



# FIDESYS

система прочностного анализа

Версия 5.1

**Отчет о тестировании**



## Содержание

1. Введение.....	5
О программе .....	5
Общие положения .....	5
Ожидаемые результаты .....	5
Системные требования .....	6
1. Задачи с точными аналитическими решениями.....	7
1.1. Контрольная задача №1.1 .....	7
1.2. Контрольная задача №1.2 .....	12
1.3. Контрольная задача №1.3 .....	18
1.4. Контрольная задача №1.4 .....	25
1.5. Контрольная задача №1.5 .....	31
1.6. Контрольная задача №1.6 .....	39
1.7. Контрольная задача №1.7 .....	43
1.8. Контрольная задача №1.8 .....	48
1.9. Контрольная задача №1.9 .....	51
1.10. Контрольная задача №1.10 .....	55
1.11. Контрольная задача №1.11 .....	59
1.12. Контрольная задача №1.12 .....	63
1.13. Контрольная задача №1.13 .....	68
1.14. Контрольная задача №1.14 .....	73
1.15. Контрольная задача №1.15 .....	77
1.16. Контрольная задача №1.16 .....	80
1.17. Контрольная задача №1.17 .....	83
1.18. Контрольная задача №1.18 .....	86
1.19. Контрольная задача №1.19 .....	89
1.20. Контрольная задача №1.20 .....	95
1.21. Контрольная задача №1.21 .....	98
1.22. Контрольная задача №1.22 .....	105
1.23. Контрольная задача №1.23 .....	108
1.24. Контрольная задача №1.24 .....	112
1.25. Контрольная задача №1.25 .....	115
1.26. Контрольная задача №1.26 .....	117
1.27. Контрольная задача №1.27 .....	122
1.28. Контрольная задача № 1.28 .....	127
1.29. Контрольная задача № 1.29 .....	129



1.30.	Контрольная задача № 1.30 .....	136
1.31.	Контрольная задача № 1.31 .....	139
1.32.	Контрольная задача № 1.32 .....	142
1.33.	Контрольная задача № 1.33 .....	145
2.	Задачи с численно приближенными аналитическими решениями.....	148
2.1.	Контрольная задача №2.1 .....	148
2.2.	Контрольная задача №2.2 .....	153
2.3.	Контрольная задача №2.3 .....	159
2.4.	Контрольная задача №2.4 .....	165
2.5.	Контрольная задача №2.5 .....	171
2.6.	Контрольная задача №2.6 .....	175
2.7.	Контрольная задача №2.7 .....	179
2.8.	Контрольная задача №2.8 .....	184
2.9.	Контрольная задача №2.9 .....	189
2.10.	Контрольная задача №2.10 .....	192
2.11.	Контрольная задача №2.11 .....	195
2.12.	Контрольная задача №2.12 .....	199
2.13.	Контрольная задача №2.13 .....	203
2.14.	Контрольная задача №2.14 .....	206
2.15.	Контрольная задача №2.15 .....	208
2.16.	Контрольная задача №2.18 .....	210
2.17.	Контрольная задача №2.17 .....	213
2.18.	Контрольная задача №2.18 .....	216
2.19.	Контрольная задача №2.21 .....	219
2.20.	Контрольная задача №2.20 .....	222
2.21.	Контрольная задача №2.21 .....	226
2.22.	Контрольная задача №2.22 .....	230
2.23.	Контрольная задача №2.23 .....	234
2.24.	Контрольная задача №2.24 .....	238
2.25.	Контрольная задача №2.25 .....	241
2.26.	Контрольная задача №2.26 .....	247
2.27.	Контрольная задача №2.27 .....	250
2.28.	Контрольная задача № 2.28 .....	253
2.29.	Контрольная задача № 2.29 .....	257
2.30.	Контрольная задача № 2.30 .....	265
2.31.	Контрольная задача № 2.31 .....	272



3. Тестирование облачного сервиса.....	276
3.1. Контрольная задача №3.1 .....	276
3.2. Контрольная задача №3.2 .....	280
3.3. Контрольная задача №3.3 .....	282
3.4. Контрольная задача №3.4 .....	286
3.5. Контрольная задача №3.5 .....	289
3.6. Контрольная задача №3.6 .....	291
3.7. Контрольная задача №3.7 .....	293
3.8. Контрольная задача №3.8 .....	295
3.9. Контрольная задача №3.9 .....	302
3.10. Контрольная задача № 3.10 .....	305
3.11. Контрольная задача №3.11. Упруго-пластическое равновесие полого шара. ....	308
4. Контактная информация.....	311



# 1. Введение

## О программе

*CAE Fidesys* — программный комплекс прочностного анализа. Комплекс позволяет проводить расчёты для задач следующих типов:

- статическое нагружение;
- динамическое нагружение;
- задача устойчивости;
- анализ собственных частот;
- гармонический анализ;
- спектральный анализ;
- расчёт эффективных свойств материалов;
- комбинация мод на основе спектрального анализа;
- топологической оптимизации моделей;
- расчет для Автомеханики.

В состав комплекса входит программа *Fidesys Viewer*, предназначенная для просмотра и анализа полученных результатов:

- визуализации скалярных и векторных полей;
- работа с форматом SEG-Y;
- построения графиков и диаграмм;
- построения зависимостей от частоты;
- анализа временных зависимостей.

## Общие положения

*CAE Fidesys* — это инновационная CAE-система, осуществляющая полный цикл инженерных расчётов от построения расчётной сетки до визуализации результатов расчёта.

CAE Fidesys постоянно проверяется разработчиками при добавлении нового функционала. Данные проверки программного комплекса проводится в соответствии с процедурами, которые составляют часть общей программы обеспечения качества *CAE Fidesys*. В приведенном отчете по тестированию для версии CAE Fidesys 3.1 представлена небольшую часть тестовых примеров (контрольных задач) обеспечения качества, которая используется при тестировании нового функционала. Тестовые примеры представляют собой сравнения решений, полученных в *CAE Fidesys*, с известными теоретическими решениями и другими независимо рассчитанными решениями.

Представленные контрольные задачи подобраны таким образом, чтобы охватить разнообразные проблемные области, типов нагрузок, граничных условий, соответствующие новому функционалу версии *CAE Fidesys 5.1*.

## Ожидаемые результаты

Каждая задача верифицирует определенный набор параметров. Также для каждой задачи приведен ожидаемый результат, который и рассматривается как критерий прохождения теста. Считается, что тестовое испытание прошло успешно, если относительная погрешность результатов расчета в *CAE Fidesys* по сравнению с эталонными не превысит 5%. Относительная погрешность определяется по следующей формуле:



$$\Delta = \left| \frac{P - P_0}{P_0} \right| \cdot 100\% ,$$

где  $\Delta$  – значение относительной погрешности показателя;  $P$  – расчетное значение показателя, полученного в *CAE Fidesys*;  $P_0$  – ожидаемое (эталонное) значение показателя.

## Системные требования

*CAE Fidesys* с самого начала разрабатывается таким образом, что системные требования комплекса невысоки: он может быть запущен на обыкновенном персональном компьютере. При наличии в компьютере одного и более многоядерных процессоров вычисления будут автоматически распараллелены на все ядра. Начиная с версии 1.5, в 64-битной версии программного комплекса доступно распараллеливание вычислений на несколько узлов, объединенных в локальную сеть или кластер.

Программный комплекс *CAE Fidesys* предъявляет следующие минимальные требования к программному обеспечению и оборудованию.

### Аппаратные требования

- Процессор: Dual-core 1,7 ГГц и выше.
- Оперативная память: не менее 4GB.
- Свободное место на диске: 5 GB.
- Видеокарта уровня NVIDIA GeForce GTX 460 или выше.
- Разрешение экрана: 1024×768 или выше.

