10. Контрольная задача №1.10.....	43
1.11. Контрольная задача №1.11.....	46
1.12. Контрольная задача №1.12.....	52
2. Задачи с численно приближенными аналитическими решениями .....	58
2.1. Контрольная задача №2.1.....	58
2.2. Контрольная задача №2.2.....	61
2.3. Контрольная задача №2.3.....	64
2.4. Контрольная задача №2.4.....	66
2.5. Контрольная задача №2.5.....	69
2.6. Контрольная задача №2.6.....	72
2.7. Контрольная задача №2.7.....	76
2.8. Контрольная задача №2.8.....	79
2.9. Контрольная задача №2.9.....	83
2.10. Контрольная задача №2.10.....	87
2.11. Контрольная задача №2.11.....	91
2.12. Контрольная задача №2.12.....	96
2.13. Контрольная задача №2.13.....	99
2.14. Контрольная задача №2.14.....	106
2.15. Контрольная задача №2.15.....	109
3. Задачи для облачной версии .....	112
3.1. Контрольная задача №3.1.....	112
3.2. Контрольная задача №3.2.....	115
3.3. Контрольная задача №3.3.....	118
3.4. Контрольная задача №3.4.....	125
4. Контактная информация .....	129

## Введение

### О программе

**CAE Fidesys** — программный комплекс прочностного анализа. Комплекс позволяет проводить расчёты для задач следующих типов:

- статическое нагружение;
- динамическое нагружение;
- задача устойчивости;
- анализ собственных частот;
- гармонический анализ;
- расчёт эффективных свойств материалов;
- комбинация мод на основе спектрального анализа;
- топологической оптимизации моделей;
- расчет для Автомеханики,
- расчет Универсальный механизм.

В состав комплекса входит программа **Fidesys Viewer**, предназначенная для просмотра и анализа полученных результатов:

- визуализации скалярных и векторных полей;
- работа с форматом SEG-Y;
- построения графиков и диаграмм;
- построения зависимостей от частоты;
- анализа временных зависимостей.

### Общие положения

**CAE Fidesys** – это инновационная CAE-система, осуществляющая полный цикл инженерных расчётов от построения расчётной сетки до визуализации результатов расчёта.

CAE Fidesys постоянно проверяется разработчиками при добавлении нового функционала. Данные проверки программного комплекса проводится в соответствии с процедурами, которые составляют часть общей программы обеспечения качества **CAE Fidesys**. В приведенном отчете по тестированию для версии CAE Fidesys 4.1 представлена небольшую часть тестовых примеров (контрольных задач) обеспечения качества, которая используется при тестировании нового функционала. Тестовые примеры представляют собой сравнения решений, полученных в **CAE Fidesys**, с известными теоретическими решениями и другими независимо рассчитанными решениями.

Представленные контрольные задачи подобраны таким образом, чтобы охватить разнообразные проблемные области, типов нагрузок, граничных условий, соответствующие новому функционалу и техническому заданию для версии **CAE Fidesys 4.1**.

## Ожидаемые результаты

Каждая задача верифицирует определенный набор параметров. Также для каждой задачи приведен ожидаемый результат, который и рассматривается как критерий прохождения теста. Считается, что тестовое испытание прошло успешно, если относительная погрешность результатов расчета в **CAE Fidesys** по сравнению с эталонными не превысит 5%. Относительная погрешность определяется по следующей формуле:

$$\Delta = \left| \frac{P - P_0}{P_0} \right| \cdot 100\% ,$$

где  $\Delta$  – значение относительной погрешности показателя;  $P$  – расчетное значение показателя, полученного в **CAE Fidesys**;  $P_0$  – ожидаемое (эталонное) значение показателя.

## Системные требования

**CAE Fidesys** с самого начала разрабатывается таким образом, что системные требования комплекса невысоки: он может быть запущен на обыкновенном персональном компьютере. При наличии в компьютере одного и более многоядерных процессоров вычисления будут автоматически распараллелены на все ядра. Начиная с версии 1.5, в 64-битной версии программного комплекса доступно распараллеливание вычислений на несколько узлов, объединенных в локальную сеть или кластер.

Программный комплекс **CAE Fidesys** предъявляет следующие минимальные требования к программному обеспечению и оборудованию.

### Аппаратные требования

- Процессор: Dual-core 1,7 ГГц и выше.
- Оперативная память: не менее 4 GB.
- Свободное место на диске: 5 GB.
- Видеокарта уровня NVIDIA GeForce GTX 460 или выше.
- Разрешение экрана: 1024x768 или выше.

### Операционная система

Поддерживаются следующие версии операционных систем (64-разрядные версии):

- Windows 7 Service Pack 1;
- Windows 8;
- Windows 8.1;
- Windows Server 2008 R2 SP1;
- Windows Server 2008 Service Pack 2;
- Windows Server 2012;
- Windows Server 2012 R2;
- Windows 10;
- Ubuntu 18.04;
- CentOS 6;
- CentOS 7;
- Debian 9;
- RedHat 6;
- RedHat 7;
- Open SUSE Leap 15;
- Alt Linux 7;
- Alt Linux 8.

## 1. Задачи с точными аналитическими решениями

### 1.1. Контрольная задача №1.1

#### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для ортогонально армированного композита.

#### *Значения входных данных*

Параметры материала:

Материал матрицы:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Материал нити:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Два куба 16 x 16 x 16, лежащих друг на друге по оси Z;
- По центру вдоль одного проходит нить длиной 16 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%) параллельно оси X, вдоль другого - параллельно оси Y;
- Нить:  $\lambda = 10$ ;
- Матрица:  $\lambda = 2$ .

Граничные условия:

- Периодические.
- Тетраэдры первого порядка.

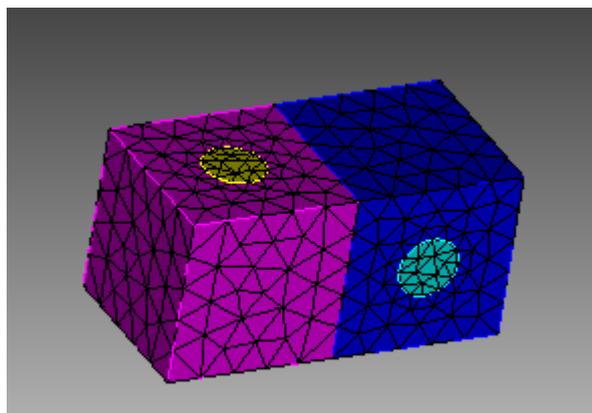


Рисунок 1 – Сетка 3D-тетраэдры

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.54285
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.54285
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.17647

### Описание алгоритма аналитического решения

Ортогонально армированным называется композит, в котором на одно волокно, направленное вдоль оси Y, приходится k волокон, направленных вдоль оси X. Аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы". Коэффициент теплопроводности таких композитов в направлении X определяется по формуле:

$$\lambda_x^{ort} = \lambda_x \frac{k}{k+1} + \frac{\lambda_y}{k+1} = \frac{1}{k+1} (\lambda_x k + \lambda_y)$$

в направлении Y – формулой

$$\lambda_y^{ort} = \frac{\lambda_x}{k+1} + \lambda_y \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1} (\lambda_x + \lambda_y k)$$

Здесь  $\lambda_x, \lambda_y$  определяются формулами для волокнистого материала.

При одинаковом количестве волокон в направлениях X и Y

$$\lambda_x^{ort} = \lambda_y^{ort} = \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2}$$

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

Гексаэдральная сетка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	2.54285	2.524	-0.73%
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	2.54285	2.525	-0.69%
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	2.17647	2.2705	4.14%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
#{length = 16.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt( 0.01 * pitch * thick * conc / 3.1415926 )}
#{size = 3.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
move volume all z {-thick/2.0} include_merged
volume all move z {thick} copy
rotate volume 2 3 angle 90 about z include_merged
imprint volume all
merge volume all
volume all scheme Tetmesh
volume all size {size}
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 10
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 1
```



```
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 2
block 1 volume 2 4
block 2 volume 3 5
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block 1 2 element solid order 1
analysis type effectiveprops heattrans dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 1.2. Контрольная задача №1.2

### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### *Значения входных данных*

Параметры материала:

Материал матрицы:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Материал нити:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Прямоугольный параллелепипед 4 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);
- Нить:  $\lambda = 10$ ;
- Матрица:  $\lambda = 2$ .

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Тетраэдры первого порядка.

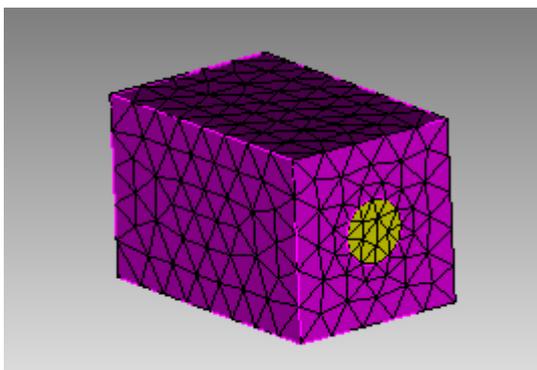


Рисунок 2 – Сетка 3D- тетраэдры

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.8
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы". Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f, \lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

Тетраэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	2.8	2.773	-0.97%
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	2.28571	2.2829	-0.12%
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	2.28571	2.2917	0.26%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt( 0.01 * pitch * thick * conc / 3.1415926)}
#{size = 3.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
volume all scheme Tetmesh
volume all size {size}
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 10
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 1
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 2
```



block 1 volume 2

block 2 volume 3

block 1 material 'fiber'

block 2 material 'matrix'

block 1 2 element solid order 1

analysis type effectiveprops heattrans dim3

periodicbc on

#### Список литературы

[1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.

[2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.

[3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

### 1.3. Контрольная задача №1.3

#### **Назначение контрольной задачи**

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

#### **Значения входных данных**

Параметры материала:

Материал матрицы:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 2 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.3;
- Коэффициент теплопроводности =  $7.7 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .

Материал нити:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 2000 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.2;
- Коэффициент теплопроводности =  $1.3 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .

Геометрическая модель:

- Прямоугольный параллелепипед 25 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

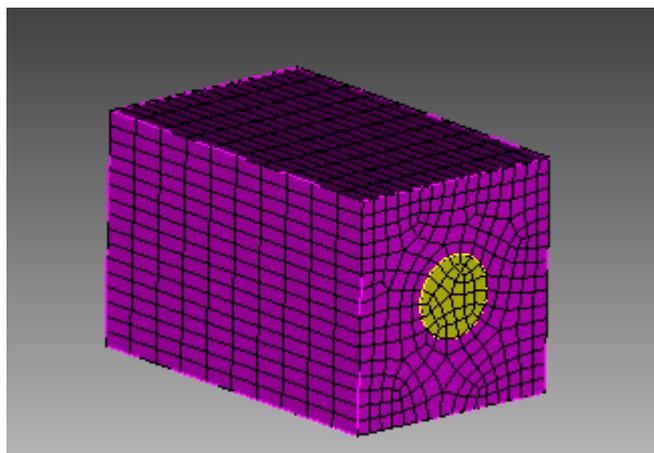


Рисунок 3 – Сетка 3D- гексаэдры

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$1.35709 * 10^{-5}$
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы". Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f, \lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

Гексаэдральная сетка второго порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$1.35709 \cdot 10^{-5}$	$1.358 \cdot 10^{-5}$	0.05%
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$8.58878 \cdot 10^{-5}$	$8.308 \cdot 10^{-5}$	3.27%
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$8.58878 \cdot 10^{-5}$	$8.477 \cdot 10^{-5}$	1.31%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt(0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
#{size = 1.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
volume all size {size}
curve 18 20 22 24 interval 10
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2000
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.2
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1.3e-5
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
```



```
modify material 2 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 7.7e-5
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block all element solid order 2
analysis type effectiveprops heatexpansion dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 1.4. Контрольная задача №1.4

### Назначение контрольной задачи

В предлагаемой задаче моделируется бесконечное пространство, заполненное однородной изотропной упругой средой, в которой действует сосредоточенная сила, приложенная в точке и действующая по закону Берлаге (задача Стокса [1]). Считается, что источник точечный, то есть он мал по сравнению с расстоянием до приемника и так же мал по сравнению с характерными размерами пространства. Задача имеет аналитическое решение.

### Значения входных данных

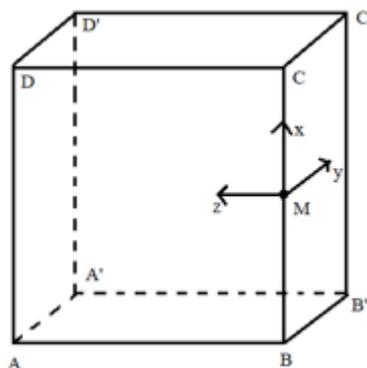


Рисунок 4 – Геометрическая модель задачи Стокса

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e8$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 1900$  кг/м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель:

- Куб  $100 \times 100 \times 100$  м;
- Геометрию переместили к координатам  $(0, 50, 50)$ , чтобы  $M = (0, 0, 0)$ .

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости ABCD вдоль оси Y;
- Нулевое перемещение плоскости BB`C`C вдоль оси Z;
- Нулевое перемещение ребра A`D` вдоль оси X;
- В точке  $M = (0, 0, 0)$  приложена сила величиной 100 кН, направленная вдоль оси X;

- Зависимость силы от времени по формуле Берлаге с амплитудой 25е6 м и циклической частотой 10 Гц. Примечание: так как в CAE Fidesys рассматривается четверть реальной модели, то следует амплитуду, используемые для реализации аналитического решения в математическом пакете, разделить на 4;
- Неотражающие ГУ в плоскостях AA'D'D, A'B'C'D', DCC'D', ABB'A';
- Вдоль линии действия силы к узлам присвоены приёмники по всем направлениям для каждого поля из выпадающего списка (перемещение, скорость, главные напряжения, давление).

Сетка:

- Высота элемента первого блока  $h = 10$  м;
- Высота элемента второго блока  $h = 9$  м;
- Спектральные гексаэдры седьмого порядка

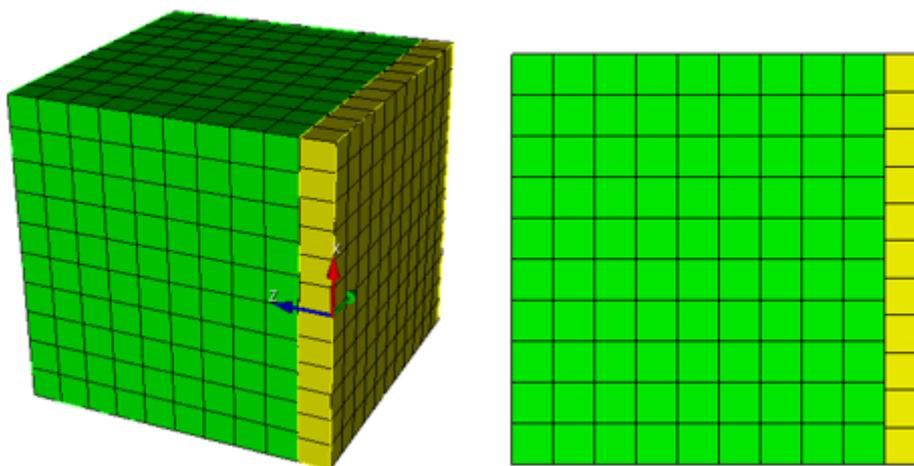


Рисунок 5 – Неконформная конечно-элементная сетка для задачи Стокса

### Ожидаемые результаты

Значения перемещений проверяются в точке (20, 10, 20).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.13	Displacement X	м	5.308e-06
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.144	Displacement Y	м	4.79e-06



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.144	Displacement Z	м	9.581e-06
4	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.199	Displacement X	м	1.843e-05
5	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.206	Displacement Y	м	-7.416e-06
6	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.2033	Displacement Z	м	-1.5e-05
7	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.249	Displacement X	м	-1.027e-05
8	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.2532	Displacement Y	м	3.563e-06
9	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.2532	Displacement Z	м	7.125e-06
10	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.299	Displacement X	м	3.536e-06
11	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.3	Displacement Y	м	-1.1e-06
12	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.303	Displacement Z	м	-2.328e-06

## Описание алгоритма аналитического решения

Пусть на бесконечное пространство, заполненное однородной изотропной упругой средой, действует сосредоточенная сила, приложенная в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и направленная вдоль определенной оси  $x_j$ . Пусть по величине эта сила равна нулю при  $t < 0$  и  $X_0(t)$  при  $t > 0$ . Соответствующий такой силе вектор упругих смещений  $u_i(x, t)$  определяется следующими формулами Стокса [1]:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right),$$

где  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $\gamma_i = \frac{x_i}{r}$  – направляющие косинусы,  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  – скорость продольной волны,  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – скорость поперечной волны,  $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$  – константы Ламе,  $\rho$  – плотность среды, в которой распространяется волны.

Символ Кронекера  $\delta_{ij}$  интерпретируется следующим образом:

$$\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j.$$

Сила приложена вдоль оси  $x$  и распространяется по закону Берлаге. Экспериментальным путем установлено, что распространение упругих волн в земной коре качественно описываются при задании нагрузки законом Берлаге [2]:

$$X_0(t) = A \cdot \omega_1^2 e^{-\omega_1 t} \cdot \left( \sin(\omega_0 t) \left( \frac{-t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left( \frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right),$$

$$\omega_0 = 2\pi\omega, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}},$$

здесь  $A$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – циклическая частота колебаний.

Проведя анализ всех коэффициентов в формуле Стокса, перепишем её более конкретно под нашу постановку:

$$u_x(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_x\gamma_x - 1) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_x\gamma_x \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_x\gamma_x - 1) \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\beta}\right),$$

$$u_y(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_y\gamma_x - 0) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_y\gamma_x \frac{1}{r} X_0\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) -$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_y\gamma_x - 0) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}), \\
 u_z(x, t) = & \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_z\gamma_x - 0) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_z\gamma_x \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) - \\
 & - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_z\gamma_x - 0) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}).
 \end{aligned}$$

Таким образом, входными данными для реализации аналитического решения задачи Стокса в математических пакетах являются:  $A$ ,  $\omega$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$

## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.136	Displacement X	м	5.328e-06	5.54992e-06	3.08
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.144	Displacement Y	м	4.79e-06	4.85984e-06	1.56
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.144	Displacement Z	м	9.58e-06	9.43758e-06	1.39
4	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.2	Displacement X	м	1.841e-05	1.87276e-05	1.67
5	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.2	Displacement Y	м	-7.33e-06	-7.20336e-06	1.73
6	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.2	Displacement Z	м	-1.466e-05	-1.52926e-05	4.32
7	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.248	Displacement X	м	-1.025e-05	-1.05004e-05	2.54
8	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.256	Displacement Y	м	3.51e-06	3.28308e-06	0.77
9	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.256	Displacement Z	м	7.021e-06	6.99676e-06	0.63

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

reset



```
set default element hex
brick x 100 y 100 z 100
move Volume 1 x 0 y 50 z 50 include_merged
webcut volume 1 with plane zplane offset 10
move Volume 2 x 0 y 0 z -0.1 include_merged
partition create curve 6 position 0 0 0
volume 1 size 10
mesh volume 1
volume 2 size 9
mesh volume 2
create material 1
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e8
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1900
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 4 #fixed
block 2 add volume 2
block 2 material 1 cs 1 element solid order 4 #fixed
create displacement on curve 2 dof 1 fix 0
create displacement on surface 10 14 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create absorption on surface 1 8 9 11 13 15 16
create force on vertex 17 force value 1 direction 1 0 0
bcdep force 1 value 'berlage(25e6, 10, time)'
create contact master surface 7 slave surface 12 tolerance 0.11 type tied method auto
analysis type dynamic elasticity dim3 preload off
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 0.4 maxsteps 50000
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 10
```

#### Список литературы

- [1] Аки К. Количественная сейсмология/ Ричардс П. — М.: Мир, т. 1, 1983. — 880 с.
- [2] Geophysics, vol. 55, no. 11, november 1990. — P. 1508-1511, 2 figs.

## 1.5. Контрольная задача №1.5

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается двумерная задача о всестороннем растяжении плоской неограниченной пластины с круговым вырезом. Задача имеет аналитическое решение. Для случая поэтапного нагружения принимается во внимание, что в линейном случае результат не зависит от пути нагружения. Таким образом, нагрузка разбивается на 6 шагов нагружения. В задаче проверяется корректность задания граничного условия давления для поэтапного нагружения.

### Значения входных данных

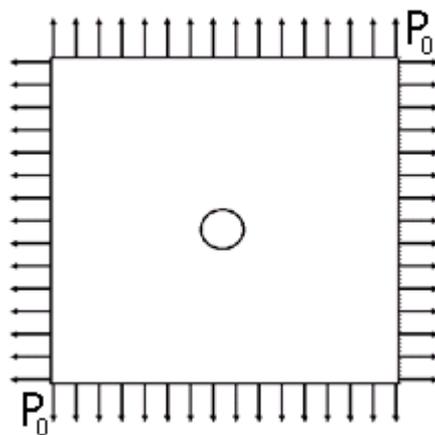


Рисунок 6 – Геометрическая модель для пластины с всесторонним растяжением

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается  $1/4$  пластины;
- Сторона пластины 10 м;
- Диаметр отверстия 0.5 м;
- Используются полярные координаты.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси  $X$  на прямой  $AB$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Y$  на прямой  $ED$ ;
- $P_0 = 0.1$  МПа, 0.25 МПа, 0.5 МПа, 0.75 МПа, 0.9 МПа, 1МПа.

Сетка:

- 2D-четырёхугольные спектральные элементы третьего порядка

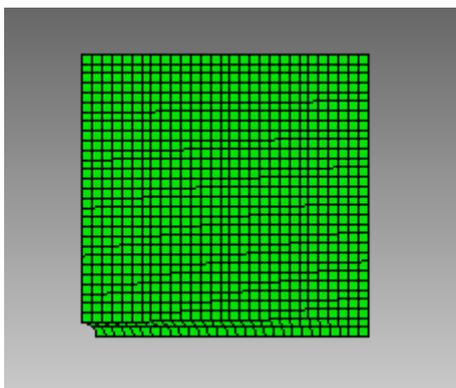


Рисунок 7 – Сетка 2D- четырехугольные спектральные элементы

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в полярных координатах	Stress FF	МПа	2
2	Номер шага	step	-	6

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по формуле [1]:

$$\sigma_0 = 2P_0.$$

### Результаты

Четырехугольные спектральные элементы

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в полярных координатах	Stress FF	МПа	2	2	0.00
2	Номер шага	step	-	6	6	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
set node constraint on
create surface rectangle width 5 height 5 zplane
move surface 1 x 2.5 y 2.5
create surface circle radius 0.25 zplane
subtract body 2 from body 1
surface 3 size auto factor 2
    
```



```
surface 3 scheme auto
mesh surface 3
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add surface 3
block 1 material 1 cs 1 element plane order 3
create displacement on curve 7 dof 2 fix 0
create displacement on curve 8 dof 1 fix 0
create pressure on curve 1 4 magnitude 0
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 3 1 value 3
modify table 1 cell 4 1 value 4
modify table 1 cell 5 1 value 5
modify table 1 cell 6 1 value 6
modify table 1 cell 1 2 value -100000
modify table 1 cell 2 2 value -250000
modify table 1 cell 3 2 value -500000
modify table 1 cell 4 2 value -750000
modify table 1 cell 5 2 value -950000
modify table 1 cell 6 2 value -1e+06
bcdep pressure 1 table 1
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 6
```

#### Список литературы

[1] Седов Л.И. "Механика сплошной среды, том 2". М.: Наука, 1970г.