### Операционная система

Поддерживаются следующие версии операционных систем (64-разрядные версии):

Windows 11	Ubuntu 16.04, Ubuntu 18.04, Ubuntu 20.04, Ubuntu 22.04
Windows Server 2022	Alt Linux 9.2
Windows 10	Debian 9, Debian 10, Debian 11
Windows Server 2019	RHEL 7, RHEL 8, RHEL 9
Windows Server 2016	Astra Linux Special Edition РУСБ.10015-01
Windows 8.1	Astra Linux 1.6, Astra Linux 1.7
Windows 8	RedOS
Windows Server 2012	Centos 7, Centos 8, Centos 9
Windows Server 2012 R2	Oracle Linux Server 9
Windows 7 SP1	OpenSUSE 15.3, OpenSUSE 15.4
Windows Server 2008 R2 SP1	Rocky Linux 8.5
	Scientific Linux 7
	Fedora 36

## 1. Задачи с точными аналитическими решениями

### 1.1. Контрольная задача №1.1

#### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного изотропного материала.

#### *Значения входных данных*

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Плотность =  $1 \text{ кг} / \text{м}^3$ .

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого и второго порядков, Тетраэдры первого и второго порядков.

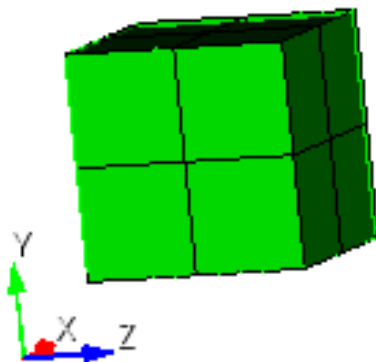


Рисунок 1.1 – Сетка 3D – гексаэдры

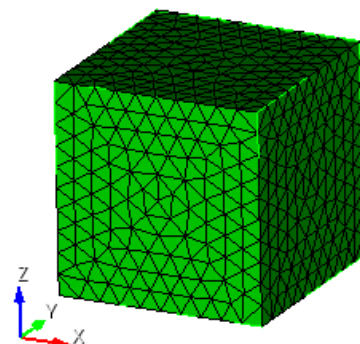


Рисунок 1.2 – Сетка 3D - тетраэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	1.2
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	0.4
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	0.4
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.4
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.4
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	1.2
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	0.4
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.4
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	1.2

## Описание алгоритма аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

1.  $E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси X;

2.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Y;

3.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Z;

4.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости XY;

5.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости XZ;

6.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости YZ.





Для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ .

Линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  представлена в виде:

$$a_{ij}^e = a_{ij}q$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}$$

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы для коэффициентов  $C_{ijkl}$  представляются в виде:

$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q;$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q;$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q;$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q;$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q;$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $C_{ijkl}$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)};$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)};$$

$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)};$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)};$$



$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}^{(5)};$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}^{(6)}.$$

## Результаты

Гексаэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	1.2	1.2	0
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	0.4	0.4	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	0.4	0.4	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.4	0.4	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.4	0.4	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	1.2	1.2	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	0.4	0.4	0
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.4	0.4	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	1.2	1.2	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1.0
volume 1 scheme Map
volume 1 size 0.5
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1.0
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1.0
block 1 volume 1
block 1 material 1
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc on

```

Тетраэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	1.2	1.2	0



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	0.4	0.4	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	0.4	0.4	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.4	0.4	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.4	0.4	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	1.2	1.2	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	0.4	0.4	0
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.4	0.4	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	1.2	1.2	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset  
brick x 1.0  
volume 1 scheme Tetmesh  
volume 1 size 0.1  
mesh volume 1  
create material 1  
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1.0  
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25  
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1.0  
block 1 volume 1  
block 1 material 1  
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2  
analysis type effectiveprops elasticity dim3  
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.

## 1.2. Контрольная задача №1.2

### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного ортотропного материала.

### *Значения входных данных*

Параметры материала:

- Ортотропный;
- Модуль Юнга  $X = 12$  Па;
- Модуль Юнга  $Y = 8$  Па;
- Модуль Юнга  $Z = 4$  Па;
- Главный коэффициент Пуассона  $XY = 0.375$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $XZ = 0.75$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $YZ = 0.5$ ;
- Плотность =  $1 \text{ кг/м}^3$ ;
- Модуль сдвига  $XY = 3$  Па;
- Модуль сдвига  $XZ = 2$  Па;
- Модуль сдвига  $YZ = 1$  Па;
- Коэффициент температурного расширения  $X = 1$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $Y = 1$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $Z = 1$ .

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого и второго порядков, Тетраэдры первого и второго порядков.

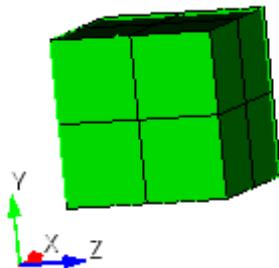


Рисунок 1.3 – Сетка 3D – гексаэдры

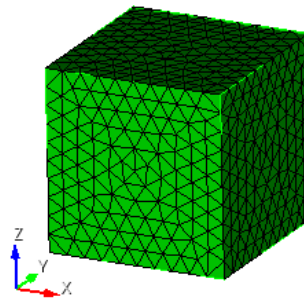


Рисунок 1.4 – Сетка 3D- тетраэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	21
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	9
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	7.5
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	3
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	2
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	13
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	5.5
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	7.25
10	Эффективная плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0

## Описание алгоритма аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

1.  $E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси X;

2.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Y;

3.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Z;

4.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости XY;

5.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости XZ;

6.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости YZ.



Итак, для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ . Уровень прикладываемой деформации  $q$  для всех задач один и тот же, но вид тензора  $E^e$  для каждой задачи свой.

Для каждой задачи будет строиться линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  (т.е.  $a_{ij}$  является тензорным коэффициентом зависимости и от  $q$  не зависит):

$$a_{ij}^e = a_{ij}q$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется просто:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}$$

Нужно отметить, что для всех шести задач  $a_{ij}$  - тензор симметричный. И для каждой из шести задач - свой.

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы будут выглядеть так:

$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q;$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q;$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q;$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q;$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q;$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $C_{ijkl}$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)};$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)};$$



$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)};$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)};$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)};$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}.$$

## Результаты

Гексаэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	21	21.0	0
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	9	9.00	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	7.5	7.5	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	3	3.00	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	2	2.0	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	13	13.00	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	5.5	5.50	0
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1	1	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	7.25	7.250	0
10	Эффективная плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0	1.00	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1
volume 1 scheme Map
volume 1 size 0.5
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'Material1'
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_X' value 12
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Y' value 8
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Z' value 4
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XY' value 0.375
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XZ' value 0.75
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_YZ' value 0.5
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XY' value 3
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XZ' value 2
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_YZ' value 1

```



```

modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_X' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Y' value 2
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Z' value 3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
block 1 volume 1
block 1 material 'Material1'
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc off

```

#### Тетраэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	21	21.0	0
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	9	9.00	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	7.5	7.5	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	3	3.00	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	2	2.0	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	13	13.00	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	5.5	5.50	0
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1	1	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	7.25	7.250	0
10	Эффективная плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0	1.00	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1
volume 1 scheme Tetmesh
volume 1 size 0.1
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'Material1'
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_X' value 12
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Y' value 8
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Z' value 4
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XY' value 0.375
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XZ' value 0.75
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_YZ' value 0.5
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XY' value 3
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XZ' value 2
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_YZ' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_X' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Y' value 2

```





```
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Z' value 3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
block 1 volume 1
block 1 material 'Material1'
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc off
```

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.

### 1.3. Контрольная задача №1.3

#### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного трансверсально-изотропного материала.

#### *Значения входных данных*

Параметры материала:

- Трансверсально-изотропный;
- Модуль Юнга  $T = 3$  Па;
- Модуль Юнга  $L = 4$  Па;
- Главный коэффициент Пуассона  $T = 0.25$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $TL = 0.5$ ;
- Плотность  $= 1 \text{ кг} / \text{м}^3$ ;
- Модуль сдвига  $TL = 1$  Па.

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого и второго порядков, Тетраэдры первого и второго порядков.

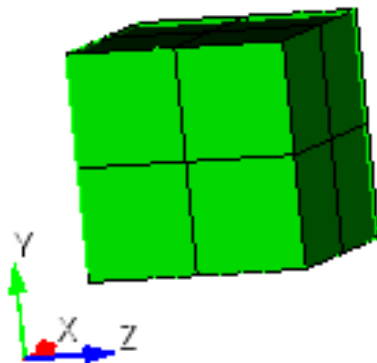


Рисунок 1.5 – Сетка 3D – гексаэдры

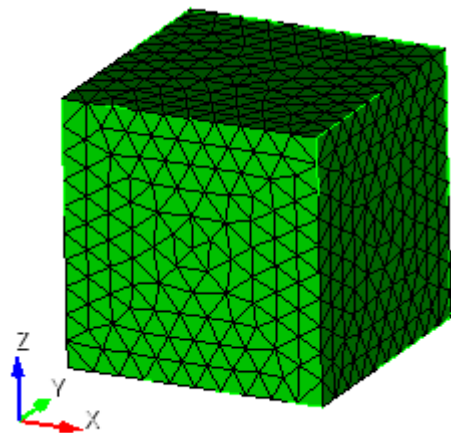


Рисунок 1.6 – Сетка 3D - тетраэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	19.2
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	16.8
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	24
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	1.2
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	1
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	19.2
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	24
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	36
10	Эффективный модуль Юнга	E <sub>x</sub>	Па	3.0
11	Эффективный модуль Юнга	E <sub>y</sub>	Па	3.0
12	Эффективный модуль Юнга	E <sub>z</sub>	Па	4.0
13	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{yx}$	-	0.25
14	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{zx}$	-	0.6667
15	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{zy}$	-	0.6667
16	Эффективный модуль сдвига	G <sub>xy</sub>	Па	1.2
17	Эффективный модуль сдвига	G <sub>xz</sub>	Па	1.0
18	Эффективный модуль сдвига	G <sub>yz</sub>	Па	1.0
19	Эффективная плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0

## Описание алгоритма аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

- $E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси X;



$$2. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси } Y;$$

$$3. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси } Z;$$

$$4. E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XY;$$

$$5. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XZ;$$

$$6. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } YZ.$$

Итак, для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ . Уровень прикладываемой деформации  $q$  для всех задач один и тот же, но вид тензора  $E^e$  для каждой задачи свой.

Для каждой задачи будет строиться линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  (т.е.  $a_{ij}$  является тензорным коэффициентом зависимости и от  $q$  не зависит):

$$a_{ij}^e = a_{ij}q$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется просто:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}$$

Нужно отметить, что для всех шести задач  $a_{ij}$  - тензор симметричный. И для каждой из шести задач - свой.

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы будут выглядеть так:

$$1) = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q;$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q;$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q;$$



$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q;$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q;$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $Cijkl$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)};$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)};$$

$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)};$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)};$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)};$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}.$$

## Результаты

Гексаэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	19.2	19.20	0
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	16.8	16.80	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	24	24.00	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	1.2	1.20	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	1	1.00	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	19.2	19.20	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	24	24.00	0



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1	1.00	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	36	36.00	0
10	Эффективный модуль Юнга	E <sub>x</sub>	Па	3.0	3.00	0
11	Эффективный модуль Юнга	E <sub>y</sub>	Па	3.0	3.00	0
12	Эффективный модуль Юнга	E <sub>z</sub>	Па	4.0	4.00	0
13	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{yx}$	-	0.25	0.25	0
14	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{zx}$	-	0.6667	0.6667	0
15	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{zy}$	-	0.6667	0.6667	0
16	Эффективный модуль сдвига	G <sub>xy</sub>	Па	1.2	1.20	0
17	Эффективный модуль сдвига	G <sub>xz</sub>	Па	1.0	1.00	0
18	Эффективный модуль сдвига	G <sub>yz</sub>	Па	1.0	1.000	0
19	Эффективная плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0	1.00	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
brick x 1
volume 1 size 0.5
mesh volume 1
block 1 volume 1
create material 1
modify material 1 set property 'TR_ISOT_E_T' value 3
modify material 1 set property 'TR_ISOT_E_L' value 4
modify material 1 set property 'TR_ISOT_G_TL' value 1
modify material 1 set property 'TR_ISOT_PR_T' value 0.25
modify material 1 set property 'TR_ISOT_PR_TL' value 0.5
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
block 1 material 1
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc on

```

Тетраэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	19.2	19.20	0



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	16.8	16.80	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	24	24.00	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	1.2	1.20	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	1	1.00	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	19.2	19.20	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	24	24.00	0
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1	1.00	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	36	36.00	0
110	Эффективный модуль Юнга	E <sub>x</sub>	Па	3.0	3.00	0
111	Эффективный модуль Юнга	E <sub>y</sub>	Па	3.0	3.00	0
112	Эффективный модуль Юнга	E <sub>z</sub>	Па	4.0	4.00	0
113	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{yx}$	-	0.25	0.25	0
114	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{zx}$	-	0.6667	0.6667	0
115	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{zy}$	-	0.6667	0.6667	0
116	Эффективный модуль сдвига	G <sub>xy</sub>	Па	1.2	1.20	0
117	Эффективный модуль сдвига	G <sub>xz</sub>	Па	1.0	1.00	0
118	Эффективный модуль сдвига	G <sub>yz</sub>	Па	1.0	1.000	0
119	Эффективная плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0	1.00	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1
volume 1 scheme Tetmesh
volume 1 size 0.1
mesh volume 1
block 1 volume 1
create material 1
modify material 1 set property 'TR_ISOT_E_T' value 3
modify material 1 set property 'TR_ISOT_E_L' value 4

```