## 1.6. Контрольная задача №1.6

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача распределение напряжений в окрестности вертикальной скважины радиуса  $R_w$ , пробуренной на глубину  $h$ . Пласт считается изотропным, однородным. Задача имеет аналитическое решение [1]. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- расчет порового давления среды;
- учёт пластических свойств материала при расчете напряженно-деформированного состояния среды;
- критерий пластичности Друкера-Прагера с симметричным упрочнением;
- нелинейной модели для расчета механической прочности;

полей вывода Перемещений, Напряжений, Упругих деформаций, Пластических деформаций с учетом возникновения пластичности.

### Значения входных данных

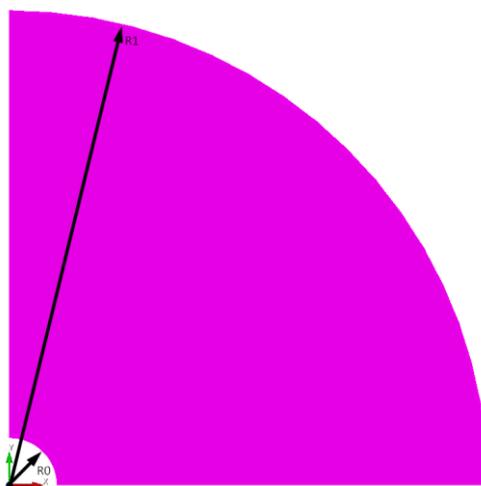


Рисунок 8 – Геометрическая модель

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/4 пластины;
- $R_1 = 10$ ,  $R_2 = 1$ ;
- В аналитическом решении используются полярные координаты

Граничные условия:

- Давление на скважине  $p = 4e7$ ;
- Давление на удалении  $p = 8e7$ ;
- Закрепление из условий симметрии;

- Пороговое давление  $p = 4e7$ .

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 1e9$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Когезия  $K = 5.43712e+6$ ;
- Угол внутреннего трения  $\alpha = 21.43$ ;
- Угол дилатансии  $\beta = 21.43$ ;
- Пористость = 0.25;
- Проницаемость =  $1e-12$ ;
- Вязкость жидкости = 0.005;
- Число Био = 1;
- Модуль упругости жидкости =  $1e9$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры второго порядка.

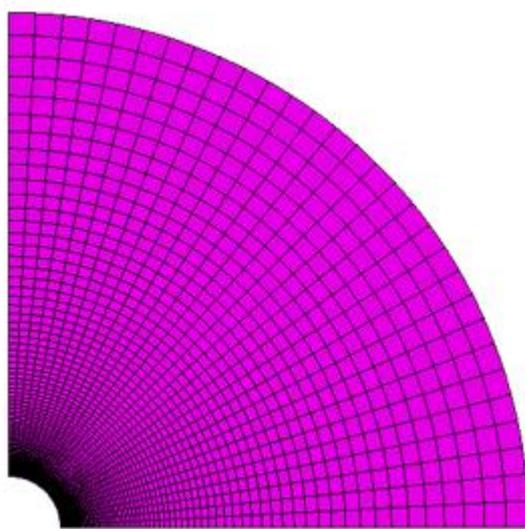


Рисунок 9 – Спектральные элементы 3 порядка для задачи Лэмба

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время – 3 с;
- Максимальное количество шагов 2025;

- Вывод каждого 135 шага в .vtu файл.

## Ожидаемые результаты

Ожидаемые результаты получены из аналитического решения, приведенного ниже, и приведены совместно с результатами расчета.

## Описание алгоритма аналитического решения

Верификация численной пороупругопластической модели CAE Fidesys основана на аналитическом решении, рассмотренной в п. 1 работы [1].

Изучается распределение напряжений в окрестности вертикальной скважины радиуса  $R_w$ , пробуренной на глубину  $h$ . Пласт считается изотропным, однородным.

Задача решается в цилиндрической системе координат.

Исходное напряженное состояние пласта рассматривается как состояние всестороннего сжатия горным давлением  $Q = -\gamma h$ , где  $\gamma$  - средний удельный вес вышележащих пород.

В работе предполагается, что коэффициент Био равен 1,  $p_0$  - начальное пластовое давление фильтрующейся жидкости. Тогда исходные эффективные напряжения определяются выражениями

$$S_r^0 = S_\theta^0 = S_z^0 = Q + p_0$$

а полные напряжения

$$\sigma_r = S_r - p_0, \sigma_\theta = S_\theta - p_0, \sigma_z = S_z - p_0$$

В постановке п. 1 [1] считается, что фильтрация жидкости отсутствует, поэтому на скважине поровое давление  $p_w$  совпадает с  $p_0$ .

В работе [1] предполагается, что в качестве критерия текучести используется критерий Кулона-Мора с параметрами  $\tau_s$  - коэффициент сцепления,  $\rho$  - угол внутреннего трения породы. В CAE Fidesys используется критерий Друкера-Прагера. Поверхность Друкера-Прагера является сглаженной поверхностью Кулона-Мора (в CAE Fidesys поверхность Друкера-Прагера вписана в шестигранный конус Кулона-Мора). На основании исследования [2] предполагаем, что отличия в результатах для критериев Друкера-Прагера и Кулона-Мора должны быть незначительны.

## Результаты

Значения перемещений проверяются в точке (70.4225, 4.31214e-15, 0.0).

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1,0,0)	Stress_YY	Па	-6.81E+07	-6.771E+07	-0.58
2	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.1102, 0,0)	Stress_YY	Па	-7.75E+07	-7.758E+07	-0.10
3	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.2063, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.57E+07	-8.643E+07	-0.88



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
4	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.30623, 0,0)	Stress_YY	Па	-9.31E+07	-9.400E+07	-0.98
5	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.38922, 0,0)	Stress_YY	Па	-9.68E+07	-9.757E+07	-0.78
6	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.49691, 0,0)	Stress_YY	Па	-9.92E+07	-9.969E+07	-0.51
7	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.655, 0,0)	Stress_YY	Па	-1.00E+08	-1.003E+08	-0.02
8	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.74951, 0,0)	Stress_YY	Па	-9.92E+07	-9.901E+07	-0.14
9	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.99968, 0,0)	Stress_YY	Па	-9.48E+07	-9.469E+07	-0.11
10	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(2.50458, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.96E+07	-8.956E+07	-0.08
11	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(3.01979, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.68E+07	-8.676E+07	-0.06
12	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(3.4908, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.52E+07	-8.520E+07	-0.05
13	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(4.01398, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.41E+07	-8.407E+07	-0.04
14	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(6.01916, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.21E+07	-8.212E+07	-0.02
15	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(8.01412, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.15E+07	-8.144E+07	-0.01
16	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(10, 0,0)	Stress_YY	Па	-8.11E+07	-8.113E+07	-0.02
17	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1, 0,0)	Stress_XX	Па	-4.00E+07	-4.000E+07	-0.01
18	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.1102, 0,0)	Stress_XX	Па	-4.32E+07	-4.329E+07	-0.17
19	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.2063, 0,0)	Stress_XX	Па	-4.63E+07	-4.634E+07	-0.07
20	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.30623, 0,0)	Stress_XX	Па	-4.98E+07	-4.971E+07	-0.15
21	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.38922, 0,0)	Stress_XX	Па	-5.29E+07	-5.245E+07	-0.82
22	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.49691, 0,0)	Stress_XX	Па	-5.67E+07	-5.578E+07	-1.53
23	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.655, 0,0)	Stress_XX	Па	-6.09E+07	-6.001E+07	-1.45
24	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.74951, 0,0)	Stress_XX	Па	-6.29E+07	-6.216E+07	-1.18
25	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.99968, 0,0)	Stress_XX	Па	-6.69E+07	-6.648E+07	-0.64



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
26	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(2.50458, 0,0)	Stress_XX	Па	-7.17E+07	-7.158E+07	-0.11
27	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(3.01979, 0,0)	Stress_XX	Па	74260000	-7.439E+07	-0.17
28	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(3.4908, 0,0)	Stress_XX	Па	-7.57E+07	-7.594E+07	-0.31
29	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(4.01398, 0,0)	Stress_XX	Па	-7.68E+07	-7.707E+07	-0.42
30	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(6.01916, 0,0)	Stress_XX	Па	-7.86E+07	-7.901E+07	-0.57
31	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(8.01412, 0,0)	Stress_XX	Па	-7.92E+07	-7.969E+07	-0.63
32	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(10, 0,0)	Stress_XX	Па	-7.95E+07	-8.000E+07	-0.66
33	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.012107	0.0122	0.10
34	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1.12917, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.01336	0.01341	0.36
35	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1.30623, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.011978	0.01205	0.61
36	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1.97385, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.00726	-7.271E-03	-0.16
37	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(2.69, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.01554	-1.562E-02	-0.52
38	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(3.685, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.02012	-2.017E-02	-0.20
39	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(6.137, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.02347	-2.348E-02	-0.05
40	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(10, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.02465	-2.465E-02	-0.00
41	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02285	-0.02251	-1.49
42	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1.497, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.0488	-0.04919	-0.81
43	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1.609, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.04991	-0.04998	-0.13
44	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(2.187, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.04021	-4.010E-02	-0.28
45	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(3.054, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.03297	-3.291E-02	-0.18
46	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(3.93, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02996	-2.992E-02	-0.13
47	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(5.455, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02774	-2.772E-02	-0.08



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
48	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(10, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02607	-2.606E-02	-0.04
49	Компонента перемещений $u_x$	(1, 0,0)	Displacement_X	м	-0.14374	-1.435E-01	-0.17
50	Компонента перемещений $u_x$	(1.1102, 0,0)	Displacement_X	м	-0.11475	-1.146E-01	-0.16
51	Компонента перемещений $u_x$	(1.2063, 0,0)	Displacement_X	м	-0.10044	-1.003E-01	-0.14
52	Компонента перемещений $u_x$	(1.30623, 0,0)	Displacement_X	м	-0.09343	-9.218E-02	-1.34
53	Компонента перемещений $u_x$	(1.47495, 0,0)	Displacement_X	м	-0.0868	-8.621E-02	-0.69
54	Компонента перемещений $u_x$	(1.70187, 0,0)	Displacement_X	м	-0.08491	-8.453E-02	-0.44
55	Компонента перемещений $u_x$	(2.10559, 0,0)	Displacement_X	м	-0.08714	-8.683E-02	-0.35
56	Компонента перемещений $u_x$	(2.44476, 0,0)	Displacement_X	м	-0.09106	-9.079E-02	-0.29
57	Компонента перемещений $u_x$	(3.1594, 0,0)	Displacement_X	м	-0.1026	-1.024E-01	-0.20
58	Компонента перемещений $u_x$	(7.5045, 0,0)	Displacement_X	м	-0.19975	-1.996E-01	-0.05
59	Компонента перемещений $u_x$	(10, 0,0)	Displacement_X	м	-0.26066	-2.606E-01	-0.04
60	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.330137	0.3313	0.36
61	Пластические деформации	(1.12917, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.161152	0.1604	0.47
62	Пластические деформации	(1.38922, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.024793	0.02468	0.45
63	Пластические деформации	(1.72569, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0	1.509E-05	0.00
64	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	-0.12074	-0.1209	-0.17
65	Пластические деформации	(1.12917, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	-0.06783	-0.06768	-0.22
66	Пластические деформации	(1.38922, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	-0.01683	-16.85	-0.10
67	Пластические деформации	(1.72569, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	0	-1.452E-05	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create surface circle radius 10 zplane
```



```
create surface circle radius 1 zplane
subtract body 2 from body 1
webcut body 1 with plane yplane offset 0
webcut body 3 with plane xplane offset 0
delete Body 4
delete Body 1
merge all
create material 1
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1e+09
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'COHESION' value 5.43712e+06
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 21.43
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 21.43
modify material 1 set property 'BIOT_ALPHA' value 1
modify material 1 set property 'POROSITY' value 0.25
modify material 1 set property 'PERMEABILITY' value 1e-12
modify material 1 set property 'FLUID_VISCOACITY' value 0.005
modify material 1 set property 'FLUID_BULK_MODULUS' value 1e9
curve 8 12 interval 90
curve 8 scheme bias factor 1.05 start vertex 7
curve 12 scheme bias factor 1.05 start vertex 11
curve 13 14 interval 30
mesh surface all
create displacement on curve 8 dof 2 fix 0
create displacement on curve 12 dof 1 fix 0
create porepressure on curve 13 14 value 4e7
create pressure on curve 13 magnitude 4e7
create pressure on curve 14 magnitude 8e7
block 1 surface all
block 1 material 1
block 1 element plane order 2
analysis type static elasticity plasticity porefluidtrans dim2 planestrain
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 30 maxloadsteps 10000000 tolerance 1e-3
```

## Список литературы

[1] Журавлев А.Б. Влияние фильтрации на напряженно-деформированное состояние породы в окрестности скважины / А.Б. Журавлев, В.И. Карев, Ю.Ф. Коваленко, К.Б. Устинов // Прикладная математика и механика, Т. 78, Вып. 1, 2014, стр. 86-97.

[2] Mountaka Souley, Alain Thoraval. Nonlinear mechanical and poromechanical analyses : comparison with analytical solutions. COMSOL Conference 2011, Oct 2011, Stuttgart, Germany. pp.NC. ffineris00973639

## 1.7. Контрольная задача №1.7

### Назначение контрольной задачи.

В предлагаемой задаче моделируется задача Герца для двух полусфер, контактирующих в начале координат. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- задания параметров скользящего контакта без трения в интерфейсе;
- статического решения с учетом скользящего контакта без трения для 3D-моделей;

корректности вывода поля Напряжений с учетом контактного взаимодействия.

### Значения входных данных

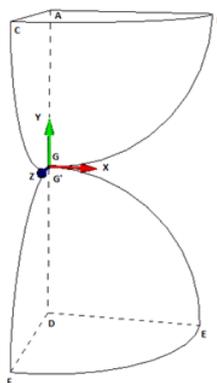


Рисунок 10 – Геометрическая модель задачи

Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается одна четвертая часть контактирующих в начале координат полусфер;
- Радиус полусфер  $r = 50$  мм.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e4$  Мпа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Граничные условия:

- Закрепление по нормали к поверхностям ABG и DEG:  $u_z|_{z=0} = 0$ ;
- Закрепление по нормали к поверхностям ACG и DFG:  $u_x|_{x=0} = 0$ ;
- Перемещение на поверхности ABC:  $u_y|_{y=r} = -2$  мм;
- Перемещение на поверхности DEF:  $u_y|_{y=-r} = 2$  мм;

- Общий контакт для поверхностей ABCG и DEFG`.

Параметры сетки:

- Гексаэдры первого порядка.

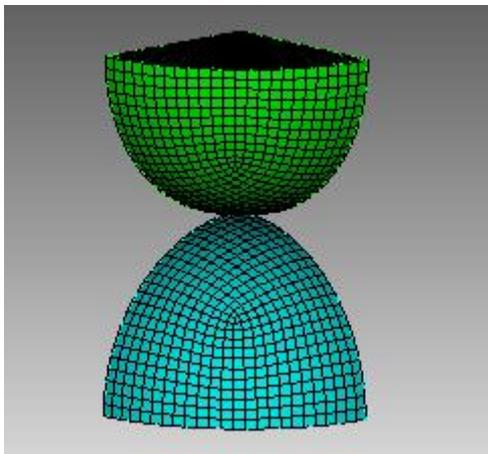


Рисунок 11 – Гексаэдры

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- Упругость;
- 3D.

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений	Stress YY	МПа	-2798.3

### Описание алгоритма аналитического решения

Эталонное значение получено с помощью формулы[1]:

$$\sigma_{yy} \Big|_G = -\frac{E}{\pi} \frac{1}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{4u_y \Big|_{y=-r}}{r}} .$$

## Результаты расчета

Гексаэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений	Stress YY	МПа	-2798.3	-2.935E+03	4.87

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create sphere radius 50
move Volume 1 y 50 include_merged
create sphere radius 50
move Volume 2 y -50 include_merged
webcut volume 1 with plane yplane offset 50
webcut volume 2 with plane yplane offset -50
delete volume 3 2
webcut volume all with plane xplane offset 0
webcut volume all with plane zplane offset 0
delete volume 5 6 7 8 9 10
volume all scheme polyhedron
volume all size auto factor 4
mesh volume all
create material 1
modify material 1 name 'Material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e4
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add volume all
block 1 material 1 cs 1 element solid order 1
create displacement on surface 25 33 dof 1 fix 0
create displacement on surface 23 31 dof 3 fix 0
create displacement on surface 24 dof 2 fix -2
create displacement on surface 34 dof 2 fix 2
create contact master surface 32 slave surface 26 tolerance 0.0005 friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap off type
general method auto
analysis type static plasticity elasticity dim3
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 10 maxloadsteps 30 tolerance 1e-3 targetiter 5
```

### Список литературы

[1] G. DUMONT: "Method of the active stresses applied to the unilateral contact" Note HI-75/93/016.

## 1.8. Контрольная задача №1.8

### Назначение контрольной задачи

В предлагаемой задаче стальной цилиндр вдавливается в алюминиевый блок. Предполагается, что оба материала линейно-упругие. При этом на цилиндр действует точечная сила  $F$  в отрицательном направлении оси  $Y$ . Задача имеет аналитическое решение для случая, когда коэффициент трения  $\mu=0$ . Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- задания параметров скользящего контакта без трения в интерфейсе;
- статического решения с учетом скользящего контакта без трения для случая 2D;
- корректности вывода поля Напряжения в контакте.

### Значения входных данных модуля

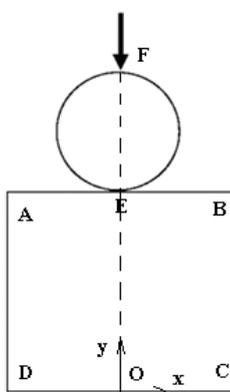


Рис.12 - Геометрическая модель задачи

Геометрическая модель:

- Круг с диаметром  $d = 100$  мм;
- Квадратная пластина  $200 \times 200$  мм.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости круга  $E_{\text{круг}} = 210$  кПа;
- Модуль упругости пластины  $E_{\text{пластина}} = 70$  кПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Граничные условия:

- Ввиду симметрии рассматривается  $\frac{1}{2}$  часть модели;
- Для стороны  $OC$   $u_x = u_y = 0$ ;
- Для стороны  $OE, EF$   $u_x = 0$ ;
- В точке  $F$  приложена сила величиной  $35$  кН, направленная вдоль отрицательной оси  $Y$ ;

- Скользящий контакт без трения (общий) для поверхностей EF и ABCD.

Параметры сетки:

- Модель разбита на квадратные 8-узловые элементы.