```
modify material 1 set property 'TR_ISOT_G_TL' value 1
modify material 1 set property 'TR_ISOT_PR_T' value 0.25
modify material 1 set property 'TR_ISOT_PR_TL' value 0.5
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
block 1 material 1
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
```

### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.



## 1.4. Контрольная задача №1.4

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного материала Мурнагана.

### Значения входных данных

Параметры материала:

- Трансверсально-изотропный;
- Модуль Ламе = 2;
- Плотность = 1 кг/м<sup>3</sup>;
- Модуль сдвига = 1 Па;
- Коэффициент C3 = -0.1;
- Коэффициент C4 = -0.2;
- Коэффициент C5 = -0.3.

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого и второго порядков, Тетраэдры первого и второго порядков.

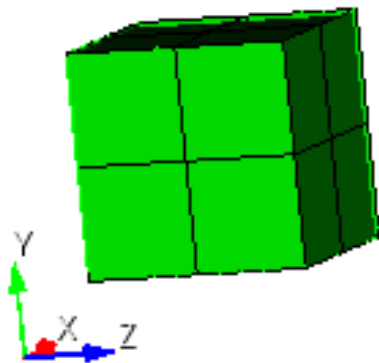


Рисунок 1.7 – Сетка 3D – гексаэдры

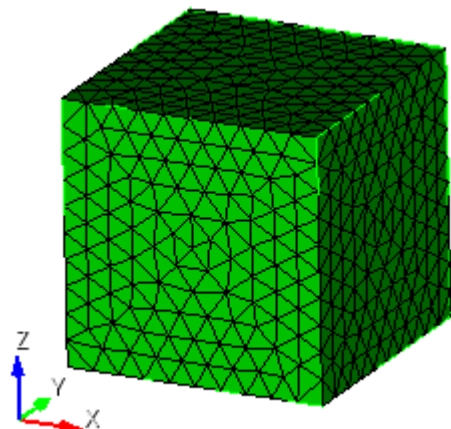


Рисунок 1.8 – Сетка 3D - тетраэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	4
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	2
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	2
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	1
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	1
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	4
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	2
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	4
10	Модуль Юнга	E	Па	2.6667
11	Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.3333
12	Плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0

## Описание алгоритма аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

1.  $E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси X;

2.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Y;

3.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Z;

4.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости XY;

5.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – сдвиг в плоскости XZ;



$$6. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } YZ.$$

Итак, для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ . Уровень прикладываемой деформации  $q$  для всех задач один и тот же, но вид тензора  $E^e$  для каждой задачи свой.

Для каждой задачи будет строиться линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  (т.е.  $a_{ij}$  является тензорным коэффициентом зависимости и от  $q$  не зависит):

$$a_{ij}^e = a_{ij}q$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется просто:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}$$

Нужно отметить, что для всех шести задач  $a_{ij}$  - тензор симметричный. И для каждой из шести задач - свой.

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = Cijkl e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы будут выглядеть так:

$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q;$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q;$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q;$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q;$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q;$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $Cijkl$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :



1)  $C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)}$ ;

2)  $C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)}$ ;

3)  $C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)}$ ;

4)  $C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)}$ ;

5)  $C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)}$ ;

6)  $C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}$ .

## Результаты

Гексаэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	4	4.00	0
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	2	2.00	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	2	2.00	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	1	1.00	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	1	1.00	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	4	4.00	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	2	2.00	0
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1	1.00	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	4	4.00	0
10	Модуль Юнга	E	Па	2.6667	2.6667	0
11	Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.3333	0.33333	<<0.01
12	Плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0	1.0	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
brick x 1
volume 1 size 0.5

```



```

mesh volume 1
block 1 volume 1
create material
modify material 1 set property 'MUR_LAME' value 2
modify material 1 set property 'MUR_SHEAR' value 1
modify material 1 set property 'MUR_C3' value -0.1
modify material 1 set property 'MUR_C4' value -0.2
modify material 1 set property 'MUR_C5' value -0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
block 1 material 1
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc on

```

Тетраэдральная сетка первого и второго порядков

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	4	4.00	0
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	2	2.00	0
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	2	2.00	0
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	1	1.00	0
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	1	1.00	0
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	4	4.00	0
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	2	2.00	0
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	1	1.00	0
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	4	4.00	0
10	Модуль Юнга	E	Па	2.6667	2.6667	0
11	Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.3333	0.33333	<<0.01
12	Плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1.0	1.0	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1
volume 1 scheme Tetmesh
volume 1 size 0.1
mesh volume 1
block 1 volume 1
create material
modify material 1 set property 'MUR_LAME' value 2
modify material 1 set property 'MUR_SHEAR' value 1

```



```
modify material 1 set property 'MUR_C3' value -0.1
modify material 1 set property 'MUR_C4' value -0.2
modify material 1 set property 'MUR_C5' value -0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
block 1 material 1
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.

## 1.5. Контрольная задача №1.5

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных

Параметры материала:

Матрица:

- Модуль Юнга  $E = 2$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $= 0.3$ ;
- Плотность  $= 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Нить:

- Модуль Юнга  $E = 2000$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $= 0.2$ ;
- Плотность  $= 2000$  кг/м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель:

- Прямоугольный параллелепипед  $25 \times 16 \times 16$ ;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019.

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого и второго порядков, Тетраэдры второго порядка.

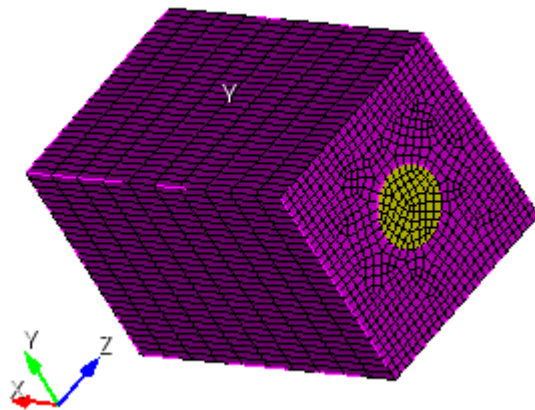


Рисунок 1.9 – Сетка 3D – гексаэдры

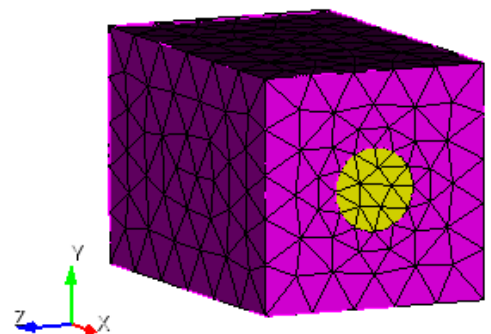


Рисунок 1.10 – Сетка 3D - тетраэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	202.48
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	1.22711
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	1.22711
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.938421
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.938421
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	3.11029
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	1.33286
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.888717
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	3.11029
10	Эффективный модуль Юнга	E1	Па	201.803
11	Эффективный модуль Юнга	E2	Па	2.53669
12	Эффективный модуль Юнга	E2	Па	2.53669
13	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{13}$	-	0.27618
14	Эффективный модуль сдвига	G12=G13	Па	0.938421
15	Эффективный модуль сдвига	G23	Па	0.888717
16	Плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1100

## Описание алгоритма аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

1.  $E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси X;

2.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Y;

3.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Z;





$$4. E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XY;$$

$$5. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XZ;$$

$$6. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } YZ.$$

Для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ .

Линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  представлена в виде:

$$a_{ij}^e = a_{ij}q.$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}.$$

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = Cijkl e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы для коэффициентов  $Cijkl$  представляются в виде:

$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q;$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q;$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q;$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q;$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q;$$



$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $C_{ijkl}$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)};$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)};$$

$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)};$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)};$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)};$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}.$$

## Результаты

Гексаэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	202.48	200.91644	0.77
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	1.22711	1.2725948	3.71
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	1.22711	1.2725917	3.71
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.938421	0.93935018	0.1
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.938421	0.93929083	0.09
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	3.11029	3.135307	0.8
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	1.33286	1.3047198	2.11
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.888717	0.89198678	0.37
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	3.11029	3.1352915	0.8
10	Эффективный модуль Юнга	E1	Па	201.803	200.18694	0.8
11	Эффективный модуль Юнга	E2	Па	2.53669	2.5896062	2.09



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
12	Эффективный модуль Юнга	E3	Па	2.53669	2.5895934	2.09
13	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{13}$	-	0.27618	0.28661851	3.78
14	Эффективный модуль сдвига	G12=G13	Па	0.938421	0.93935018	0.10
15	Эффективный модуль сдвига	G23	Па	0.888717	0.89198677	0.37
16	Плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1100	1099.2705	0.07

## Гексаэдральная сетка второго порядка

	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	202.48	202.37216	0.05
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	1.22711	1.2731799	3.75
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	1.22711	1.2731803	3.75
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.938421	0.93983167	0.15
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.938421	0.9398312	0.15
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	3.11029	3.1359977	0.83
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	1.33286	1.3069533	1.94
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.888717	0.89142408	0.3
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	3.11029	3.1359996	0.83
10	Эффективный модуль Юнга	E1	Па	201.803	201.64247	0.08
11	Эффективный модуль Юнга	E2	Па	2.53669	2.5885826	2.05
12	Эффективный модуль Юнга	E3	Па	2.53669	2.5885842	2.05
13	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{13}$	-	0.27618	0.2865618	3.76
14	Эффективный модуль сдвига	G12=G13	Па	0.938421	0.93983167	0.15
15	Эффективный модуль сдвига	G23	Па	0.888717	0.89142408	0.3
16	Плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1100	1099.9996	<<0.001



Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt( 0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
#{size = 0.6}
# geometry
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
# meshing
volume all size {size}
curve 18 20 22 24 interval 10
mesh volume all
# materials
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2000
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.2
modify material 1 set property 'DENSITY' value 2000
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'DENSITY' value 1000
# blocks
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block 1 element solid order 1 # update automatical from 1 to 2
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc on

```

Тетраэдральная сетка второго порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	202.48	202.35621	0.06
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	1.22711	1.272566	3.70
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	1.22711	1.274055	3.83
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.938421	0.94162641	0.34
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.938421	0.94340145	0.53
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	3.11029	3.129898	0.63



7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	1.33286	1.304624	2.12
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.888717	0.8893367	0.07
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	3.11029	3.143449	1.07
10	Эффективный модуль Юнга	E1	Па	201.803	201.6261	0.09
11	Эффективный модуль Юнга	E2	Па	2.53669	2.5852187	1.91
12	Эффективный модуль Юнга	E3	Па	2.53669	2.5961366	2.34
13	Эффективный коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{13}$	-	0.27618	0.28735031	4.04
14	Эффективный модуль сдвига	G12=G13	Па	0.938421	0.94154294	0.33
15	Эффективный модуль сдвига	G23	Па	0.888717	0.88922012	0.06
16	Плотность	Density	кг/м <sup>3</sup>	1100	1099.9915	<<0.001

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt( 0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
#{size = 4}
# geometry
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
# meshing
volume all scheme Tetmesh
volume all size {size}
mesh volume all
# materials
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2000
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.2
modify material 1 set property 'DENSITY' value 2000
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'DENSITY' value 1000
# blocks
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'

```



block 1 2 element solid order 2  
analysis type effectiveprops elasticity dim3  
periodicbc on

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.

## 1.6. Контрольная задача №1.6

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача Лэмба, которая представляет собой модель о динамическом воздействии на границу упругой полуплоскости сосредоточенной нагрузки, меняющейся по времени по закону Берлаге.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Длина  $a = 1000$  м;
- Ширина  $b = 500$  м;

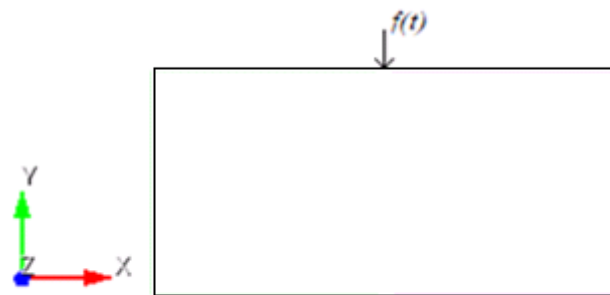


Рисунок 1.11 – Геометрическая модель задачи Лэмба

Граничные условия:

- Точечная сила задается с помощью формулы Берлаге:

$$f(t) = A \frac{\omega_1^2 e^{-\omega_1 t}}{4} \cdot \left( \sin(\omega_0 t) \left( -\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left( \frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right),$$
$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}, \omega_0 = 2\pi\omega,$$

где  $A$  - амплитуда,  $\omega$  - частота,  $t$  - время.

- На нижние и боковые грани приложены неотражающие условия.

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E=2e8$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ ;
- Плотность  $\rho=1900$  кг/м<sup>3</sup>;
- Когезия  $K=2900$ ;
- Угол внутреннего трения  $\alpha=20$ ;
- Угол дилатансии  $\beta=10$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Спектральные элементы 3 порядка.

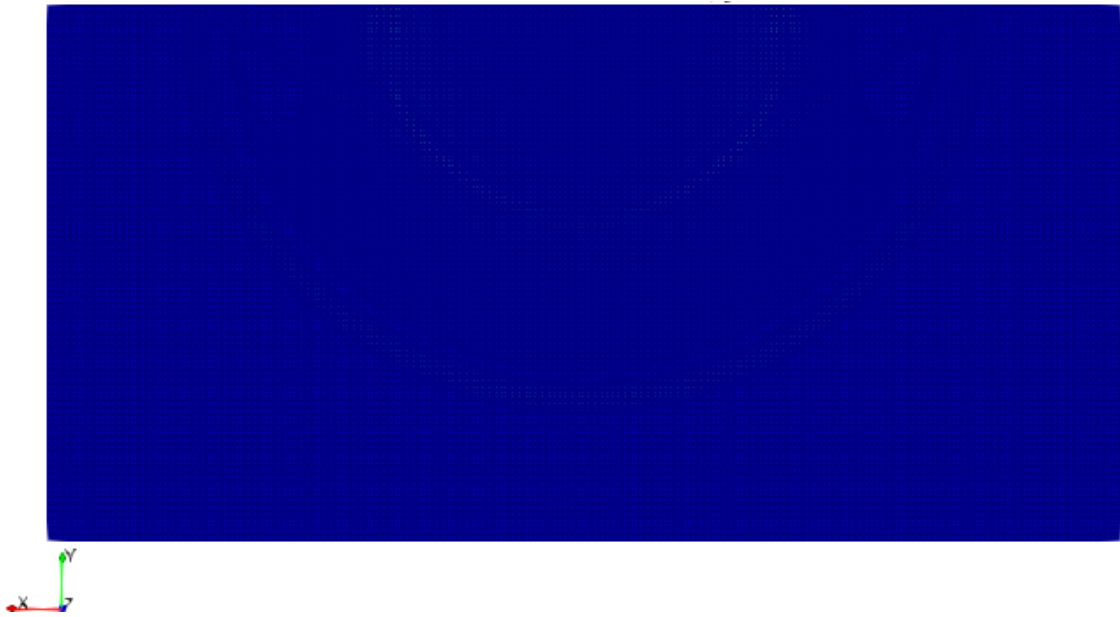


Рисунок 1.12 – Спектральные элементы 3 порядка для задачи Лэмба

Сетка должна быть из плоских четырехугольников, высота  $h = 500$  элемента рассчитывается в соответствии с длиной волны. Скорость распространения волны рассчитывается по формуле:

$$v = \sqrt{\frac{\lambda + 2G}{\rho}},$$

где  $h$  – высота геометрии,  $t = \frac{h}{v}$  – время,  $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  – модуль Ламе,

$G = \frac{E}{2+2\nu}$  – модуль сдвига.

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время – 3 с;
- Максимальное количество шагов 2025;
- Вывод каждого 135 шага в .vtu файл.

### Описание алгоритма аналитического решения

Уравнения для перемещения волны Рэлея на поверхности:

$$u_R \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -2iQe^{\frac{i\pi}{4}} \left[ \frac{2}{c_R} \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \exp \left[ i\omega \left( \frac{r}{c_R} - t \right) \right] \exp \left[ -\omega \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} h \right] \exp(i\omega t) d\omega,$$

$$w_R \sim \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -2iQe^{\frac{i\pi}{4}} \left[ \frac{2}{c_R^2} - \frac{1}{\beta^2} \right] \exp \left[ i\omega \left( \frac{r}{c_R} - t \right) \right] \exp \left[ -\omega \left( \frac{1}{c_R^2} - \frac{1}{\alpha^2} \right)^{\frac{1}{2}} h \right] \exp(i\omega t) d\omega.$$





$$\text{где } Q = A \left( \frac{2\pi\omega}{rc_R} \right)^{1/2} \frac{\omega}{\beta^2 R' \left( \frac{1}{c_R} \right)}. [1]$$

Значения физических параметров скорости распространения продольной и поперечной волн, а также скорость рэлеевской волны находятся по следующим формулам [1]

$$\alpha = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}}, \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, c = \frac{0.87 + 1.12\nu}{1 + \nu} \beta,$$

где  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  - модуль сдвига, а  $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  - модуль всестороннего сжатия.