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение	Координаты точки	Размерность	Значение
1	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта	Contact Stress Node X	(6.22562, -49.6109, 0)	Па	0

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение этой контактной задачи можно получить из контактных формул Герца [1] для двух цилиндров. Максимальное контактное давление определяется по формуле:

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{F_n E^*}{2\pi BR^*}},$$

где  $F_n$  - приложенная нормальная сила,  $E^*$  - комбинированный модуль упругости,  $B$  - длина цилиндра и  $R^*$  - комбинированный радиус.

Ширина контакта  $2a$  определяется как:

$$a = \sqrt{\frac{8F_n R^*}{\pi B E^*}}.$$

Используя нормированную координату с декартовой системой

координат  $\xi = x/a$  и координатой  $x$ , распределение давления определяется следующим образом:

$$p = p_{\max} \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Комбинированный модуль упругости определяется из модуля упругости и коэффициента Пуассона цилиндра  $E_1, \nu_1$  и блока  $E_2, \nu_2$  следующим образом:

$$E^* = \frac{2E_1 E_2}{E_2(1 - \nu_1^2) + E_1(1 - \nu_2^2)}.$$

Суммарный радиус кривизны рассчитывается по радиусу кривизны цилиндра  $R_1$  и блока  $R_2$  следующим образом:

$$R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Для целевого решения блок аппроксимируется бесконечно большим радиусом. Комбинированный радиус затем оценивается как:

$$R^* = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1.$$

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Координаты точки	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта	Contact Stress Node X	(6.22562, -49.6109, 0)	Па	0	0.00	0.00

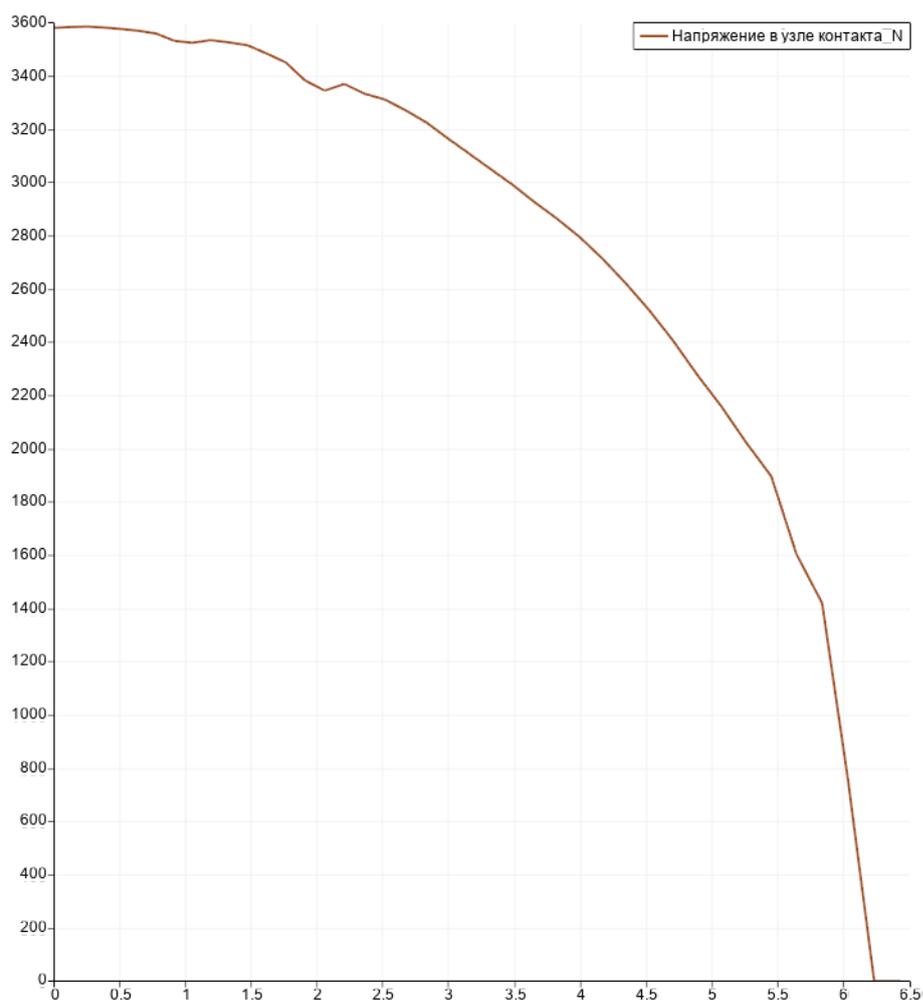


Рис. 13 – График распределения напряжений в узле контакта N с зоной контакта 6.2 мм



Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create surface circle radius 50 zplane
create surface rectangle width 200 height 200 zplane
move Surface 2 y -150 include_merged
webcut body 1 2 with plane xplane offset 0
delete Surface 4 6
split surface 3 across location position 0 0 0 location position 50 0 0
create surface rectangle width 25 zplane
move Surface 9 y -62.5 include_merged
move Surface 9 x 12.5 include_merged
split surface 5 with surface 9
delete Body 5
split surface 11 across location position 0 -150 0 location position 100 -150 0
curve 18 17 scheme bias fine size 0.25 factor 1.025 start vertex 7
mesh curve 18 17
surface 7 size auto factor 3
mesh surface 7
surface 8 size auto factor 3
mesh surface 8
surface 10 size 1
mesh surface 10
surface 13 12 size auto factor 3
mesh surface 13 12
create material 1
modify material 1 name 'Mat_cube'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e5
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'Mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 7e4
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 surface 12 13 10
set duplicate block elements off
block 2 surface 8 7
```



```
block 1 material 'Mat_cube'  
block 2 material 'Mat_cyl'  
create displacement on curve 11 dof all fix  
create displacement on curve 20 17 28 35 32 dof 1 dof 3 dof 4 dof 5 dof 6 fix  
create force on vertex 6 force value 17500 direction ny  
block 1 element plane order 2  
block 2 element plane order 2  
create contact master curve 27 slave curve 18 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap  
off method penalty normal_stiffness 1.0 tangent_stiffness 0.5  
analysis type static elasticity dim2 planestrain
```

## Список литературы

[1] Hertz, H., Über die Berührung fester elastischer Körper. J. Reine Angew. Mathm. 92, 156-171, 1881.

## 1.9. Контрольная задача №1.9

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о нахождении собственных частот консольной балки, которая разделена на три части, между которыми действует условие связанного контакта. Балка зажата на левом конце и нагружена растягивающей продольной силой  $P$  на правом конце. Контрольная задача предназначена для проверки корректности результата расчета модального анализа с учетом жесткого контакта.

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Длина  $L = 0.5$  м;
- Ширина  $b = 0.05$  м;
- Высота  $h = 0.02$  м.



Рис. 12 - Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- Левый конец балки закреплен по всем осям ( $u_x = u_y = u_z = r_x = r_y = r_z = 0$ );
- На правый конец балки действует сила  $P = 50000$  Н.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 2.1e + 11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ ;
- Плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдральная сетка 2 порядка.

Настройки контакта:

- Жесткий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Модальный анализ;
- Преднагруженная модель;
- Поиск первой минимальной частоты.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Значение
1	Собственная частота	Eigen Values 1, Гц	85.804

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение выглядит следующим образом [1]:

$$f_1^* = f_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{5PL^2}{14EJ}}$$
$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_1}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}},$$

где  $f_1$  - первая собственная частота консольной балки,  $J$  - момент инерции,  $\rho$  - плотность материала,  $F$  - площадь поперечного сечения,  $k_1 = 1.875$ .

### Результаты расчета

Значения перемещений проверяются в точке (20, 10, 20).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Собственная частота	Eigen Values 1	Гц	85.804	8.616E+01	0.42

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset  
brick x 0.5 y 0.02 z 0.05  
webcut volume 1 with plane xplane offset 0.083333333  
webcut volume 2 with plane xplane offset -0.083333333  
merge all  
volume all size 0.01  
volume all scheme Tetmesh  
mesh volume all  
create contact autoselect volume 1 2 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap off  
method auto
```



```
create contact autoselect volume 3 2 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap off
method auto
create material 1 name "mat1"
modify material 1 set property 'DENSITY' value 7800
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.28
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e+11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 'mat1'
create displacement on surface 4 dof all fix
list Surface 6 mesh
create force on vertex 2 5 6 1 force value 12500 direction x
block 1 element solid order 2
analysis type eigenfrequencies dim3 preload on
eigenvalue find 10 smallest
```

#### Список литературы

[1] AutoFem Analysis First Natural Frequency of the Cantilever Beam under the Stretching Longitudinal Force (<https://autofem.com>)

## 1.10. Контрольная задача №1.10

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о зависимости критической силы от условий закрепления стержня. Стержень разделен на две части, между которыми действует условие общего контакта. Стержень зажат на левом конце и нагружен растягивающей продольной силой  $P$  на правом конце. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета для анализа потери устойчивости с учетом общего контакта.

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Длина  $L = 2.54$  м;
- Ширина  $b = 0.0508$  м;
- Высота  $h = 0.0508$  м.

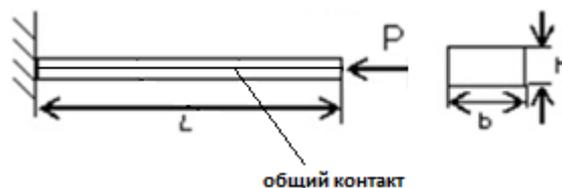


Рис. 13 - Геометрическая модель стержня

Граничные условия:

- Левый конец балки закреплен по всем осям ( $u_x = u_y = u_z = r_x = r_y = r_z = 0$ );
- На правый конец балки действует сила  $P = 0.1$  Н.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 2.1e+11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Потеря устойчивости;
- Поиск первой формы потери устойчивости.

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Значение
1	Критическая сила	Critical Values 1	44527

### **Описание алгоритма аналитического решения**

Аналитическое решение выглядит следующим образом [1]:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I}{(l/2)^2}.$$

### **Результаты расчета**

Значения перемещений проверяются в точке (70.4225, 4.31214e-15, 0).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Критическая сила	Critical Values 1	-	44527	4.458E+04	0.12

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 2.54 y 0.0508 z 0.0508
webcut volume 1 with plane yplane
webcut volume all with plane zplane
surface 19 26 33 31 scheme map
mesh surface 19 26 33 31
curve 2 4 6 8 interval 50
curve 2 4 6 8 scheme equal
mesh curve 2 4 6 8
volume all size auto factor 4
mesh volume all
create material 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 1
```



```
block 1 element solid order 2  
create displacement on surface 23 35 29 21 dof all fix 0  
create pressure on surface 19 26 33 31 magnitude 388  
create contact autoselect tolerance 0.0005 type general method auto  
analysis type stability elasticity dim3  
eigenvalue find 1 smallest
```

[1] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - 10-е издание, перераб. и доп. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. - 592 с.

## 1.11. Контрольная задача №1.11

### Назначение контрольной задачи

Сжатие упругопластического образца в виде прямоугольного параллелепипеда (полилинейное изотропное упрочнение).

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Параллелепипед 5x1x1;

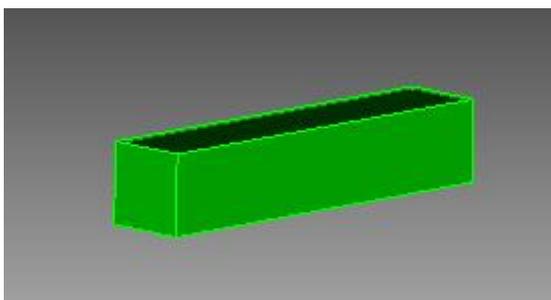


Рис. 14 - Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- На грани  $y = 0$   $u_y = 0$ ;
- На грани  $z = 0$   $u_z = 0$ ;
- На всём объёме  $u_x = -2 \cdot x / 5$

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 5.1e+6$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Когезия  $c = 15000$ ;
- Угол внутреннего трения  $\phi = 0$ ;
- Угол дилатансии  $\psi = 0$ ;

Упрочнение, заданное кривой напряжение/пластическая деформация (на растяжение), импортированной из файла `lider_hardening.csv`:

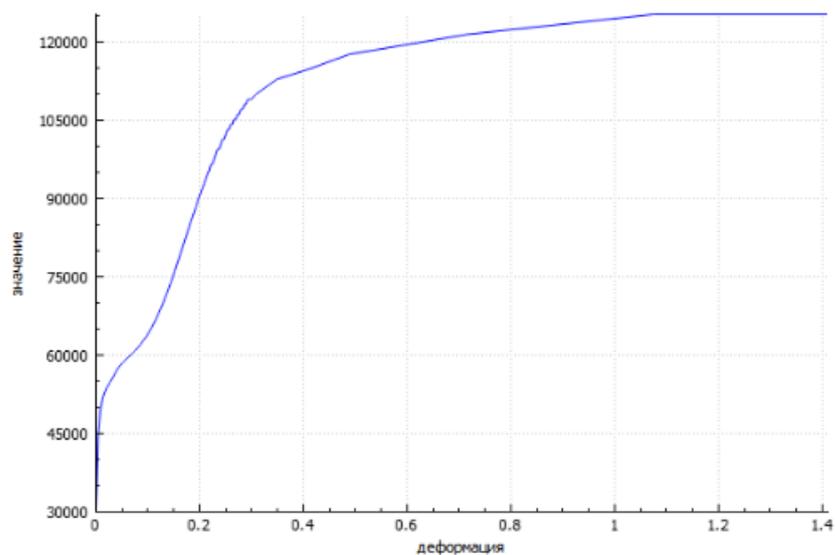


Рис. 15 – Кривая напряжения/пластические деформации

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры первого порядка.

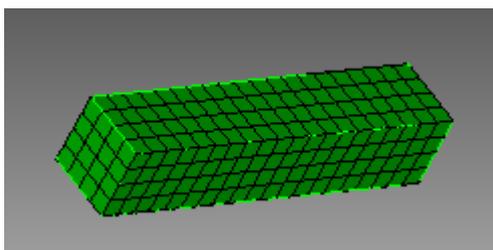


Рис. 16 – Конечно-элементная сетка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение
1	Компоненты тензора напряжений при t=0.2	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-60117.782
2	Компоненты тензора напряжений при t=0.4	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-74207.347
3	Компоненты тензора напряжений при t=0.6	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-96336.05
4	Компоненты тензора напряжений при t=0.8	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-108917.197
5	Компоненты тензора напряжений при t=1	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-113650.937

## Описание алгоритма аналитического решения

Из закона Гука, упругие деформации связаны с напряжениями следующим образом:

$$\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{22}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{33}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11}))$$

Выражения для деформаций  $\varepsilon_{ij}$  записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда закон Гука и выражение для  $\varepsilon_{ij}$  можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_{11}(t) = t \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -0.4t$$

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{22}^e = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = \varepsilon_{33}^e$$

Для данной постановки предел текучести достигается когда деформация  $\varepsilon_{ij}$  достигает значения:

$$\varepsilon_c = -\frac{\sigma_c}{E} = -\frac{2c}{E} = 0.00588$$

Оно достигается при времени  $t$  равном

$$t_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{11}(1)} = \frac{-0.00588}{-0.4} = 0.0147$$

После достижения предела текучести материал действует согласно критерию пластичности Друкера-Прагера

$$F(\sigma, \varepsilon_{eq}^p) = \sigma_{eq} + \beta\sigma - R(\varepsilon_{eq}^p) = 0$$

Где  $\sigma_{eq}$  - интенсивность напряжений,  $H, \beta, \sigma_y$  - заданные коэффициенты,  $\sigma$  - первый инвариант тензора напряжений,  $\varepsilon_{eq}^p$  - интенсивность пластических деформаций

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}}$$

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\beta = \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi} = 2c$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p \cdot e_{ij}^p}$$

Где  $S_{ij}$  - девиатор тензора напряжений,  $e_{ij}^p$  - девиатор тензора пластических деформаций,  $\varepsilon^p$  - первый инвариант тензора пластических деформаций

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma}{3} \delta_{ij}$$

$$e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{\varepsilon^p}{3} \delta_{ij}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p$$

Для модели пластичности Друкера-Прагера связь напряжений и пластических деформаций имеет следующий вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{eq}^p \left( -\frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_{eq}} + \beta \delta_{ij} \right)$$

Полные деформации складываются из упругих и пластических:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда можно найти  $\sigma_{eq}$  и  $\sigma$

$$\sigma = \sigma_{11}, \sigma_{eq} = |\sigma_{11}|$$

Так как рассматривается одноосное сжатие,  $\sigma_{11} < 0$  и  $\varepsilon_{11}^p < 0$ , тогда выражения для критерия пластичности и связи напряжений и пластических деформаций принимают более простой вид:

$$\sigma_{11} = -R(\varepsilon_{eq}^p)$$

$$\varepsilon_{11}^p = -\varepsilon_{eq}^p$$

$$\varepsilon_{22}^p = \frac{1}{2} \varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{33}^p$$

Тогда итоговое выражение для  $\sigma_{11}$  примет вид:

$$\sigma_{11} = -R(-\varepsilon_{11}^p)$$

Где  $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{11}^p(\varepsilon_{11})$ :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \varepsilon_{11}^p$$

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений при t=0.2	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-60117.782	-6.188E+04	-2.93%
2	Компоненты тензора напряжений при t=0.4	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-74207.347	-7.262E+04	-2.14%
3	Компоненты тензора напряжений при t=0.6	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-96336.05	-9.657E+04	-0.24%
4	Компоненты тензора напряжений при t=0.8	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-108917.197	-1.041E+05	-4.39%
5	Компоненты тензора напряжений при t=1	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-113650.937	-1.137E+05	-0.0%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset  
set default element hex  
#{h=1}  
brick x {5*h} y {h} z {h}  
move volume 1 x {5*h/2} y {h/2} z {h/2}  
create material 1  
modify material 1 name "material"  
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5.1e6  
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25  
modify material 1 set property 'COHESION' value 15000  
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 0
```



```
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 0
create table 1 file "relative_path_to_model" #commandRelativePath:Models\lider_hardening.csv
modify table 1 dependency strain
modify material 1 set property 'SIGMA_CURVE' table 1
block 1 volume 1
block 1 material 'material'
block 1 element solid order 1
curve 2 4 6 8 interval 20
surface 4 6 size {h/4}
mesh volume 1
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create displacement on volume 1 dof 1 fix 0
#compress
bcdep displacement 3 value '-2*x/5'
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 100 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5
```

## Список литературы

[1] RICE JR: The localization of plastic deformations, in Theoretical and Applied Mechanics (1976)

## 1.12. Контрольная задача №1.12

### Назначение контрольной задачи

Растяжение упругопластического образца в виде прямоугольного параллелепипеда (полилинейное изотропное упрочнение).

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Параллелепипед 5x1x1;

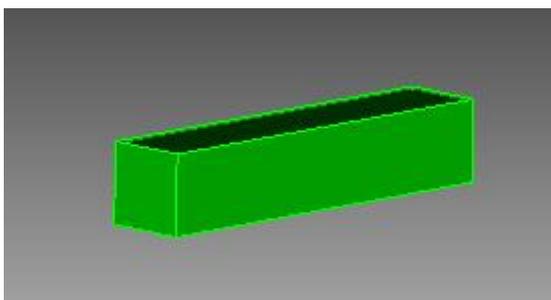


Рис. 17 - Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- На грани  $y = 0$   $u_y = 0$ ;
- На грани  $z = 0$   $u_z = 0$ ;
- На всём объёме  $u_x = -2 \cdot x / 5$

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 5.1e+6$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Когезия  $c = 15000$ ;
- Угол внутреннего трения  $\phi = 0$ ;
- Угол дилатансии  $\psi = 0$ ;

Упрочнение, заданное кривой напряжение/пластическая деформация (на растяжение), импортированной из файла `lider_hardening.csv`:

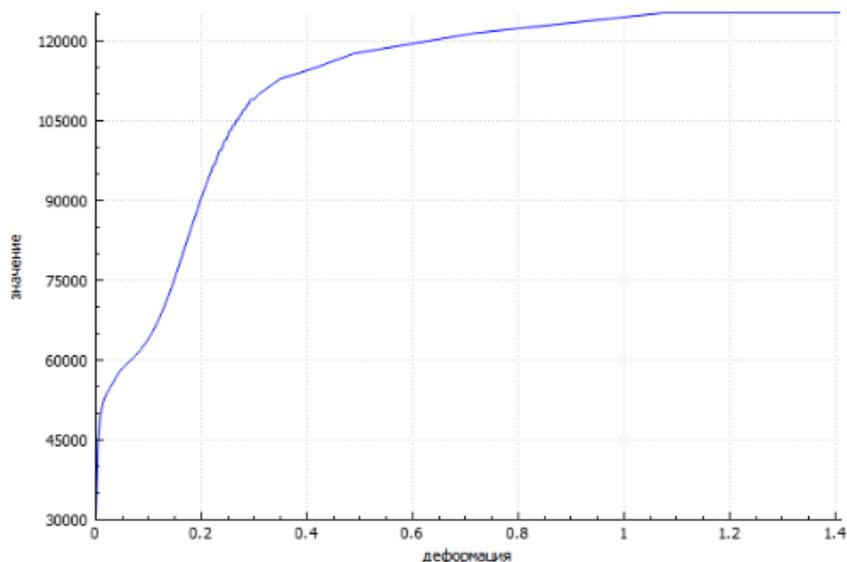


Рис. 18 - Упрочнение

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры первого порядка.

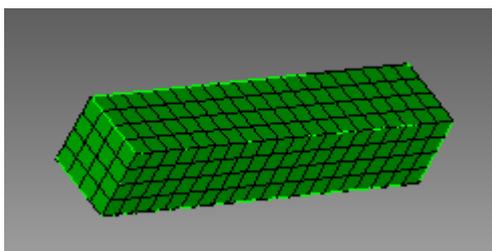


Рис. 19 – Конечно-элементная сетка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение
1	Компоненты тензора напряжений при t=0.2	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-60117.782
2	Компоненты тензора напряжений при t=0.4	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-74207.347
3	Компоненты тензора напряжений при t=0.6	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-96336.05
4	Компоненты тензора напряжений при t=0.8	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-108917.197
5	Компоненты тензора напряжений при t=1	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-113650.937

## Описание алгоритма аналитического решения

Из закона Гука, упругие деформации связаны с напряжениями следующим образом:

$$\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{22}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{33}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11}))$$

Выражения для деформаций  $\varepsilon_{ij}$  записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда закон Гука и выражение для  $\varepsilon_{ij}$  можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_{11}(t) = t \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0.4t$$

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{22}^e = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = \varepsilon_{33}^e$$

Для данной постановки предел текучести достигается когда деформация  $\varepsilon_{ij}$  достигает значения:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{2c}{E} = 0.00588$$

Оно достигается при времени  $t$  равном

$$t_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{11}(1)} = \frac{-0.00588}{-0.4} = 0.0147$$

После достижения предела текучести материал действует согласно критерию пластичности Друкера-Прагера

$$F(\sigma, \varepsilon_{eq}^p) = \sigma_{eq} + \beta\sigma - R(\varepsilon_{eq}^p) = 0$$

Где  $\sigma_{eq}$  - интенсивность напряжений,  $H, \beta, \sigma_y$  - заданные коэффициенты,  $\sigma$  - первый инвариант тензора напряжений,  $\varepsilon_{eq}^p$  - интенсивность пластических деформаций

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}}$$

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\beta = \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi} = 2c$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p \cdot e_{ij}^p}$$

Где  $S_{ij}$  - девиатор тензора напряжений,  $e_{ij}^p$  - девиатор тензора пластических деформаций,  $\varepsilon^p$  - первый инвариант тензора пластических деформаций

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma}{3} \delta_{ij}$$

$$e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{\varepsilon^p}{3} \delta_{ij}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p$$

Для модели пластичности Друкера-Прагера связь напряжений и пластических деформаций имеет следующий вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{eq}^p \left( -\frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_{eq}} + \beta \delta_{ij} \right)$$

Полные деформации складываются из упругих и пластических:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда можно найти  $\sigma_{eq}$  и  $\sigma$

$$\sigma = \sigma_{11}, \sigma_{eq} = |\sigma_{11}|$$

Так как рассматривается одноосное сжатие,  $\sigma_{11} < 0$  и  $\varepsilon_{11}^p < 0$ , тогда выражения для критерия пластичности и связи напряжений и пластических деформаций принимают более простой вид:

$$\sigma_{11} = -R(\varepsilon_{eq}^p)$$

$$\varepsilon_{11}^p = -\varepsilon_{eq}^p$$

$$\varepsilon_{22}^p = \frac{1}{2} \varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{33}^p$$

Тогда итоговое выражение для  $\sigma_{11}$  примет вид:

$$\sigma_{11} = -R(-\varepsilon_{11}^p)$$

Где  $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{11}^p(\varepsilon_{11})$ :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \varepsilon_{11}^p$$

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений при t=0.2	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	60117.782	6.188E+04	2.93%
2	Компоненты тензора напряжений при t=0.4	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	74207.347	7.262E+04	2.14%
3	Компоненты тензора напряжений при t=0.6	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	96336.05	9.657E+04	0.24%
4	Компоненты тензора напряжений при t=0.8	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	108917.197	1.041E+05	4.39%
5	Компоненты тензора напряжений при t=1	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	113650.937	1.137E+05	0.0%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
#{h=1}
brick x {5*h} y {h} z {h}
move volume 1 x {5*h/2} y {h/2} z {h/2}
create material 1
modify material 1 name "material"
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5.1e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'COHESION' value 15000
```



```
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 0
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 0
create table 1 file "relative_path_to_model" #commandRelativePath:Models\lider_hardening.csv
modify table 1 dependency strain
modify material 1 set property 'SIGMA_CURVE' table 1
block 1 volume 1
block 1 material 'material'
block 1 element solid order 1
curve 2 4 6 8 interval 20
surface 4 6 size {h/4}
mesh volume 1
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create displacement on volume 1 dof 1 fix 0
#compress
bcdep displacement 3 value '2*x/5'
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 1000 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000000 tolerance 1e-3 targetiter 5
```

## Список литературы

[1] RICE JR: The localization of plastic deformations, in Theoretical and Applied Mechanics (1976)

## 2. Задачи с численно приближенными аналитическими решениями

### 2.1. Контрольная задача №2.1

#### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного изотропного материала.

#### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 1$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Плотность  $\rho = 1 \text{ кг} / \text{м}^3$ ;
- Коэффициент теплопроводности  $\kappa = 1 \text{ Вт} / (\text{м} \cdot \text{К})$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha = 1 \text{ К}^{-1}$ .

Геометрическая модель

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

#### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$\text{К}^{-1}$	1
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$\text{К}^{-1}$	1
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$\text{К}^{-1}$	1

#### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Рассматриваем представительный объём  $V_0$ , выделенный в начальном состоянии, до деформации. На границе его задаём граничные условия в виде нулевого давления

$$N \cdot \sigma|_{\Gamma_0} = 0$$

изменяем температуру всего объёма на  $\Delta T$  и решаем на представительном объёме краевую задачу теории упругости

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

В результате расчёта описанной задачи мы получаем поле распределения тензора деформаций  $E$  на представительном объёме. Его мы осредняем по объёму:

$$E^e = \frac{1}{V} \int_V E dV$$

В итоге имеем, что мы задали для представительного объёма одинаковое изменение температуры  $\Delta T$  и более никаких граничных условий, кроме нулевого давления на границе - а получили в результате осреднения эффективный тензор деформаций  $E^e$ . Эффективные термоупругие характеристики будем искать в виде

$$E^e = \alpha_{ij} \Delta T$$

Для однородного материала численно приближенное аналитическое решение тривиальное: при осреднении мы должны получить эффективные коэффициенты температурного расширения, равные коэффициентам температурного расширения этого самого однородного материала. Это работает для изотропного, трансверсально-изотропного и ортотропного материалов.

## Результаты

Гексаэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1	1	0
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	1	1	0
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	1	1	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1
volume 1 scheme Map
volume 1 size 0.5
mesh volume 1
create material 1 name 'Material1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 1
block 1 volume 1
    
```



block 1 material 'Material1'

block 1 element solid order 2

analysis type effectiveprops heattrans dim3

periodicbc off

#### Список литературы

[1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.

[2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.

[3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 2.2. Контрольная задача №2.2

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного ортотропного материала.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Ортотропный;
- Модуль Юнга  $E_x = 12$  Па;
- Модуль Юнга  $E_y = 8$  Па;
- Модуль Юнга  $E_z = 4$  Па;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy} = 0.375$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{xz} = 0.75$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{yz} = 0.5$ ;
- Плотность  $\rho = 1 \text{ кг} / \text{м}^3$ ;
- Модуль сдвига  $G_{xy} = 3$  Па;
- Модуль сдвига  $G_{xz} = 2$  Па;
- Модуль сдвига  $G_{yz} = 1$  Па;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_x = 1 \text{ К}^{-1}$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_y = 2 \text{ К}^{-1}$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_z = 3 \text{ К}^{-1}$ .

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1 м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$\text{К}^{-1}$	1
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$\text{К}^{-1}$	2
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$\text{К}^{-1}$	3

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения приведено в п. 2.1.

### Результат

#### Гексаэдральная сетка второго порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1	1	0.00%
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	2	2	0.00%
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	3	3	0.00%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 1.0
volume 1 size 0.5
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'Material 1'
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_X' value 12
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Y' value 8
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Z' value 4
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XY' value 0.375
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XZ' value 0.75
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_YZ' value 0.5
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XY' value 3
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XZ' value 2
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_YZ' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_X' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Y' value 2
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Z' value 3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_CONDUCTIVITY_X' value 1
```



```
modify material 1 set property 'ORTHO_CONDUCTIVITY_Y' value 2  
modify material 1 set property 'ORTHO_CONDUCTIVITY_Z' value 3  
block 1 volume 1  
block 1 material 'Material 1'  
block 1 element solid order 2  
analysis type effectiveprops heattrans dim3  
periodicbc off
```

#### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 2.3. Контрольная задача №2.3

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного трансверсально-изотропного материала.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Трансверсально-изотропный;
- Модуль Юнга  $E_T = 3$  Па;
- Модуль Юнга  $E_L = 4$  Па;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_T = 0.25$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{TL} = 0.5$ ;
- Модуль сдвига  $G_{TL} = 1$  Па;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_T = 1$   $K^{-1}$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_L = 2$   $K^{-1}$ .

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	1
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	2

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения приведено в п. 2.1.

## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1	1	0.00
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	1	1	0.00
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	2	2	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset  
brick x 1  
volume 1 scheme Map  
volume 1 size 0.5  
mesh volume 1  
create material 1  
modify material 1 set property 'TR_ISO_CONDUCTIVITY_T' value 1  
modify material 1 set property 'TR_ISO_CONDUCTIVITY_L' value 2  
block 1 volume 1  
block 1 material 1  
block 1 element solid order 2  
analysis type effectiveprops heattrans dim3  
periodicbc off
```

### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 2.4. Контрольная задача №2.4

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Материал матрицы:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности =  $2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .
- Материал нити:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности =  $10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Геометрическая модель

- Прямоугольный параллелепипед 4 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);
- Нить:  $\lambda = 10$ ;
- Матрица:  $\lambda = 2$ .

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Тетраэдры первого порядка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.8
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Численно приближенное аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы" [1]. Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f, \lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.8	2.800E+00	<0.00
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.288E+00	0.10
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.288E+00	0.10

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt(0.01 * pitch * thick * conc / 3.1415926)}
#{size = 3.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
    
```



```
imprint volume all
merge volume all
volume all scheme Tetmesh
volume all size {size}
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 10
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 1
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 2
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block 1 2 element solid order 2
analysis type effectiveprops heattrans dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

##### Список литературы

[1 ] Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.

## 2.5. Контрольная задача №2.5

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Материал матрицы:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 2 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.3;
  - Коэффициент теплопроводности =  $7.7 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .
- Материал нити:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 2000 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.2;
  - Коэффициент теплопроводности =  $1.3 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .

Геометрическая модель

- Прямоугольный параллелепипед 25 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка: Гексаэдры второго порядка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$	$1.35709 * 10^{-5}$
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$

## Описание алгоритма аналитического решения

Численно приближенное аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы" [1]. Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f, \lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	1.35709 * 10 <sup>-5</sup>	1.358E-05	0.05
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	8.58878 * 10 <sup>-5</sup>	8.308E-05	3.27
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	8.58878 * 10 <sup>-5</sup>	8.477E-05	1.31

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt(0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
#{size = 1.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
    
```



```
imprint volume all
merge volume all
volume all size {size}
curve 18 20 22 24 interval 10
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2000
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.2
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1.3e-5
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 7.7e-5
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block all element solid order 2
analysis type effectiveprops heatexpansion dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

1. Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592с.

## 2.6. Контрольная задача №2.6

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для слоистого композита, содержащего слой из двух материалов.

### Значения входных данных модуля

Параметры материалов:

Резина:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 2 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.49;
- Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Сталь:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 2e5 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Сплошной куб из резины со стороной 1.3;
- Посередине (перпендикулярно оси Z) куба проходит слой стали толщиной 0.3.

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	10.0
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	10.0
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	1.29032

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Слоистый композит представляет собой несколько склеенных между собой слоёв из разных материалов. В формулах [1] предполагается, что слои лежат в плоскости XY.

$$\lambda_x = \lambda_y = \langle \lambda \rangle,$$

$$\lambda_z = \frac{1}{\langle 1/\lambda \rangle},$$

где символы  $\langle \rangle$  означают осреднение величины по объёму, то есть, фактически, по высоте.

Граничные условия – строго периодические.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	10	10	0.00
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	10	10	0.00
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	1.29032	1.291E+00	0.09

Скрипт для построения модели и запуска на расчет:

```
cubit.cmd("reset")
rub_thick = 1.0
steel_thick = 0.3
rub_number = 1
length = 1.3 # length
width = 1.3 # width
height = rub_number*(rub_thick + steel_thick) # height
def lambda_Calc_E_nu(E, nu): return E * nu / ((1+nu)*(1-2*nu))
def G_Calc_E_nu(E, nu): return E / (2 + 2*nu)
# steel constants
steel_E = 2.0e5
steel_nu = 0.25
steel_cond = 40.0
steel_lambda = lambda_Calc_E_nu(steel_E, steel_nu)
```



```
steel_G = G_Calc_E_nu(steel_E, steel_nu)

# rubber constants
rub_E = 2.0
rub_nu = 0.49
rub_cond = 1.0
rub_lambda = lambda_Calc_E_nu(rub_E,rub_nu)
rub_G = G_Calc_E_nu(rub_E, rub_nu)
mesh_size = 0.1
cubit.cmd("brick x " + str(length) + " y " + str(width) + " z " + str(height))
for i in range(0, rub_number): cubit.cmd( "webcut body all with plane zplane offset " + str(0.5*rub_thick +
i*(rub_thick+steel_thick) - 0.5*height ) + " imprint merge")
for i in range(0, rub_number): cubit.cmd( "webcut body all with plane zplane offset " + str( (i+1)*(rub_thick+steel_thick) -
0.5*height - 0.5*rub_thick) + " imprint merge" )
# rubber block
command1 = "block 2 volume"
for i in range(1, rub_number+2): command1 = command1 + " " + str(i)
cubit.cmd(command1)
# steel block
command2 = "block 1 volume"
for i in range(rub_number+2, 2*rub_number+2): command2 = command2 + " " + str(i)
cubit.cmd(command2)
cubit.cmd("imprint volume all")
cubit.cmd("merge volume all")
# materials
cubit.cmd("create material 1 name 'steel'")
cubit.cmd("create material 2 name 'rubber'")
cubit.cmd("modify material 1 set property 'MODULUS' value " + str(steel_E))
cubit.cmd("modify material 1 set property 'POISSON' value " + str(steel_nu))
cubit.cmd("modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value " + str(steel_cond))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'MODULUS' value " + str(rub_E))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'POISSON' value " + str(rub_nu))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value " + str(rub_cond))
# blocks
cubit.cmd("block 1 material 'steel'")
cubit.cmd("block 2 material 'rubber'")
cubit.cmd("block 1 2 element solid order 2")
# meshing
cubit.cmd("volume all scheme Sweep")
```



```
cubit.cmd("volume all size " + str(mesh_size) )  
cubit.cmd("mesh volume all")  
  
# solution settings  
cubit.cmd("analysis type effectiveprops heattrans dim3")  
cubit.cmd("periodicbc on")  
cubit.cmd("solver method direct use_uzawa auto try_other on")
```

#### Список литературы

[1] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М: Изд-во МГУ, 1984. – 335 с.

## 2.7. Контрольная задача №2.7

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных модуля

Параметры материалов:

- Материал матрицы:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .
- Материал нити:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Квадрат 16 × 16 (матрица);
- В центре круг (нить) радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%).

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Плоские треугольные элементы второго порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.8

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам [1]:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m,$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}},$$

здесь волокна направлены вдоль оси  $X$ ,  $\lambda_f, \lambda_m$  – коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  – объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия – строго периодические.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.28571	0.00%
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.28571	0.00%
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.8	2.8	0.00%

Скрипт для построения модели и запуска на расчет:

```
reset
```

```
#{pitch = 16.0}
```

```
#{thick = 16.0} # thickness
```

```
#{conc = 10} # cord concentration, percents
```

```
#{rad = sqrt(0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
```

```
#{size = 1.0}
```

```
# geometry
```

```
create surface rectangle width {pitch} depth {thick} zplane
```

```
create surface circle radius {rad} zplane
```

```
subtract body 2 from body 1 keep
```



delete body 1

imprint body all

merge body all

# meshing

surface all scheme trimesh

surface all size {size}

mesh surface all

# materials

create material 1

modify material 1 name 'fiber'

modify material 1 set property 'MODULUS' value 1

modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25

modify material 1 set property 'ISO\_CONDUCTIVITY' value 10

create material 2

modify material 2 name 'matrix'

modify material 2 set property 'MODULUS' value 1

modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25

modify material 2 set property 'ISO\_CONDUCTIVITY' value 2

# blocks

block 1 add surface 2

block 2 add surface 3

block 1 material 'fiber'

block 2 material 'matrix'

block 1 2 element plane order 2

# solution options

analysis type effectiveprops heattrans dim2

periodicbc on

## Список литературы

[1] Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.

## 2.8. Контрольная задача №2.8

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача об упругой полосе, которая движется с начальной скоростью и врезается в жесткую стену. Во время взаимодействия полоса контактирует со стеной (скользящий контакт без трения). Во время решения определяется время взаимодействия и отделения, а также соответствующие перемещения и скорости на поверхности контакта и сравниваются с решением, приведенным в [1]. Контрольная задача проверяет корректность:

- поддержку контактного взаимодействия «скользящий без трения»;
- поддержку неконформно стыкованных сеток из спектральных элементов.

### Значения входных данных

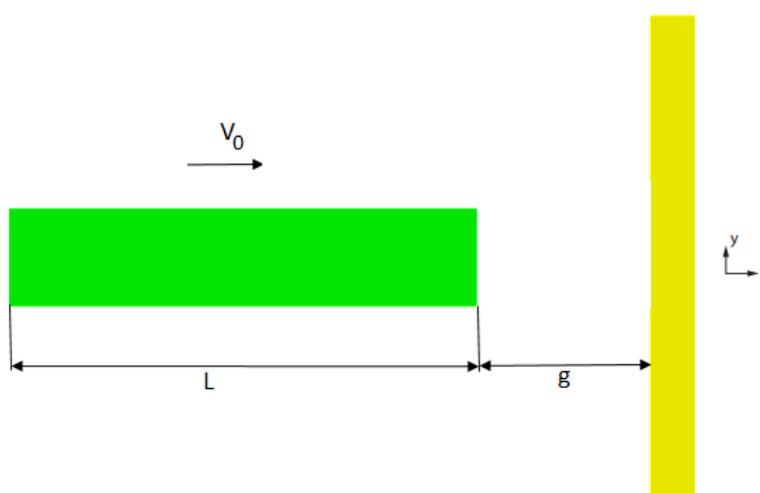


Рис. 2.1.1. Геометрическая модель

#### Геометрическая модель

- Полоса: прямоугольник ( $L=10$  in,  $h=1$  in);
- Стена: прямоугольник ( $L=5$  in,  $h=1$  in);
- Начальный зазор между полосой и стеной 0.01 in.

#### Материал:

- $E_{\text{полосы}}=3e7$  psi,  $\nu_{\text{полосы}}=0.3$ ;

#### Граничные условия:

- Стена закреплена по всем направлениям;
- Полоса закреплена по вертикальному направлению;
- На полосу действует начальная скорость  $V_0=202.2$  in/sec<sup>2</sup>.

#### Сетка:

- 8-узловые конечные элементы.

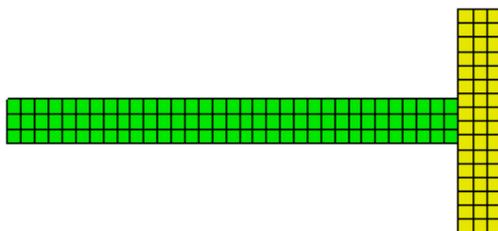


Рис. 2.1.2. Конечно-элементная сетка

Контакт:

- Общий контакт (главная сущность – кривая 6, побочная сущность – кривая 4);
- Трение 0;
- Точность 0.0005;
- Метод Штрафов (жесткость контакта по нормали 1, жесткость контакта по касательной 0.5).

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Полное решение;
- Неявная схема;
- Максимальное время 0.003 с;
- Число шагов 1000.

### 2.8.1. Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Статус контакта в контактном регионе в точке (5,0,0) при $t=0.00005$ с.	contact_status	-	2
2	Компонента вектора перемещений $u_x$ в точке (0,0,0) при $t=0.00005$ с.	Displacement_XX	in	0.01
3	Компонента вектора скорости $v_x$ в точке (0,0,0) при $t=0.00005$ с.	Velocity_XX	In/c	202.2
	Статус контакта в контактном регионе в	contact_status	-	0

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
	точке $(5,0,0)$ при $t=0.00015$ с.			
	Компонента вектора перемещений $u_x$ в точке $(0,0,0)$ при $t=0.00015$ с.	Displacement_XX	in	0.01
	Компонента вектора скорости $v_x$ в точке $(0,0,0)$ при $t=0.00015$ с.	Velocity_XX	In/c	-202.2

Таблица 2.3.1 Задание зависимости от времени для силы

Время	Значение силы, Н
0	0
1	$10^5$
2	0
5	0

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Численное приближенное решение приведено в [1].