При изменении  $\nu$  от 0 до 0.5 фазовая скорость рэлеевской волны монотонно изменяется от 0.87 до 0.96  $\beta$ .

Список литературы

[1] Аки. К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. Т. 1. Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 520 с., ил.

## Результаты

Значения перемещений проверяются в точке (70.4225, 4.31214e-15, 0.0).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 6	Displacement X	м	-0.00110025	-0.0011002442	<<0.01
2	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 6	Displacement Y	м	0.000517095	0.000517075	<<0.01
3	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 8	Displacement X	м	-4.78016e-05	-4.7798158e-05	<<0.01
4	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 8	Displacement Y	м	0.000445372	0.000445370783	<<0.01

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
create surface rectangle width 1000 zplane
webcut body 1 with plane xplane offset 0
webcut body 1 with plane yplane offset 0
delete Surface 3
rotate Surface 4 5 angle -90 about Z include_merged
webcut body 3 1 with plane yplane offset -250
surface all size 7

```



```
mesh surface all
imprint all
merge all
create material 1
modify material 1 name 'material'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+08
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1900
modify material 1 set property 'COHESION' value 29000
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 20
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 10
set duplicate block elements off
block 1 add surface all
block 1 material 1
block 1 element plane order 3
create absorption on curve 28 24 13 15 19 21
create force on vertex 10 force value 1 direction 0 -1 0
bcdep force 1 value 'berlage(1e+8, 10, time)'
create receiver on curve 16 displacement 1 1 1
#create receiver on curve 16 velocity 1 1 1
#create receiver on curve 16 principalstress 1 1 1
#create receiver on curve 16 pressure
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 3 maxsteps 2025
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 135
```

## 1.7. Контрольная задача №1.7

### Назначение контрольной задачи.

В предлагаемой задаче моделируется бесконечное пространство, заполненное однородной изотропной упругой средой, в которой действует сосредоточенная сила, приложенная в точке и действующая по закону Берлаге (задача Стокса [1]). Считается, что источник точечный, то есть он мал по сравнению с расстояниями до приемника и так же мал по сравнению с характерными размерами пространства. Задача имеет аналитическое решение.

### Значения входных данных

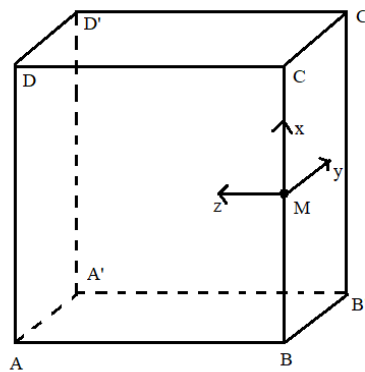


Рисунок 1.13 – Геометрическая модель задачи Стокса

Геометрическая модель:

- Куб  $100 \times 100 \times 100$  м;
- Геометрию переместили к координатам  $(0, 50, 50)$ , чтобы  $M = (0, 0, 0)$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e8$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ;
- Плотность  $\rho = 1900$  кг/м<sup>3</sup>.

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости ABCD вдоль оси Y;
- Нулевое перемещение плоскости BB'C'C вдоль оси Z;
- Нулевое перемещение ребра A'D' вдоль оси X;
- В точке  $M = (0, 0, 0)$  приложена сила величиной 100 кН, направленная вдоль оси X;
- Зависимость силы от времени по формуле Берлаге с амплитудой  $25e6$  м и циклической частотой 10 Гц. Примечание: так как в CAE Fidesys рассматривается четверть реальной модели, то следует амплитуду, используемые для реализации аналитического решения в математическом пакете, разделить на 4;
- Неотражающие ГУ в плоскостях AA'D'D, A'B'C'D', DCC'D', ABB'A';

- Вдоль линии действия силы к узлам присвоены приёмники по всем направлениям для каждого поля из выпадающего списка (перемещение, скорость, главные напряжения, давление).

Параметры сетки:

- Высота элемента  $h = 10$  м;
- Спектральные элементы третьего порядка.

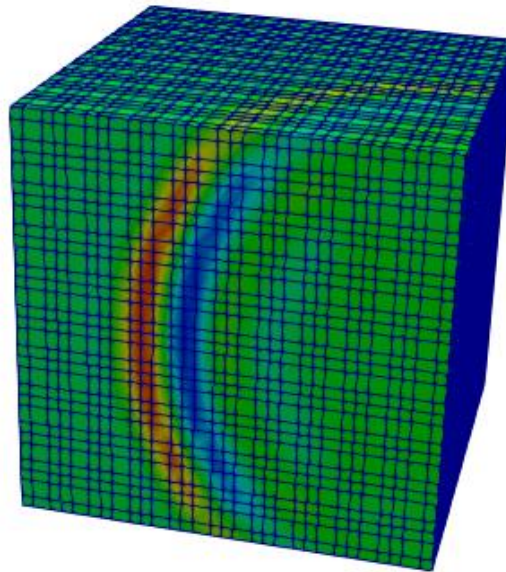


Рисунок 1.14 – Спектральные элементы третьего порядка для задачи Стокса

Высота элемента была вычислена по формуле:

$$h = \frac{L(n+1)}{10},$$

где  $L = \frac{v}{\omega}$  - длина волны,  $v$  - скорость волны,  $\omega$  - циклическая частота волны,  $n$  - порядок элемента.

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время – 0.4 с.;
- Максимальное количество шагов 50 000;
- Вывод каждого десятого шага в .vtu файл.

Максимальное время расчета выбрано, исходя из анализа аналитического решения, чтобы в значительной степени показать затухание возникающих волн.

### **Описание алгоритма аналитического решения**



Пусть на бесконечное пространство, заполненное однородной изотропной упругой средой, действует сосредоточенная сила, приложенная в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и направленная вдоль определенной оси  $x_j$ . Пусть по величине эта сила равна нулю при  $t < 0$  и  $X_0(t)$  при  $t > 0$ . Соответствующий такой силе вектор упругих смещений  $u_i(x, t)$  определяется следующими формулами Стокса [1]:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) - \\ - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}),$$

где

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $\gamma_i = \frac{x_i}{r}$  — направляющие косинусы,  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  — скорость продольной волны,  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  — скорость поперечной волны,  $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$  — константы Ламе,  $\rho$  — плотность среды, в которой распространяется волны.

Символ Кронекера  $\delta_{ij}$  интерпретируется следующим образом:

$$\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j, \\ \delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j.$$

Сила приложена вдоль оси  $x$  и распространяется по закону Берлаге. Экспериментальным путем установлено, что распространение упругих волн в земной коре качественно описываются при задании нагрузки законом Берлаге [2]:

$$X_0(t) = A \cdot \omega_1^2 e^{-\omega_1 t} \cdot \left( \sin(\omega_0 t) \left( \frac{-t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left( \frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right),$$

$$\omega_0 = 2\pi\omega, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}},$$

здесь  $A$  — амплитуда колебаний,  $\omega$  — циклическая частота колебаний.

Проведя анализ всех коэффициентов в формуле Стокса, перепишем её более конкретно под нашу постановку:

$$u_x(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_x\gamma_x - 1) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_x\gamma_x \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) - \\ - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_x\gamma_x - 1) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}), \\ u_y(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_y\gamma_x - 0) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_y\gamma_x \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) -$$



$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_y\gamma_x - 0) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}), \\
u_z(x, t) = & \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_z\gamma_x - 0) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_z\gamma_x \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) - \\
& - \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_z\gamma_x - 0) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}).
\end{aligned}$$

Таким образом, входными данными для реализации аналитического решения задачи Стокса в математических пакетах являются:  $A$ ,  $\omega$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ .

#### Список литературы

- [1] Аки К. Количественная сейсмология/ Ричардс П. — М.: Мир, т. 1, 1983. — 880 с.  
[2] Geophysics, vol. 55, no. 11, november 1990. — P. 1508-1511, 2 figs.

### Результаты расчета

Значения перемещений проверяются в точке (20, 10, 20).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 19	Displacement X	м	5.384e-06	5.54992e-06	3.08
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 20	Displacement Y	м	4.785e-06	4.85984e-06	1.56
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 20	Displacement Z	м	9.571e-06	9.43758e-06	1.39
4	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 27	Displacement X	м	1.842e-05	1.87276e-05	1.67
5	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 28	Displacement Y	м	-7.33e-06	-7.20336e-06	1.73
6	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 28	Displacement Z	м	-1.466e-05	-1.52926e-05	4.32
7	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 34	Displacement X	м	-1.024e-05	-1.05004e-05	2.54



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
8	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 34	Displacement Y	м	3.258e-06	3.28308e-06	0.77
9	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 34	Displacement Z	м	6.953e-06	6.99676e-06	0.63
10	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 41	Displacement X	м	3.525e-06	3.62663e-06	2.88
11	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 41	Displacement Y	м	-1.2e-06	-1.22987e-06	2.49
12	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 41	Displacement Z	м	-2.272e-06	-2.34377e-06	3.16

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
brick x 100 y 100 z 100
move Volume 1 location 0 50 50 include_merged
partition create curve 6 position 0 0 0
volume all size 10
mesh volume all
create material 1
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e8
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1900
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 3
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create displacement on curve 2 dof 1 fix 0
create force on vertex 9 force value 1 direction 1 0 0
bcdep force 1 value 'berlage(25e6, 10, time)'
create absorption on surface 1 5 6 4
create receiver on node 1566 137 1565 136 1564 135 1563 134 1562 123 displacement 1 1 1
create receiver on node 1566 137 1565 136 1564 135 1563 134 1562 123 velocity 1 1 1
create receiver on node 1566 137 1565 136 1564 135 1563 134 1562 123 principalstress 1 1 1
create receiver on node 1566 137 1565 136 1564 135 1563 134 1562 123 pressure
analysis type dynamic elasticity dim3 preload off
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 0.4 maxsteps 50000
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 10

```

## 1.8. Контрольная задача №1.8

### Назначение контрольной задачи

Взрывное давление в сферической полости. Задача рассматривает поведение упругой бесконечной среды со сферической полостью после приложения давления к поверхности полости. Решение проводилось для явной схемы.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Представлена на рисунке 1.15;
- Рассматриваемая область среды ограничена объемом сферы радиусом 1.5 м;
- Полость расположена в центре сферы и имеет радиус 0.5 м;
- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/8 исходного объема.

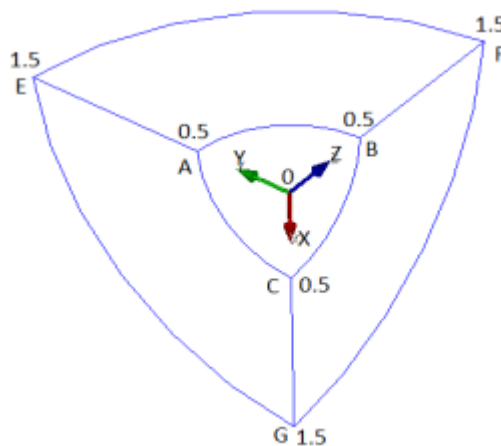


Рисунок 1.15 – Сферическая полость

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости ABFE вдоль оси X;
- Нулевое перемещение плоскости BCGF вдоль оси Y;
- Нулевое перемещение плоскости ACGE вдоль оси Z;
- На поверхность сферической полости ABC приложено давление, изменяющееся от времени по формуле

$$p(t) = 10^8 \sin(40000t).$$

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 7900$  кг/м<sup>3</sup>.



Сетка:

- Спектральные гексаэдры третьего порядка.

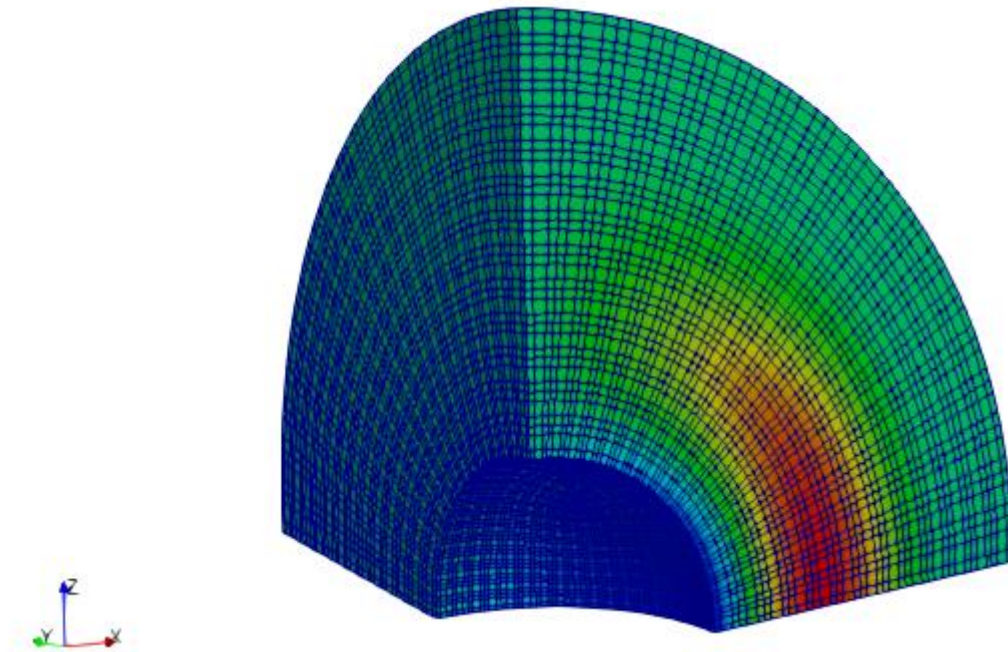


Рисунок 1.16 – Спектральные гексаэдры третьего порядка для сферической полости

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время –  $1.35 \cdot 10^{-4}$  с;
- Максимальное количество шагов 50 000;
- Вывод каждого десятого шага в .vtu файл.

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения перемещений и напряжений вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned}\tau &= t - \frac{r-a}{c}, \\ f(\tau) &= \frac{a}{(\beta-\alpha)\rho} \int_0^\tau p(\xi) [e^{\alpha(\tau-\xi)} - e^{\beta(\tau-\xi)}] d\xi, \\ u_R &= -\frac{-f'(\tau)}{c \cdot r} - \frac{f(\tau)}{r^2}, \\ \sigma_R &= \frac{\rho}{r} f''(\tau) + 2 \frac{\rho c}{r^2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [f'(\tau) + \frac{c}{r} f(\tau)], \\ \sigma_\Theta &= \frac{\rho}{r} \frac{\nu}{1-\nu} f''(\tau) - \frac{\rho c}{r^2} \frac{1-2\nu}{1-\nu} [f'(\tau) + \frac{c}{r} f(\tau)]\end{aligned}$$

Список литературы

[1] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, перев. с англ. – М.: Наука, 1975 г. – 576 стр.



## Результаты расчета

Ниже представлены значения для компонент вектора перемещения и тензора напряжений в точке (0.75, 0, 0) в последний момент времени.