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Статус контакта в контактном регионе в точке $(5,0,0)$ при $t=0.00005$ с.	contact_status	-	2	2	0.00
2	Компонента вектора перемещений $u_x$ в точке $(5,0,0)$ при $t=0.00005$ с.	Displacement_X	in	0.01	1.011E-02	1.10
3	Компонента вектора скорости $v_x$ в точке $(5,0,0)$ при $t=0.00005$ с.	Velocity_X	In/c	202.2	2.022E+02	0.00
4	Статус контакта в контактном регионе в точке $(5,0,0)$ при $t=0.00015$ с.	contact_status	-	0	0	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create surface rectangle width 10 height 1 zplane
create surface rectangle width 1 height 5 zplane
move Surface 2 x 5.51 include_merged
surface all size auto factor 5
undo group begin
surface all size auto factor 5
mesh surface all
undo group end
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 3e+07
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 0.73
set duplicate block elements off
block 1 add surface all
block 1 material 1 cs 1 element plane order 2
create displacement on surface 1 dof 2 dof 3 fix
create displacement on surface 2 dof all fix
create initial velocity on surface 1
modify initial velocity 1 dof 1 value 202.2
create contact master curve 6 slave curve 4 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0
ignore_overlap off method penalty normal_stiffness 1.0 tangent_stiffness 0.5
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off
dynamic method full_solution scheme implicit maxtime 0.0003 steps 1000 newmark_gamma 0.005
calculation start path 'C:/fidesys01.pvd'
```

Список литературы:

1. N.J. Carpenter, R.L. Taylor and M.G. Katona, "Lafrange Constraints For Transient Finite Element Surface Contact", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.32, 1991. pg 103-128.

## 2.9. Контрольная задача №2.9

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается плоская статическая задача о замене материала по шагам. Цель задачи - проверить корректность выполнения смены материала по шагам решения. В результатах в Fidesys Viewer проверяются свойства материалов по шагам. Контрольная задача проверяет корректность:

- линейно-упругую математическую модель материала;
- изменение граничных условий между шагами нагружения;
- изменение свойств материала между шагами нагружения.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

В пластине имеется включение. В ходе расчета свойства материала включения изменяются.

- Длина пластины  $a = 10$  м;
- Ширина пластины  $b = 5$  м;
- Круг с радиусом  $R = 1$  м.

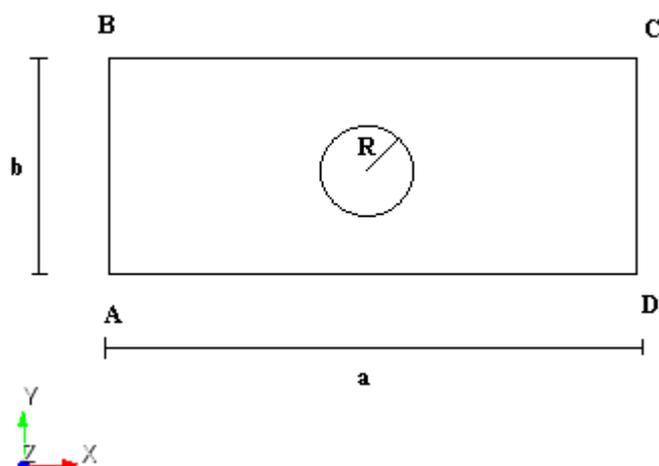


Рисунок 3.1.1 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Сторона АВ закреплена по всем осям и поворотам;
- Стороны AD и BC закреплены по оси Y;
- К стороне CD приложено давление с пошаговой нагрузкой:
  - Шаг 1: - 1000 Па;
  - Шаг 2: - 1000 Па;
  - Шаг 3: 0 Па.

Параметры материала:

- Материал для пластины:
  - Модуль упругости  $E = 2e + 11$  Па;

- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .
- Материалы для включения:
  - Материал 2:  $E = 0.7e + 11$  Па,  $\nu = 0.34$ ;
  - Материал 3:  $E = 1e + 11$  Па,  $\nu = 0.35$ .

Материал для включения вводится таблично:

- Шаг 1: Материал 2;
- Шаг 2: Материал 2;
- Шаг 3: Материал 3.

Параметры сетки:

- Конформная сетка;
- Четырехугольные конечные элементы.

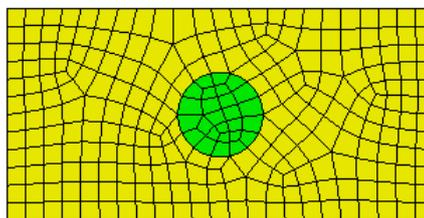


Рисунок 18 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Упругость;
- Число шагов нагружения: 3.

### Значение выходных данных

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Шаг 1	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	$7e10$
2	Шаг 2	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	$7e10$
3	Шаг 3	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	$1e11$

## Результаты расчета

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Шаг 1	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	7e10	7e10	0.00
2	Шаг 2	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	7e10	7e10	0.00
3	Шаг 3	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	1e11	1e11	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create surface rectangle width 10 height 5 zplane
create surface circle radius 1 zplane
subtract surface 2 from surface 1 keep
delete surface 1
merge curve all
compress all
surface all size auto factor 4
mesh surface all
set duplicate block elements off
create material 1 from 'Steel'
create material 2
modify material 2 name ' 2'
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.34
modify material 2 set property 'MODULUS' value 0.7e11
create material 3
modify material 3 name ' 3'
modify material 3 set property 'MODULUS' value 1e+11
modify material 3 set property 'POISSON' value 0.35
block 1 add surface 2
block 2 add surface 1
```



```
block 1 material 1
block 2 material 2
block all element plane order 2
create displacement on curve 3 dof all fix
create displacement on curve 2 4 dof 2 fix
create pressure on curve 5 magnitude 1
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 1 2 value -1000
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 2 2 value -1000
modify table 1 cell 3 1 value 3
bcdep pressure 1 table 1
block 2 step 1 2 material 2
block 2 step 3 material 3
block 1 step all
output nodalforce off midresults on record3d on log on vtu on material on
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 3
calculation start path 'C:/fidesyso1.pvd'
```

## 2.10. Контрольная задача №2.10

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается плоская задача об образовании в предварительно нагруженном, бесконечно протяженном теле (механические свойства материала которого описываются потенциалом Мурнагана) кругового в момент возникновения включения. Механические свойства материала включения описываются потенциалом Мурнагана. Рассматривается вариант модели образования упругого включения, которое (в момент образования) полностью повторяет форму удаленной части тела в том случае, когда по поверхности включения действуют силы, противоположные силам, действующим по вновь образованной границе тела (через замену материала по шагам). Контрольная задача проверяет корректность:

- физически нелинейную математическую модель материала;
- изменение свойств материала между шагами нагружения.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

В пластине имеется включение. В ходе расчета свойства материала включения изменяются.

- Длина пластины 100 м;
- Ширина пластины 100 м;
- Включение: круг с радиусом  $R = 1$  м.

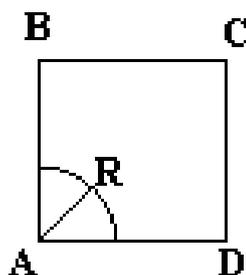


Рисунок 19 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- В виду симметрии рассматривается  $\frac{1}{4}$  часть модели;
- Сторона AB закреплена по оси X;
- Сторона AD закреплена по оси Y;
- К стороне CD приложено давление 0.00315 Па.

Параметры материала:

- Материал матрицы:
  - $\lambda_{\text{матрицы}} = 0.39$ ;
  - $G_{\text{матрицы}} = 0.0186$ ;
  - $C_{\text{змат}} = -0.013$ ;
  - $C_{4\text{мат}} = -0.07$ ;
  - $C_{5\text{мат}} = 0.063$ .

- Материалы для включения:

- $\lambda_{\text{матрицы}} = 1.07;$
- $G_{\text{матрицы}} = 0.477;$
- $C_{\text{элат}} = -0.093;$
- $C_{4\text{мат}} = 1.72;$
- $C_{5\text{мат}} = -5.31.$

Материал для включения вводится таблично:

- Шаг 1: Материал матрицы;
- Шаг 2: Материал включения.

Параметры сетки:

- Конформная сетка.
- Четырехугольные конечные элементы второго порядка.

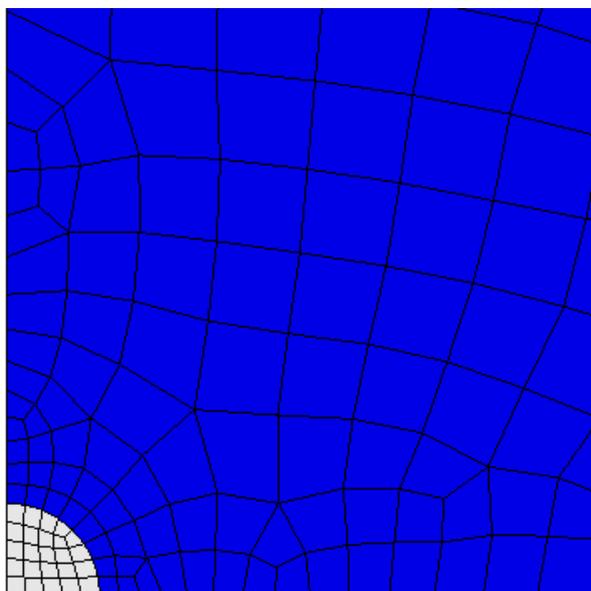


Рисунок 20 – Конечно-элементная сетка модели в месте включения

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Упругость;
- Число шагов нагружения: 2.

#### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Напряжения $\sigma_{xx}$ в точке (0,0,0)	Stress XX	Па	0.00275

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Алгоритм решения представлен в работе [1]. Ниже приведен результат решения для напряжений для включения и матрицы. Для критерия данной контрольной задачи рассматривается линейный случай.

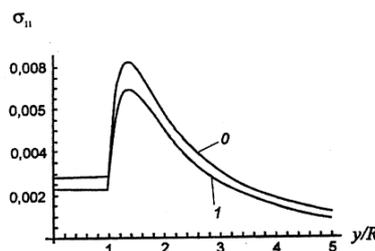


Рис. 21. Распределение напряжений для включения и матрицы: 0 – линейное решение, 1 – нелинейное решение

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Напряжения $\sigma_{xx}$ в точке (0,0,0)	Stress XX	Па	0.00275	2.674E-03	2.77

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
create surface rectangle width 100 zplane
#create surface circle radius 1 zplane
create surface ellipse major radius 0.5 minor radius {0.5-0.005601016} zplane
subtract surface 2 from surface 1 keep_tool
webcut body all with plane xplane offset 0
webcut body all with plane yplane offset 0
delete Body 4 3 7 8
delete Body 1
delete Body 2
merge all
curve 30 32 26 size 0.1
curve 30 32 26 scheme equal
curve 30 32 26 size 0.1
curve 30 32 26 scheme equal
mesh curve 30 32 26
surface 11 size auto factor 5
undo group begin
surface 11 size auto factor 5
mesh surface 11
undo group end
curve 24 7 scheme bias fine size 0.1 factor 1.09 start vertex 22 8
curve 24 7 scheme bias fine size 0.1 factor 1.09 start vertex 22 8
mesh curve 24 7
surface 9 size auto factor 5
undo group begin
surface 9 size auto factor 5
    
```

```
mesh surface 9
undo group end
create material 1
modify material 1 name 'Матрица'
create material 2
modify material 2 name 'Включение'
modify material 1 set property 'MUR_SHEAR' value 0.186
modify material 1 set property 'MUR_LAME' value 0.39
modify material 1 set property 'MUR_C3' value -0.013
modify material 1 set property 'MUR_C4' value -0.07
modify material 1 set property 'MUR_C5' value 0.063
modify material 2 set property 'MUR_LAME' value 1.07
modify material 2 set property 'MUR_SHEAR' value 0.477
modify material 2 set property 'MUR_C3' value -0.93
modify material 2 set property 'MUR_C4' value 1.72
modify material 2 set property 'MUR_C5' value -5.31
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_XZ' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_YZ' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_XY' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_ZZ' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_YY' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_XX' value 0
set duplicate block elements off
block 1 add surface 9
block 1 name 'Матрица'
set duplicate block elements off
block 2 add surface 11
block 2 name 'Включение'
block 1 material 1 cs 1 element plane order 2
block 2 material 1 cs 1 element plane order 2
create displacement on curve 11 dof 2 fix {0.05*0.063}
delete displacement 1
create displacement on curve 30 24 dof 2 fix
create displacement on curve 32 7 dof 1 fix
create pressure on curve 25 magnitude {-0.05*0.063}
static steps 2
block 2 step 2 material 2
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 2
calculation start path 'C:/fidesys01.pvd'
```

#### Список литературы:

1. В. А. Левин, И. А. Мишин, А. В. Вершинин, Плоская задача об образовании включения в упругом нагруженном теле. Конечные деформации, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2006, номер 1, 56–59

## 2.11. Контрольная задача №2.11

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается нагреваемый изнутри туннель (в качестве нагрузки выступает температура на внутренней поверхности).

### Значения входных данных

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 18500$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3333$ ;
- Плотность  $\rho = 1e-8$ ;
- Когезия = 11;
- Угол внутреннего трения = 35;
- Угол дилатансии = 35;
- Коэффициент удельной теплоемкости = 1.23;
- Коэффициент теплоемкости = 1;
- Коэффициент теплопроводности =  $1.72e-5$ .

Граничные условия:

- На внутреннюю поверхность туннеля действует температура  $250^{\circ}\text{C}$ , температура на внешней поверхности туннеля  $0^{\circ}\text{C}$ ;
- Закрепление из условий симметрии.

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

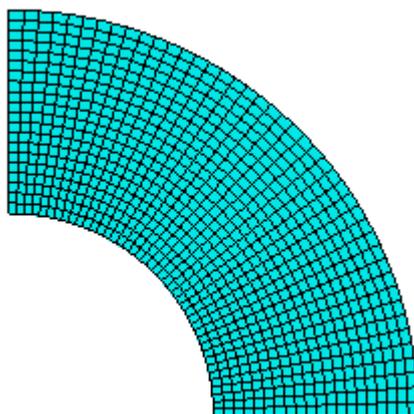


Рис. 22. Конечно-элементная сетка

## Значения выходных данных модуля

Приведены совместно с результатами расчета.

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Для данной задачи рассматривалось численное решение, полученное в пакете ANSYS.

### Результаты расчета

Гексаэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Компонента перемещений $u_x$	(0.5, 0,0)	Displacement $\gamma$	м	0.1558e-2	1.558E-03	0.01
2	Компонента перемещений $u_x$	(0.6, 0,0)	Displacement $\gamma$	м	0.2119e-2	2.120E-03	0.03
3	Компонента перемещений $u_x$	(0.7, 0,0)	Displacement $\gamma$	м	0.2458e-2	2.459E-03	0.03
4	Компонента перемещений $u_x$	(0.8, 0,0)	Displacement $\gamma$	м	0.2668e-2	2.668E-03	0.02
5	Компонента перемещений $u_x$	(0.94, 0,0)	Displacement $\gamma$	м	0.278e-2	2.780E-03	0.01
6	Компонента перемещений $u_x$	(0.1, 0,0)	Displacement $\gamma$	м	0.2765e-2	2.765E-03	0.00
7	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain $_{XX}$	-	-0.225e-3	-2.315E-04	2.72
8	Пластические деформации	(0.9, 0,0)	Plastic_Strain $_{XX}$	-	0.769e-4	7.381E-05	4.02
9	Пластические деформации	(0.78, 0,0)	Plastic_Strain $_{XX}$	-	0.267e-3	2.636E-04	1.29
10	Пластические деформации	(0.7, 0,0)	Plastic_Strain $_{XX}$	-	0.113e-3	1.120E-04	0.84
11	Пластические деформации	(0.67, 0,0)	Plastic_Strain $_{XX}$	-	0	-2.879E-07	0.00

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
12	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_Y	-	0.198e-2	1.978E-03	0.08
13	Пластические деформации	(0.9, 0,0)	Plastic_Strain_Y	-	0.15e-2	1.495E-03	0.31
14	Пластические деформации	(0.8, 0,0)	Plastic_Strain_Y	-	0.878e-3	8.789E-04	0.10
15	Пластические деформации	(0.7, 0,0)	Plastic_Strain_Y	-	0.175e-3	1.767E-04	0.97
16	Пластические деформации	(0.67, 0,0)	Plastic_Strain_Y	-	0	-3.636E-07	0.00
17	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_Z	-	0.1736e-3	1.811E-04	4.29
18	Пластические деформации	(0.9, 0,0)	Plastic_Strain_Z	-	-0.1243e-3	-1.215E-04	2.23
19	Пластические деформации	(0.8, 0,0)	Plastic_Strain_Z	-	-0.23e-3	-2.284E-04	0.71
20	Пластические деформации	(0.7, 0,0)	Plastic_Strain_Z	-	-0.747e-4	-7.482E-05	0.16
21	Пластические деформации	(0.67, 0,0)	Plastic_Strain_Z	-	0	1.796E-07	0.00
22	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.303e-3	-3.038E-04	0.27
23	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.9, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.26e-3	-2.588E-04	0.45
24	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.8, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.898e-4	8.893E-05	0.97
25	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.7, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.308e-3	3.085E-04	0.17
26	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.67, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.119e-2	1.190E-03	0.02

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
27	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.5, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.274e-2	2.733E-03	0.25
28	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	0.787e-3	7.869E-04	0.01
29	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.9, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	0.928e-3	9.288E-0	0.08
30	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.8, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	0.107e-2	1.073E-03	0.28
31	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.7, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	0.112e-2	1.123E-03	0.29
32	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.67, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	0.363e-3	3.634E-04	0.10
33	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.5, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.1184e-2	-1.184E-03	0.01
34	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{zz}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.181e-3	-1.811E-04	0.03
35	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{zz}$	(0.9, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.529e-3	-5.321E-04	0.58
36	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{zz}$	(0.8, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.115e-2	-1.156E-03	0.52

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
37	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{zz}$	(0.7, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.214e-2	-2.138E-03	0.10
38	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{zz}$	(0.67, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.317e-2	-3.169E-03	0.03
39	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{zz}$	(0.5, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.43e-2	-4.300E-03	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create cylinder height 0.1 radius 0.5
create cylinder height 0.1 radius 1
subtract body 1 from body 2
webcut body 2 with plane xplane offset 0
webcut body 2 with plane yplane offset 0
delete body 2
delete body 3
create material 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3333
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1.85e+04
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1e-8
modify material 1 set property 'COHESION' value 11
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 35
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 35
modify material 1 set property 'SPECIFIC_HEAT' value 1.23
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1.72e-05
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 1
set duplicate block elements off
block 1 volume 4
block 1 material 1
block 1 element solid order 2
surface 31 size 0.025
mesh surface 31
curve 11 13 40 42 interval 1
mesh curve 11 13 40 42
mesh volume 4
create temperature on surface 30 value 250
create temperature on surface 28 value 0
create displacement on surface 11 dof 1 fix 0
create displacement on surface 27 dof 2 fix 0
create displacement on surface 29 31 dof 3 fix 0
analysis type static elasticity plasticity heattrans dim3
```

## 2.12. Контрольная задача №2.12

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задачи об устойчивости склона с учетом образования пластических зон по критерию Друкера-Прагера. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- учёт пластических свойств материала при расчете напряженно-деформированного состояния среды
- критерий пластичности Друкера-Прагера с симметричным упрочнением;
- нелинейная модель для расчета механической прочности.

### Значения входных данных

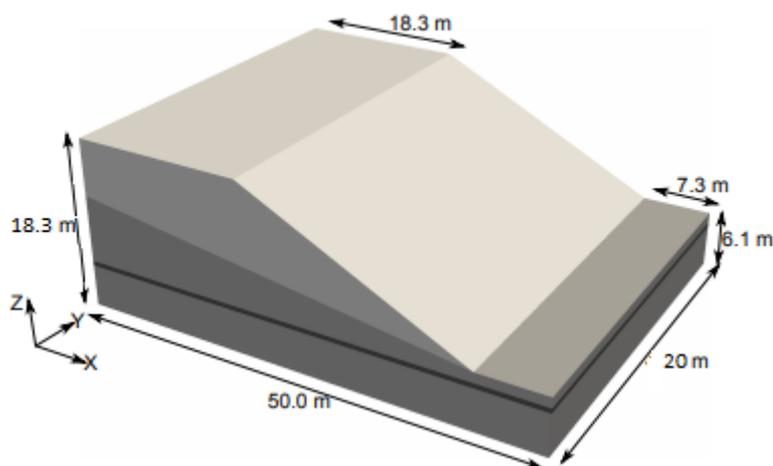


Рис. 23. Геометрическая модель.

Геометрическая модель:

- Характерные размеры указаны на рисунке 23.

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 1e+8$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 1918.37$ ;
- Когезия = 12889;
- Угол внутреннего трения = 9.189;
- Угол дилатансии = 0.

Граничные условия:

- На тело действует гравитация;
- Закрепление из условий симметрии.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

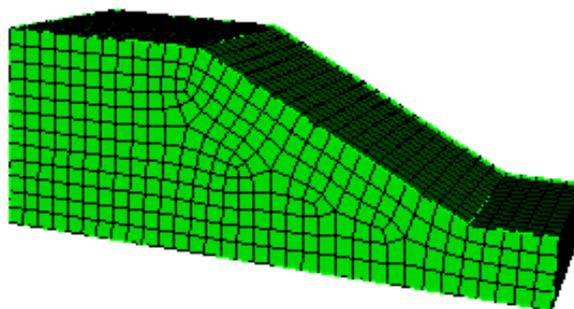


Рис. 24. Конечно-элементная сетка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента $u_z$ в точке (12.595, -20, 17.584)	Displacement Z	м	-0.0366
2	Компонента $u_x$ в точке (27.389, -20, 7.190)	Displacement X	м	0.01199
3	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain YY	-	0.59e-3
4	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain XX	-	0.000888

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Численно приближенное решение представлено в [1] (рисунки 4-5).

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента $u_z$ в точке (12.595, -20, 17.584)	Displacement Z	м	-0.0366	-3.656E-02	0.11
2	Компонента $u_x$ в точке (27.389, -20, 7.190)	Displacement X	м	0.01199	1.194E-02	0.43
3	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain YY	-	0.59e-3	5.906E-04	0.10
4	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain XX	-	0.000888	8.871E-04	0.10

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:



```
reset
set node constraint on
set default element hex
create vertex 0 0 0
create vertex 50 0 0
create vertex 50 0 6.1
create vertex 42.7 0 6.1
create vertex 18.3 0 18.3
create vertex 0 0 18.3
create surface vertex 1 2 3 4 5 6
sweep surface 1 perpendicular distance 20
create material 1
modify material 1 name "dry"
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1e+8
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1918.367
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 0
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 9.189
modify material 1 set property 'COHESION' value 12889
set duplicate block elements off
block 1 volume 1
block 1 material "dry"
block 1 element solid order 2
curve all size 1.5
mesh curve all
mesh volume 1
create displacement on surface 7 8 dof 1 dof 2 dof 3 fix 0
create displacement on surface 1 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 6 dof 1 fix 0
create gravity on volume 1
modify gravity 1 dof 3 value -9.8
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 30 tolerance 5e-2
calculation start path "kp.pvd"
```

#### Список литературы:

1. Hom Nath Gharti<sup>1</sup>, Dimitri Komatitsch, Volker Oye<sup>1</sup>, Roland Martin and Jeroen Tromp Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING. Int. J. Numer. Meth. Engng 2011.

## 2.13. Контрольная задача №2.13

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача Герца для двумерного случая [1] для трех разных значений приложенной силы (25 Н, 50 Н, 100 Н). Половина цилиндра расположена выпуклой частью на жестком основании, на срезанную часть цилиндра приложена нагрузка. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- задания параметров скользящего контакта без трения в интерфейсе;
- статического решения с учетом скользящего контакта без трения;
- корректности вывода полей Статус контакта, Напряжений в контакте.

### Значения входных данных модуля

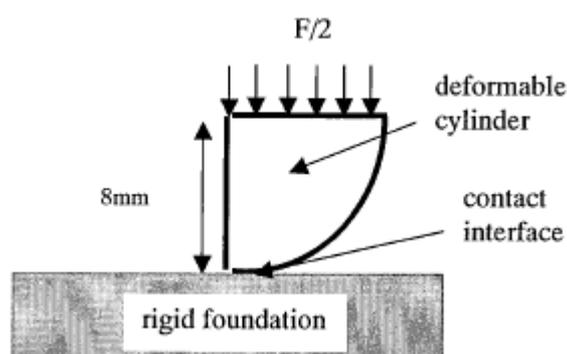


Рис. 25. Геометрическая модель задачи

Материал:

- $E_{\text{цилиндра}}=500 \text{ МПа}$ ,  $\nu_{\text{цилиндра}}=0.3$ .

Граничные условия:

- Основание закреплено по всем направлениям;
- Цилиндр закреплен по горизонтальному направлению из условия симметрии;
- Три случая нагрузки: сила  $F=25, 50, 100 \text{ Н}$ .

Контакт:

- Неконформная сетка;
- Трение  $\mu=0$ ;
- Тип: Скользящий без трения.

Модель:

- 8-узловые конечные элементы.

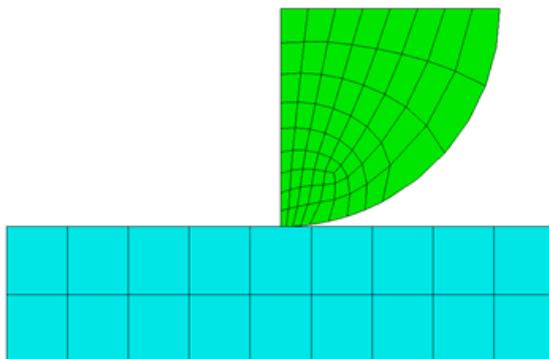


Рис. 26. Конечно-элементная сетка

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- 3D;
- Упругость.

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Статус контакта в контактном регионе в точке (0,0,0)	contact_status	-	2
2	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=25 Н	contact_stress	МПа	24
3	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=50 Н	contact_stress	Мпа	35
4	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=100 Н	contact_stress	МПа	47.5

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Задача имеет численное приближенное решение, опубликованное в [1] и представленное на рисунке 27.

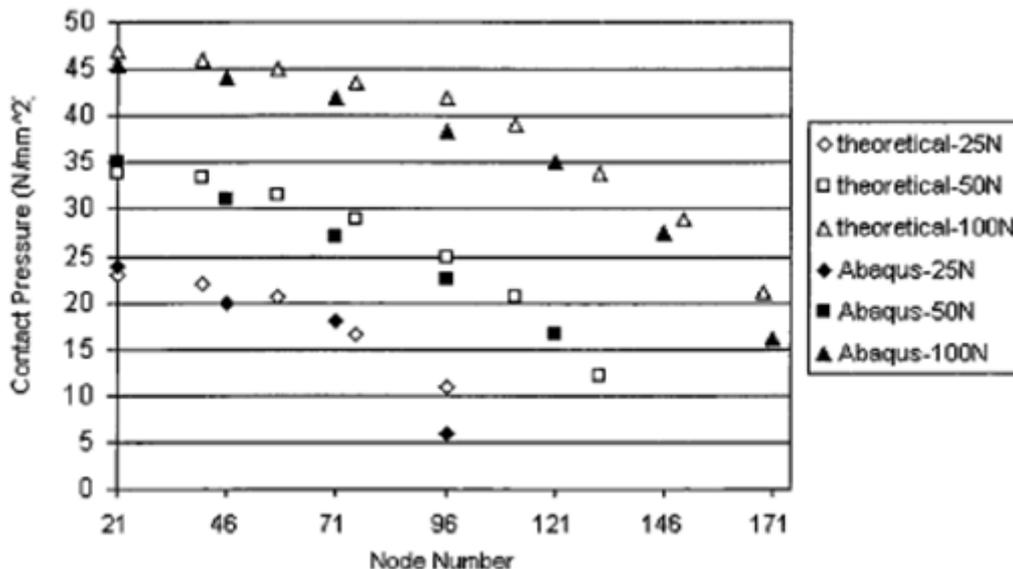


Рис.27. Результаты численного решения задачи

## Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Статус контакта в контактном регионе в точке (0,0,0)	contact_status	-	2	2	0.00
2	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=25 Н	contact_stress	МПа	25	2.590E+01	3.60
3	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=50 Н	contact_stress	Мпа	35	3.644E+01	4.10
4	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=100 Н	contact_stress	МПа	47	4.863E+01	3.47

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

F=25



```
reset
set default element hex
create surface circle radius 8 zplane
webcut body 1 with plane xplane
webcut body 1 with plane yplane
delete Body 3
delete Body 2
move Surface 4 y 8 include_merged
create surface rectangle width 20 height 5 zplane
move Surface 6 y -2.499 include_merged
partition create curve 8 position 3.716651 0.915756 0
partition create curve 8 position 1.061858 0.070785 0
curve 8 scheme bias fine size 0.1 factor 1.1 start vertex 3
curve 17 interval 8
curve 17 scheme equal
curve 16 interval 9
curve 16 scheme equal
curve 6 interval 8
curve 6 scheme equal
curve 7 interval 9
curve 7 scheme bias factor 1.1 start vertex 3
surface 4 size auto factor 7
mesh surface 4
surface 6 size auto factor 7
mesh surface 6
create material 1
modify material 1 name 'mat_foun'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 500
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
block 1 add surface 6
block 2 add surface 4
block all element plane order 2
```



```
block 1 material 'mat_foun'  
block 2 material 'mat_cyl'  
create displacement on surface 6 dof all fix  
create displacement on curve 7 dof 1 fix  
#25/2/17=0.705882353  
create force on curve 6 force value 0.705882353 direction ny  
create contact master curve 12 slave curve 8 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0  
ignore_overlap off method mpc  
analysis type static findefs elasticity dim2 planestrain  
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5  
output nodalforce on energy off midresults on record3d on log on vtu on material off  
  
F=50  
reset  
set default element hex  
create surface circle radius 8 zplane  
webcut body 1 with plane xplane  
webcut body 1 with plane yplane  
delete Body 3  
delete Body 2  
move Surface 4 y 8 include_merged  
create surface rectangle width 20 height 5 zplane  
move Surface 6 y -2.499 include_merged  
partition create curve 8 position 3.716651 0.915756 0  
partition create curve 8 position 1.061858 0.070785 0  
curve 8 scheme bias fine size 0.1 factor 1.1 start vertex 3  
curve 17 interval 8  
curve 17 scheme equal  
curve 16 interval 9  
curve 16 scheme equal  
curve 6 interval 8  
curve 6 scheme equal  
curve 7 interval 9  
curve 7 scheme bias factor 1.1 start vertex 3  
surface 4 size auto factor 7  
mesh surface 4  
surface 6 size auto factor 7  
mesh surface 6
```



```
create material 1
modify material 1 name 'mat_foun'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 500
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
block 1 add surface 6
block 2 add surface 4
block all element plane order 2
block 1 material 'mat_foun'
block 2 material 'mat_cyl'
create displacement on surface 6 dof all fix
create displacement on curve 7 dof 1 fix
#50/2/17=1.470589
create force on curve 6 force value 1.470589 direction ny
create contact master curve 12 slave curve 8 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0
ignore_overlap off method mpc
analysis type static findefs elasticity dim2 planestrain
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5
output nodalforce on energy off midresults on record3d on log on vtu on material off

F=100
reset
set default element hex
create surface circle radius 8 zplane
webcut body 1 with plane xplane
webcut body 1 with plane yplane
delete Body 3
delete Body 2
move Surface 4 y 8 include_merged
create surface rectangle width 20 height 5 zplane
move Surface 6 y -2.499 include_merged
partition create curve 8 position 3.716651 0.915756 0
partition create curve 8 position 1.061858 0.070785 0
curve 8 scheme bias fine size 0.1 factor 1.1 start vertex 3
curve 17 interval 8
```



```
curve 17 scheme equal
curve 16 interval 9
curve 16 scheme equal
curve 6 interval 8
curve 6 scheme equal
curve 7 interval 9
curve 7 scheme bias factor 1.1 start vertex 3
surface 4 size auto factor 7
mesh surface 4
surface 6 size auto factor 7
mesh surface 6
create material 1
modify material 1 name 'mat_foun'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 500
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
block 1 add surface 6
block 2 add surface 4
block all element plane order 2
block 1 material 'mat_foun'
block 2 material 'mat_cyl'
create displacement on surface 6 dof all fix
create displacement on curve 7 dof 1 fix
#100/2/17=2.9411765
create force on curve 6 force value 2.9411765 direction ny
create contact master curve 12 slave curve 8 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0
ignore_overlap off method mpc
analysis type static findefs elasticity dim2 planestrain
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5
output nodalforce on energy off midresults on record3d on log on vtu on material off
```

#### Список литературы:

1. NAFEMS Ro081 - Benchmark Tests for Finite Element Modelling of Contact, Gapping and Sliding (задача CGS3).

## 2.14. Контрольная задача №2.14

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о нахождении собственных частот балки, которая разделена на три части, между которыми действует условие общего контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности результата расчета модального анализа с учетом общего контакта.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Длина  $DD' = 10$  м;
- Ширина  $AB = 2$  м;
- Высота  $AD = 2$  м.

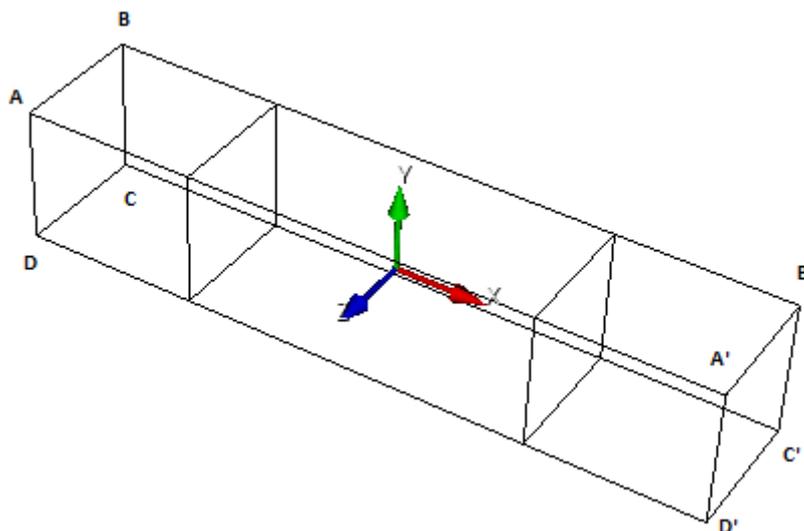


Рис. 28. Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- Грань BC закреплена по  $u_x = u_z = 0$ ;
- Грань B'C' закреплена по  $u_z = 0$ ;
- Узлы поверхности DCD'C' закреплены по  $u_y = 0$ .

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 2e11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 8000$  кг/м<sup>3</sup>.

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры 2 порядка.

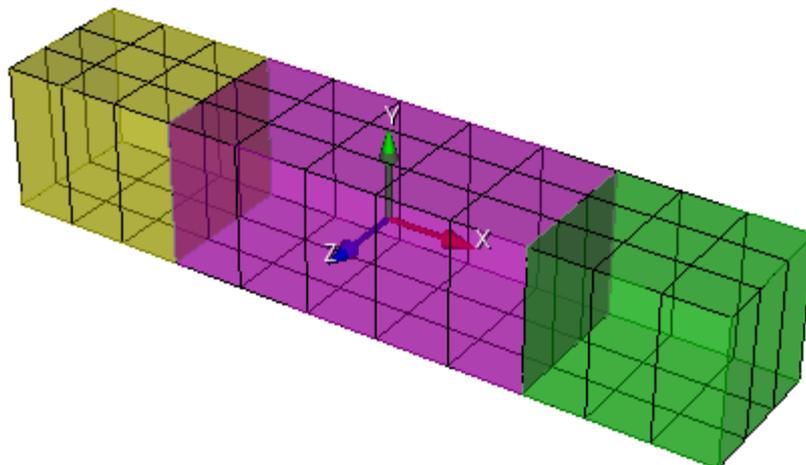


Рис. 29. Конечно-элементной сетка

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: трс.

Настройки расчета:

- Модальный анализ;
- Поиск первой минимальной частоты.

### ***Значения выходных данных модуля***

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Значение
1	Собственная частота	Eigen Values 1, Гц	38.254

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

В качестве эталонного выступает решение из NAFEMS [1].

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Собственная частота	Eigen Values 1	Гц	38.254	3.677E+01	3.87

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 10 y 2 z 2
webcut volume 1 with plane xplane offset -2.5
webcut volume 1 with plane xplane offset 2.5
curve 28 41 36 26 43 35 25 44 33 28 27 42 34 size 1
curve 28 41 36 26 43 35 25 44 33 28 27 42 34 scheme equal
curve 3 15 37 7 13 39 1 5 23 21 29 31 size 2
curve 3 15 37 7 13 39 1 5 23 21 29 31 scheme equal
curve 11 16 40 12 9 14 38 10 22 24 32 30 size 0.67
curve 11 16 40 12 9 14 38 10 22 24 32 30 scheme equal
volume all scheme Auto
mesh volume all
create material 1
modify material 1 set property 'DENSITY' value 8000
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 1
create displacement on curve 7 dof 1 dof 3 fix 0
create displacement on curve 5 dof 3 fix 0
create displacement on node 56 59 60 53 55 63 64 57 58 62 61 54 33 80 79 38 74 92 91 84 83 89 90 75 76 88 87 82 81 85
86 77 2 7 8 6 14 30 29 25 26 31 32 13 12 28 27 24 dof 2 fix 0
block 1 element solid order 2
create contact master surface 17 slave surface 22 tolerance 0.0005 type general method auto
create contact master surface 7 slave surface 12 tolerance 0.0005 type general method auto
analysis type eigenfrequencies dim3
eigenvalue find 10 smallest
```

### Список литературы

[1] NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, Test 51.

## 2.15. Контрольная задача №2.15

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача об устойчивости сжатого стержня с добавлением условия жесткого контакта. Контрольная задача проверяет корректность расчета для анализа потери устойчивости модели с учетом контактного взаимодействия «жесткий контакт».

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Высота  $h = 1$  м;
- Радиус  $R = 0.156$  м;
- Толщина  $t = 0.006$  м.

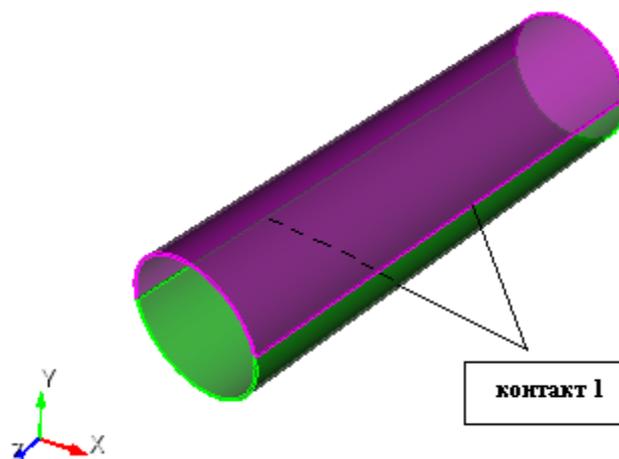


Рисунок 30 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Нижняя окружность закреплена по всем направлениям;
- На верхнюю окружность приложено давление  $p = 1$  МПа;
- Контактная пара - выбор главной и побочной сущности, Связанный, метод Автовыбор.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Параметры сетки:

- Гексаэдральная сетка.

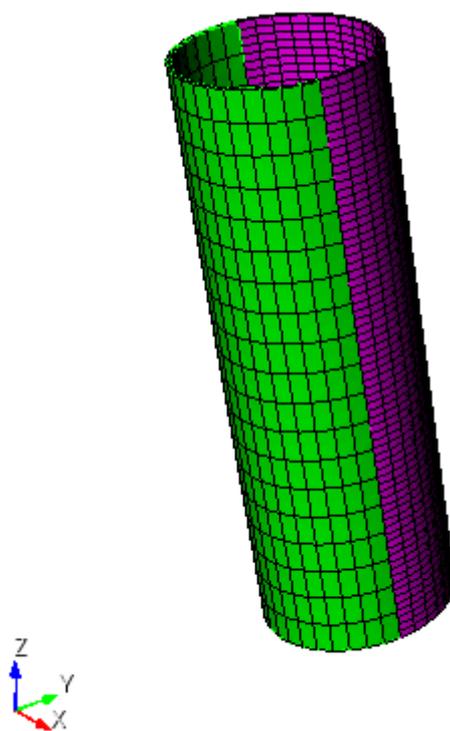


Рисунок 31 – Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Потеря устойчивости;
- 3D;
- Число форм потери устойчивости: 1.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Первый коэффициент критической нагрузки	load multipliers(1)	-	44527

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

В качестве эталонного выступает решение ANSYS.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Критическая сила	Critical Values 1	-	44527	4.458E+04	0.12

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 2.54 y 0.0508 z 0.0508
webcut volume 1 with plane yplane
webcut volume all with plane zplane
surface 19 26 33 31 scheme map
mesh surface 19 26 33 31
curve 2 4 6 8 interval 50
curve 2 4 6 8 scheme equal
mesh curve 2 4 6 8
volume all size auto factor 4
mesh volume all
create material 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 1
block 1 element solid order 2
create displacement on surface 23 35 29 21 dof all fix 0
create pressure on surface 19 26 33 31 magnitude 388
create contact autoselect tolerance 0.0005 type general method auto
analysis type stability elasticity dim3
eigenvalue find 1 smallest
```

### 3. Задачи для облачной версии

#### 3.1. Контрольная задача №3.1

Рассматривается задача о статическом температурном нагружении полой сферы. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

#### Значения входных данных модуля

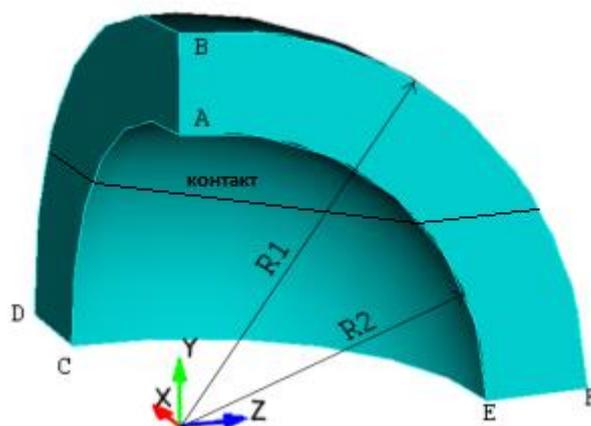


Рис.3.1. Геометрическая модель для полой сферы

Геометрическая модель:

- Радиус  $R_1 = 4$  м;
- Радиус  $R_2 = 3$  м;
- В силу симметрии задачи рассматривается 1/8 сферы.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на плоскости ABEF;
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на плоскости EFCD;
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на плоскости ABCD;
- Сплошная температура на внутренней поверхности сферы ACE;
- Температура  $T = 30^\circ\text{C}$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;

- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Температурное расширение  $\mu = 0.0001 \text{ 1/}^\circ\text{C}$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Жесткий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- Упругость, теплопроводность..

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (4, 0, 0)	Displacement X	м	0.012

### **Описание алгоритма аналитического решения**

Значения вычислены по формуле [1]:

$$u_R = \mu TR_1.$$

### **Результаты в Prove.Design**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (4, 0, 0)	Displacement X	м	0.012	0.012	0.00%

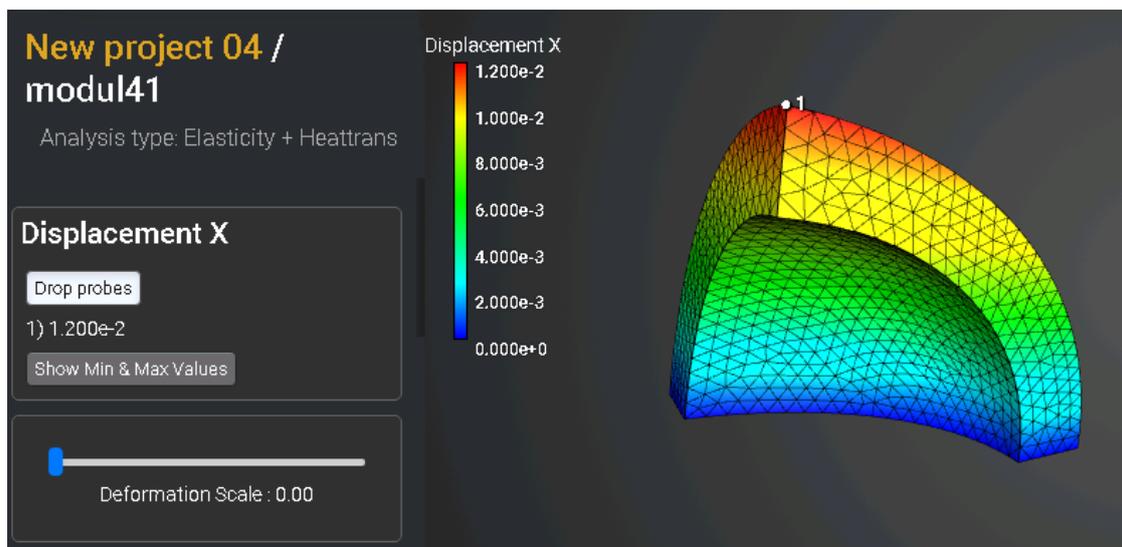


Рис. 3.2. Результат перемещений X

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create sphere radius 4
create sphere radius 3
subtract body 2 from body 1
webcut body 1 with plane yplane offset 0
webcut body 1 with plane zplane offset 0
webcut body 3 with plane zplane offset 0
webcut body 3 with plane xplane offset 0
delete Body 1
delete Body 6
delete Body 5
delete Body 4
webcut volume 4 with plane yplane offset 2
volume all scheme TetMesh
volume all size .3
mesh volume 4all
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 element solid order 2
create material 1
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1e-4
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value .3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e11
block 1 material 1
create displacement on surface 27 dof 2 dof 5 fix 0
create displacement on surface 37 44 dof 3 fix 0
create displacement on surface 39 43 dof 1 fix 0
create temperature on surface 40 42 value 30
create temperature on surface 38 45 value 30
create contact autoselect tolerance 0.0005 type tied method auto
analysis type static elasticity heattrans dim3
```

#### Список литературы

[1] Боли Б., Дж.Уэйнер. Теория температурных напряжений. М., Наука, 1974 г. –259 стр.

## 3.2. Контрольная задача №3.2

### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается задача о статическом температурном нагружении сплошной сферы. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

### *Значения входных данных модуля*

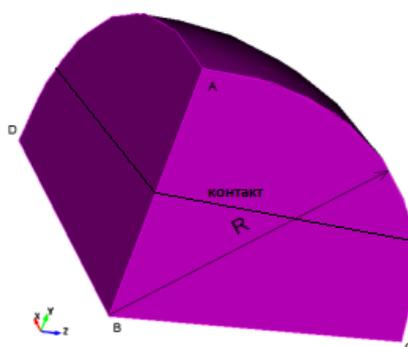


Рис.3.2.1. Геометрическая модель для сплошной сферы

Геометрическая модель:

- Радиус  $R = 4$  м;
- В силу симметрии задачи рассматривается 1/8 сферы.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси X на плоскости ABC;
- Нулевые перемещения вдоль оси Y на плоскости DBC;
- Нулевые перемещения вдоль оси Z на плоскости ABD;
- Сплошная температура на внутренней поверхности сферы ACD;
- Температура  $T = 30^\circ\text{C}$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;

- Температурное расширение  $\mu = 0.0001 \text{ 1/}^\circ\text{C}$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Жесткий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- Упругость, теплопроводность.

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (0, 4, 0)	Displacement X	м	0.012

### **Описание алгоритма аналитического решения**

Значения вычислены по формуле [1]:

$$u_R = \mu T R_1.$$

### **Результаты в Prove.Design**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (0, 4, 0)	Displacement X	м	0.012	0.012	0.00%

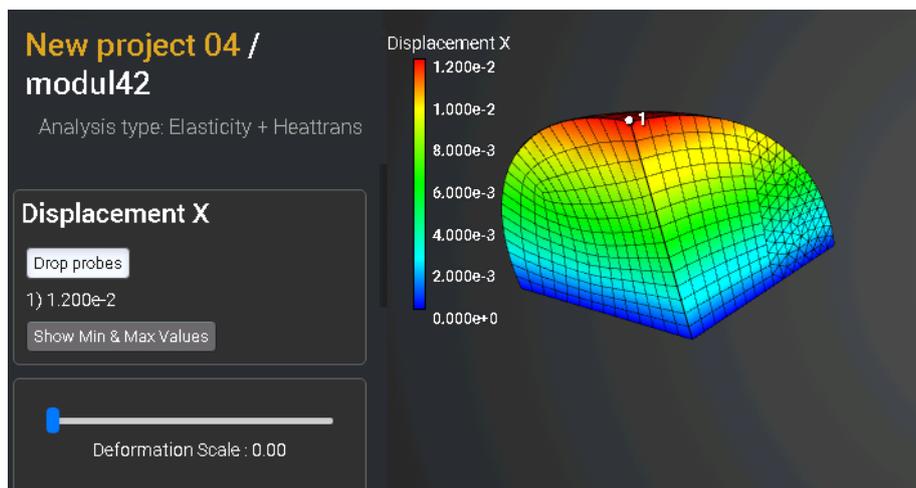


Рис. 3.2.2. Результат перемещений X

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create sphere radius 4
create sphere radius 3
subtract body 2 from body 1
webcut body 1 with plane yplane offset 0
webcut body 1 with plane zplane offset 0
webcut body 3 with plane zplane offset 0
webcut body 3 with plane xplane offset 0
delete Body 1
delete Body 6
delete Body 5
delete Body 4
webcut volume 4 with plane yplane offset 2
volume all scheme TetMesh
volume all size .3
mesh volume 4all
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 element solid order 2
create material 1
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1e-4
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value .3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e11
block 1 material 1
create displacement on surface 27 dof 2 dof 5 fix 0
create displacement on surface 37 44 dof 3 fix 0
create displacement on surface 39 43 dof 1 fix 0
create temperature on surface 40 42 value 30
create temperature on surface 38 45 value 30
create contact autoselect tolerance 0.0005 type tied method auto
analysis type static elasticity heattrans dim3
```

#### Список литературы

[1] Боли Б., Дж.Уэйнер. Теория температурных напряжений. М., Наука, 1974 г. –259 с.

### 3.3. Контрольная задача №3.3

#### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача трёхмерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием постоянных температур. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

#### Значения входных данных модуля

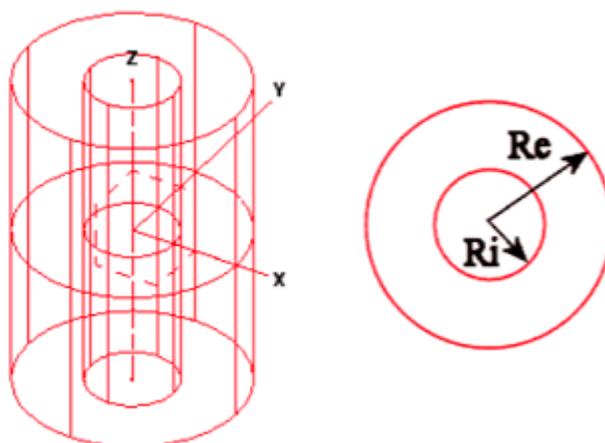


Рис. 3.3.1. Геометрическая модель полого цилиндра

Геометрическая модель:

- Радиус  $R_i = 0.30$  м;
- Радиус  $R_e = 0.35$  м.

Граничные условия:

- Внутренняя температура  $T_i = 100$  °С;
- Внешняя температура  $T_e = 20$  °С;
- Торцы цилиндра закреплены по Z.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности  $V = 1$  Вт/(м · °С).

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 1 порядка.

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- Теплопроводность.

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Температура точке (0.3,0,0)	Temperature	°C	100.0
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1730
3	Температура точке (0.31,0,0)	Temperature	°C	82.98
4	Тепловой поток в точке (0.31,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1674
5	Температура точке (0.32,0,0)	Temperature	°C	66.51
6	Тепловой поток в точке (0.32,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1622
7	Температура точке (0.33,0,0)	Temperature	°C	50.54
8	Тепловой поток в точке (0.33,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 573
9	Температура точке (0.34,0,0)	Temperature	°C	35.04
10	Тепловой поток в точке (0.34,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 526
11	Температура точке (0.35,0,0)	Temperature	°C	20.00
12	Тепловой поток в точке (0.35,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 483

В качестве эталонного выступает решение из Nastran Verification Manual [1].

## Результаты в Prove.Design

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Температура точке (0.3,0,0)	Temperature	°C	100.0	100	0.00%
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1730	1717.36	0.74%
3	Температура точка (0.31,0,0)	Temperature	°C	82.98	82.92	0.07%
4	Тепловой поток в точке (0.31,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1674	1676	-0.12%
5	Температура точка (0.32,0,0)	Temperature	°C	66.51	66.51	0.00%
6	Тепловой поток в точке (0.32,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1622	1622	0.00%
7	Температура точка (0.33,0,0)	Temperature	°C	50.54	50.44	0.2%
8	Тепловой поток в точке (0.33,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 573	1574	-0.10%
9	Температура точка (0.34,0,0)	Temperature	°C	35.04	35.06	-0.06%
10	Тепловой поток в точке (0.34,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 526	1523.94	0.13%
11	Температура точка (0.35,0,0)	Temperature	°C	20.00	20	0.00%
12	Тепловой поток в точке (0.35,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 483	1492.7	-0.65%

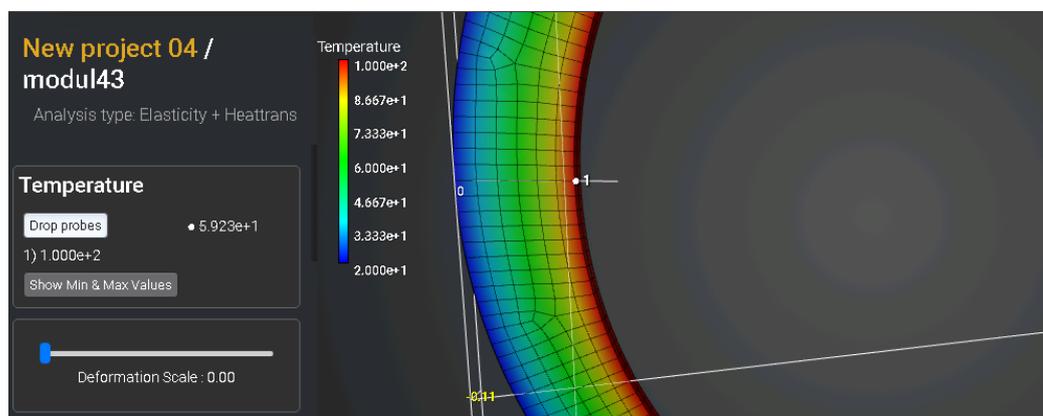


Рис. 3.3.2. Результат температуры в точке (0.3,0,0)

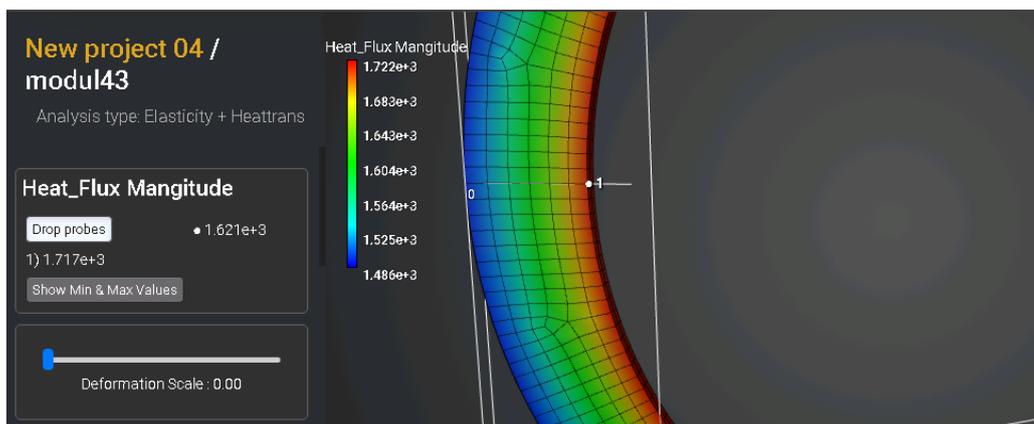


Рис. 3.3.3. Результат теплового потока в точке (0.3,0,0)

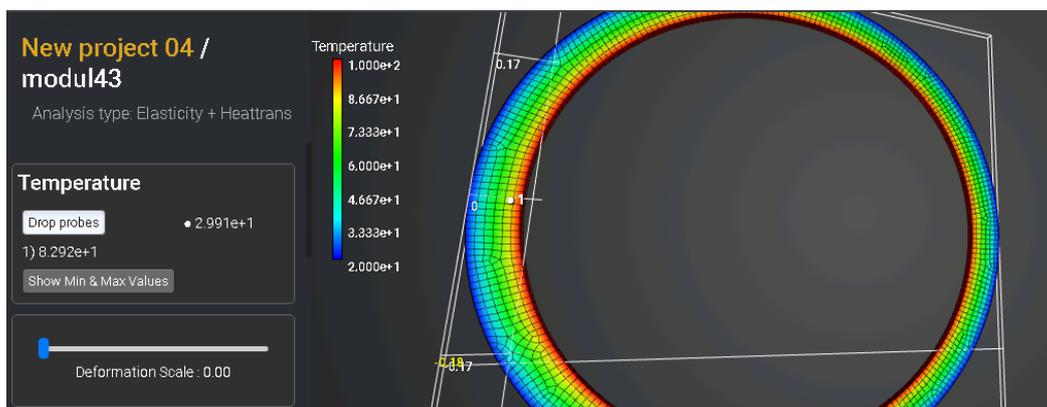


Рис. 3.3.4. Результат температуры в точке (0.31,0,0)

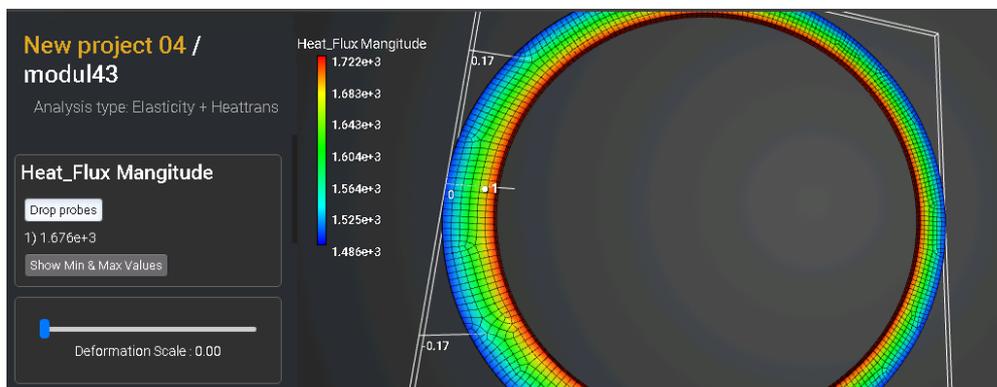


Рис. 3.3.5. Результат теплового потока в точке (0.31,0,0)

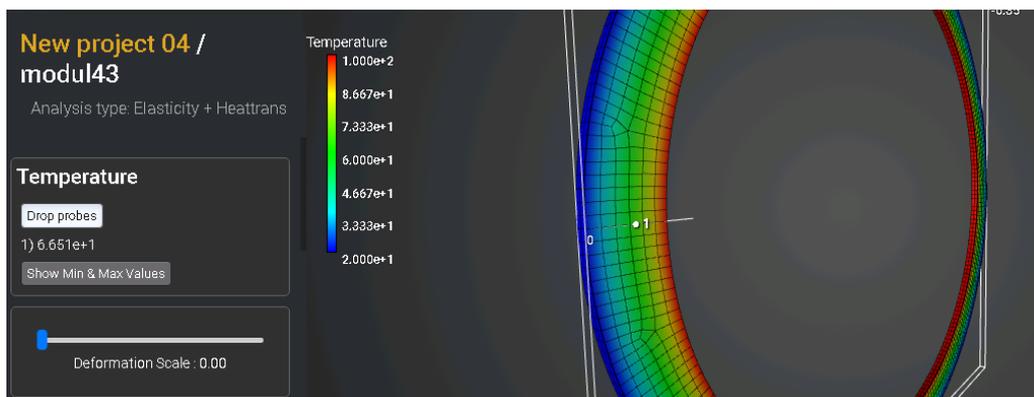


Рис. 3.3.6. Результат температуры в точке (0.32,0,0)

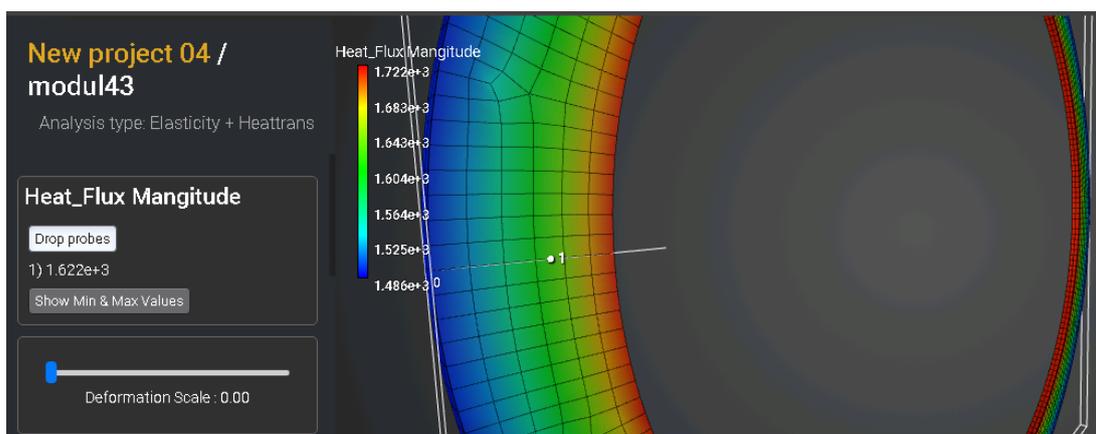


Рис. 3.3.7. Результат теплового потока в точке (0.32,0,0)

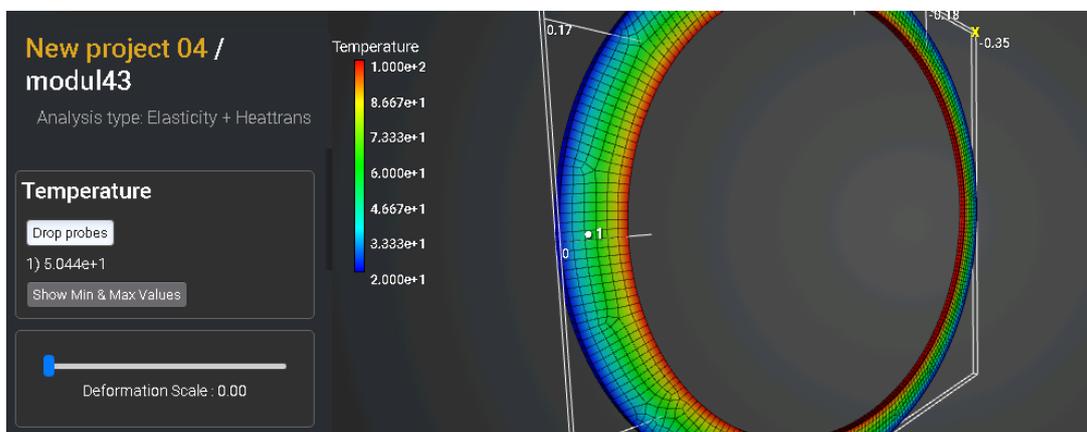


Рис. 3.3.8. Результат температуры в точке (0.33,0,0)

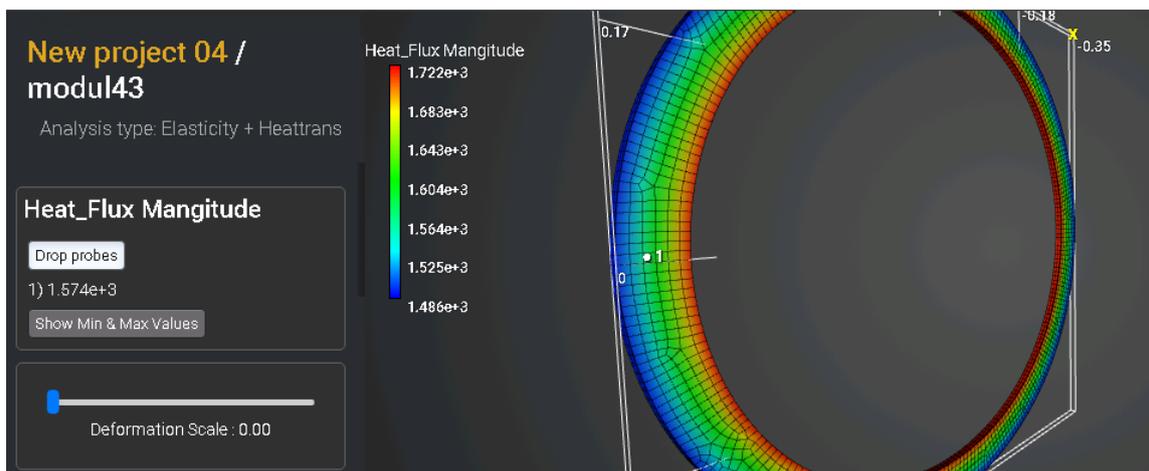


Рис. 3.3.9 Результат теплового потока в точке (0.33,0,0)

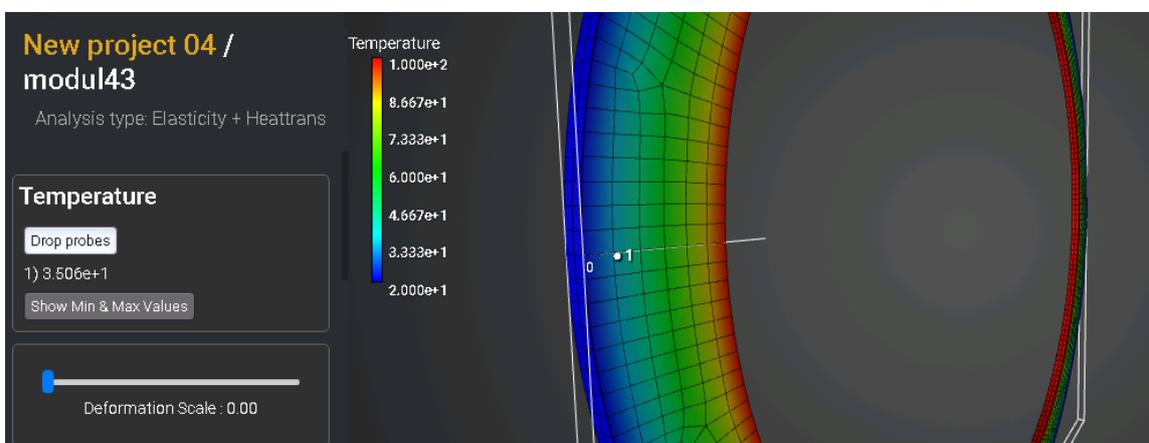


Рис. 3.3.9. Результат температуры в точке (0.34,0,0)

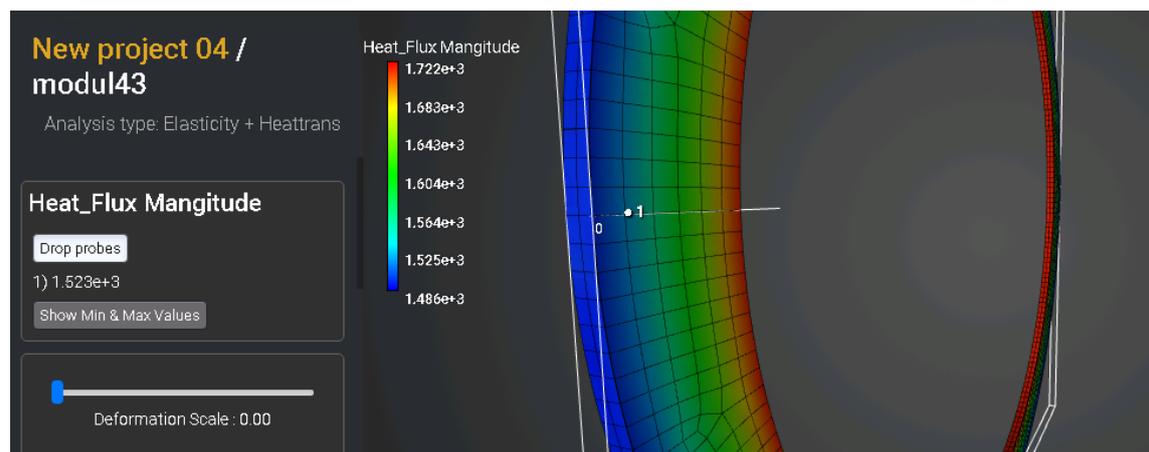


Рис. 3.3.10. Результат теплового потока в точке (0.34,0,0)

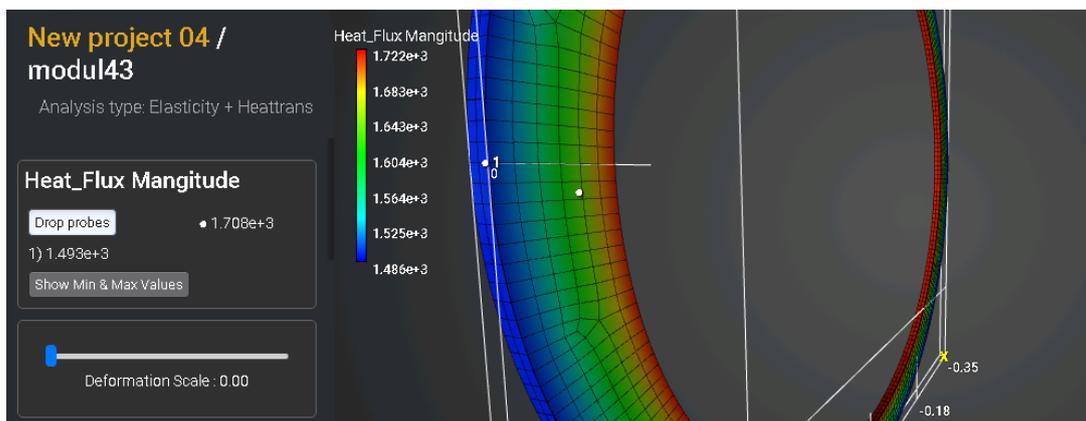


Рис. 3.3.11. Результат теплового потока в точке (0.35,0,0)

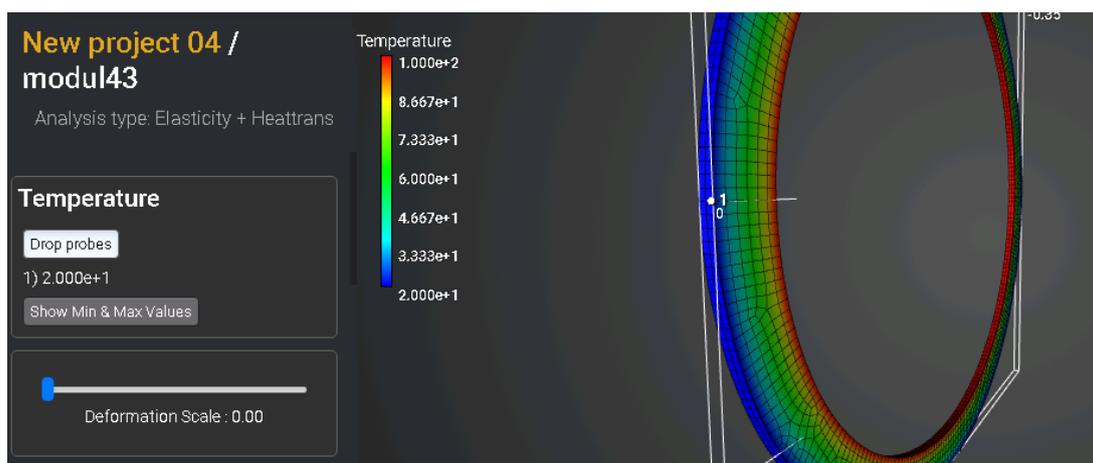


Рис. 3.3.12 Результат температура в точке (0.35,0,0)

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
create Cylinder height 0.01 radius 0.3
create Cylinder height 0.01 radius 0.35
subtract body 1 from body 2 imprint
webcut volume 2 with plane zplane offset 0
curve 4 6 g interval 400
curve 4 6 g scheme equal
volume all scheme TetMesh
mesh volume all
create material 1
modify material 1 name 'Material 1'
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 1
block 1 volume all
block 1 material 'Material 1'
block 1 element solid order 1
create temperature on surface 14 11 value 100
create temperature on surface 15 12 value 20
create displacement on surface 8 9 dof 3 fix 0
create contact autoselect tolerance 0.0005 type tied method auto
analysis type static heattrans dim3
    
```

#### Список литературы

[1] Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA01/89

### 3.4. Контрольная задача №3.4

#### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача трёхмерная задача о полом цилиндре, находящемся под воздействием постоянных температур. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

#### Значения входных данных модуля

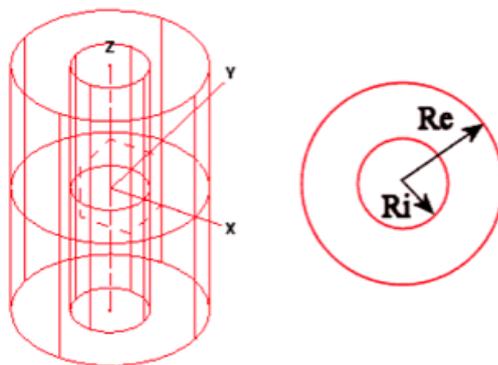


Рис. 3.4.1. Геометрическая модель полого цилиндра

Геометрическая модель:

- Радиус  $R_i = 0.30$  м;
- Радиус  $R_e = 0.391$  м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности  $h_i = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{°C}}$ ;
- Внутренняя температура  $T_i = 500$  °C;
- Конвекция на внешней поверхности  $h_e = 142 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{°C}}$ ;
- Внешняя температура  $T_e = 20$  °C;
- Торцы цилиндра закреплены по Z.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности  $V = 40$  Вт/(м · °C).

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- Теплопроводность.

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Температура точке (0.3,0,0)	Temperature	°C	272.3
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	3.416e4
3	Температура точке (0.391,0,0)	Temperature	°C	205.1
4	Тепловой поток в точке (0.391,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	2.628e4

### **Результаты в Prove.Design**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Температура точка (0.3,0,0)	Temperature	°C	272.3	272.3	0,00%
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	3.416e4	3.382 e4	0,1%
3	Температура точка (0.391,0,0)	Temperature	°C	205.1	205.1	0,00%
4	Тепловой поток в точке (0.391,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	2.628e4	2.642e4	-0,53%

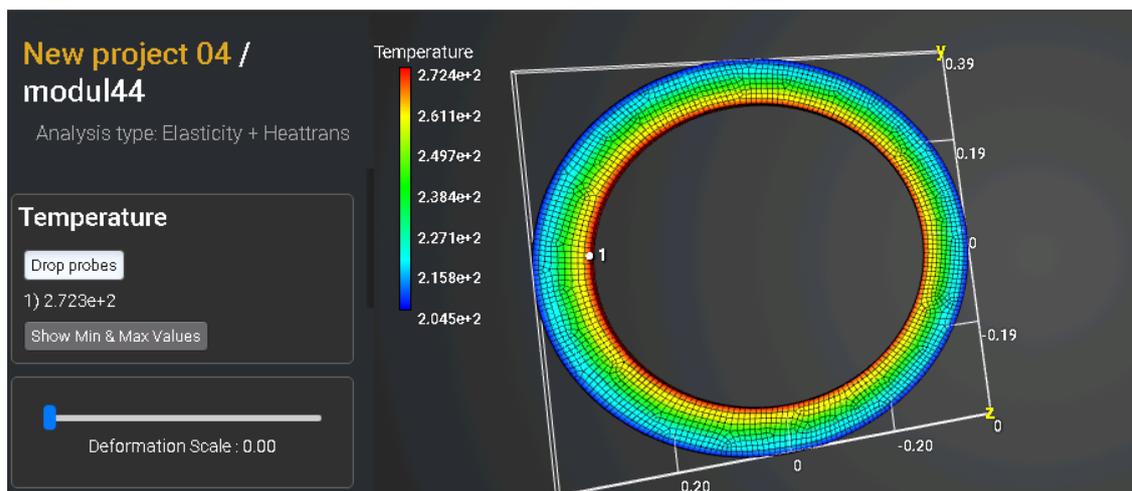


Рис. 3.4.2. Результат температуры в точке (0,3,0,0)

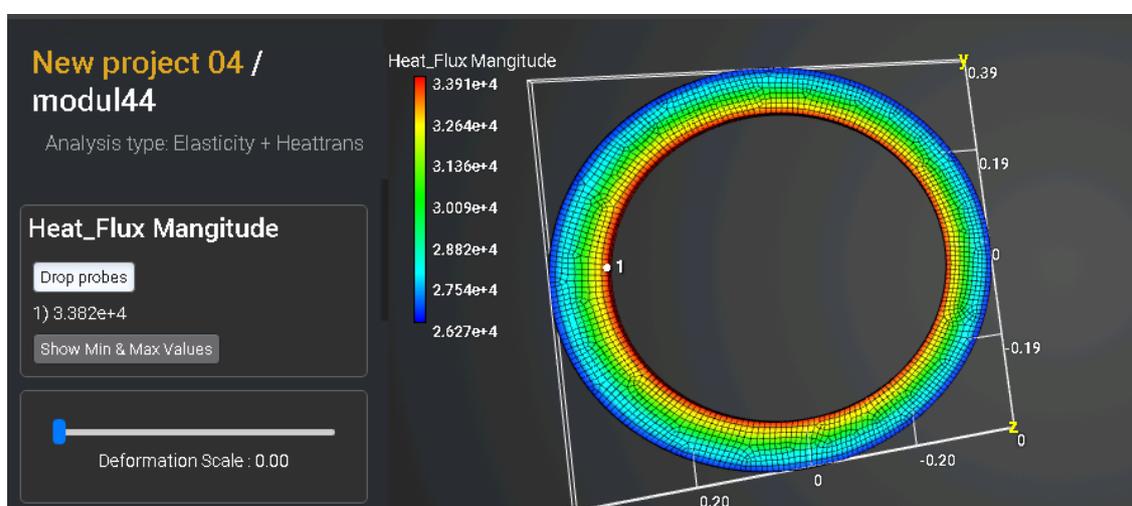


Рис. 3.4.3. Результат теплового потока в точке (0,3,0,0)

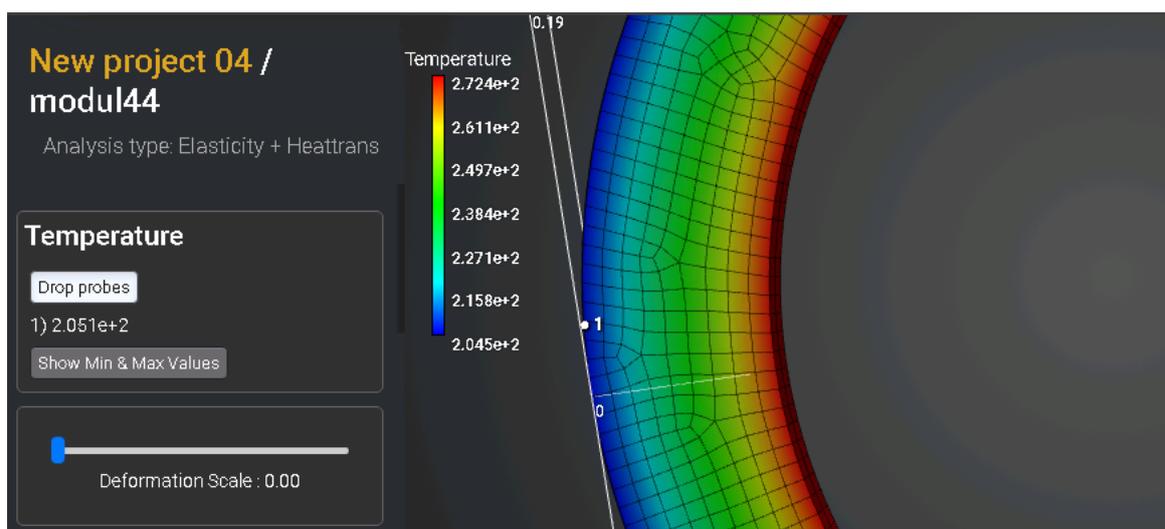


Рис. 3.4.4. Результат температуры в точке (0,391,0,0)

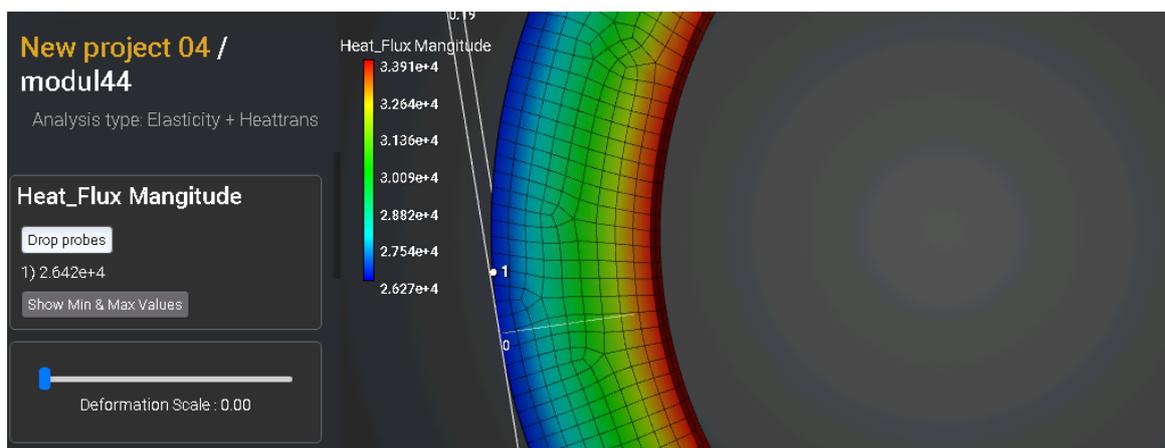


Рис. 3.4.5. Результат теплового потока в точке (0.391,0,0)

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
```

```
create Cylinder height 0.01 radius 0.3
```

```
create Cylinder height 0.01 radius 0.391
```

```
subtract body 1 from body 2 imprint
```

```
webcut volume 2 with plane zplane offset 0
```

```
curve 4 6 g interval 200
```

```
curve 4 6 g scheme equal
```

```
volume all scheme TetMesh
```

```
mesh volume all
```

```
create material 1
```

```
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 40
```

```
block 1 volume all
```

```
block 1 material 1
```

```
block 1 element solid order 2
```

```
create convection on surface 11 14 surrounding 500 coefficient 150
```

```
create convection on surface 12 15 surrounding 20 coefficient 142
```

```
create displacement on surface 8 9 dof 3 fix 0
```

```
create contact autoselect tolerance 0.0005 type tied method auto
```

```
analysis type static heattrans dim3
```

### Список литературы

[1] Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA03/89



## 4. Контактная информация

<http://www.cae-fidesys.com>

[support@cae-fidesys.com](mailto:support@cae-fidesys.com)

[+7\(495\) 177-36-18](tel:+7(495)177-36-18)