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки в сферических координатах	Displacement X	м	4.08106e-05	4.0889534 e-05	0.19
2	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в сферических координатах	Stress RR	МПа	48.75	48.039792	1.45
3	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в сферических координатах	Stress TT	МПа	36.44	35.568912	2.39

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
create sphere radius 1.5
webcut volume 1 with plane xplane offset 0
webcut volume 1 2 with plane yplane offset 0
webcut volume 1 2 3 4 with plane zplane offset 0
delete volume 1 2 4 5 6 7 8
create sphere radius 0.5
subtract volume 9 from volume 3
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 7900
volume all size auto factor 4
mesh volume all
set duplicate block elements off
block 1 add volume 3
block 1 material 1 cs 1 element solid order 3
create displacement on surface 54 dof 1 fix 0
create displacement on surface 52 dof 2 fix 0
create displacement on surface 53 dof 3 fix 0
create pressure on surface 51 magnitude 1
bcdep pressure 1 value "1e8*sin(40000*t)"
analysis type dynamic elasticity dim3 preload off
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 1.35e-04 maxsteps 50000
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 10

```



## 1.9. Контрольная задача №1.9

### *Назначение контрольной задачи*

Проверка корректности решения на основе метода спектральных элементов для решения задачи Стокса, приведенной в разделе 1.7, на неконформной сетке с использованием условия жесткого контакта для соединения объемов вдоль внутреннего вспомогательного разреза. Результаты моделирования на неконформной сетке должны совпадать с результатами из раздела 1.7.

### *Значения входных данных*

Геометрическая модель:

- Куб  $100 \times 100 \times 100$  м;
- Геометрию переместили к координатам  $(0, 50, 50)$ , чтобы  $M = (0, 0, 0)$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e8$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ;
- Плотность  $\rho = 1900$  кг/м<sup>3</sup>.

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости ABCD вдоль оси Y;
- Нулевое перемещение плоскости BB'C'C вдоль оси Z;
- Нулевое перемещение ребра A'D' вдоль оси X;
- В точке  $M = (0, 0, 0)$  приложена сила величиной 100 кН, направленная вдоль оси X;
- Зависимость силы от времени по формуле Берлаге с амплитудой  $25e6$  м и циклической частотой 10 Гц. Примечание: так как в CAE Fidesys рассматривается четверть реальной модели, то следует амплитуду, используемые для реализации аналитического решения в математическом пакете, разделить на 4;
- Неотражающие ГУ в плоскостях AA'D'D, A'B'C'D', DCC'D', ABB'A';
- Вдоль линии действия силы присвоены приёмники по всем направлениям для каждого поля из выпадающего списка (перемещение, скорость, главные напряжения, давление).

Параметры сетки:

- Высота элемента первого блока  $h = 10$  м;
- Спектральные гексаэдры третьего порядка для первого блока;
- Высота элемента второго блока  $h = 9$  м;
- Спектральные гексаэдры четвертого порядка для первого блока.

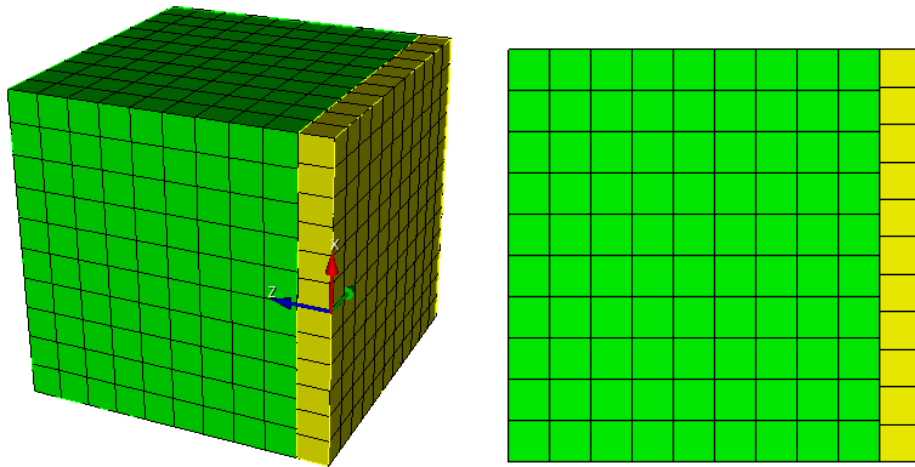


Рисунок 1.17 – Неконформная конечно-элементная сетка для задачи Стокса

Высота элемента была вычислена по формуле:

$$h = \frac{L(n+1)}{10},$$

где  $L = \frac{v}{\omega}$  - длина волны,  $v$  - скорость волны,  $\omega$  - циклическая частота волны,  $n$  - порядок элемента.

Настройки контакта:

- Тип: связанный;
- Точность 0.11;
- Метод: MPC.

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время – 0,4 с.;
- Максимальное количество шагов 50 000;
- Вывод каждого десятого шага в .vtu файл.

### ***Описание алгоритма аналитического решения***

Аналитическое решение представлено в разделе 1.7.

### ***Результаты расчета***

Значения перемещений проверяются в точке (20, 10, 20).



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки 32	Displacement X	м	5.384e-06	5.6025344 e-06	4.06
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки шаге 35	Displacement Y	м	4.785e-06	4.8302993e-06	0.95
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 35	Displacement Z	м	9.571e-06	9.436116e-06	1.41
4	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 48	Displacement X	м	1.842e-05	1.8606932e-05	1.01
5	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 49	Displacement Y	м	-7.33e-06	-7.227975e-06	1.39
6	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 48	Displacement Z	м	-1.466e-05	-1.4969539e-05	2.1
7	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 60	Displacement X	м	-1.024e-05	-1.038797e-05	1.45
8	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 60	Displacement Y	м	3.258e-06	3.27937e-06	0.66
9	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 60	Displacement Z	м	6.953e-06	7.1410599e-06	2.70
10	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 74	Displacement X	м	3.525e-06	3.6373034e-06	3.19
11	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 75	Displacement Y	м	-1.2e-06	-1.1761415e-06	1.99
12	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 74	Displacement Z	м	-2.272e-06	-2.2783822e-06	0.28

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 100 y 100 z 100
move Volume 1 x 0 y 50 z 50 include_merged
webcut volume 1 with plane zplane offset 10
move Volume 2 x 0 y 0 z -0.1 include_merged
partition create curve 6 position 0 0 0
```



```
volume 1 size 10
mesh volume 1
volume 2 size 9
mesh volume 2
create material 1
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e8
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1900
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 3 #fixed
block 2 add volume 2
block 2 material 1 cs 1 element solid order 4 #fixed
create displacement on curve 2 dof 1 fix 0
create displacement on surface 10 14 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create absorption on surface 1 8 9 11 13 15 16
create force on vertex 17 force value 1 direction 1 0 0
bcdep force 1 value 'berlage(25e6, 10, time)'
create contact master surface 7 slave surface 12 tolerance 0.11 type tied method auto
create receiver on curve 6 displacement 1 1 1
create receiver on curve 6 velocity 1 1 1
create receiver on curve 6 principalstress 1 1 1
create receiver on curve 6 pressure
analysis type dynamic elasticity dim3 preload off
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 0.4 maxsteps 50000
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 10
```

## 1.10. Контрольная задача №1.10

### Назначение контрольной задачи

Проверка корректности решения на основе метода спектральных элементов для решения задачи Лэмба, приведенной в разделе 1.6 на неконформной сетке с использованием условия жесткого контакта для соединения объемов вдоль внутреннего вспомогательного разреза. Результаты моделирования на неконформной сетке должны совпадать с результатами из раздела 1.6.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Длина  $a = 1000$  м;
- Ширина  $b = 500$  м;
- Модель разделена на два одинаковых по высоте слоя.

Граничные условия:

- Точечная сила задается с помощью формулы Берлаге:

$$f(t) = A \frac{\omega_1^2 e^{-\omega_1 t}}{4} \cdot \left( \sin(\omega_0 t) \left( -\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left( \frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right),$$
$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}, \omega_0 = 2\pi\omega,$$

где  $A$  - амплитуда ( $A=1e8$ ),  $\omega$  - частота ( $\omega=10$ ),  $t$  - время.

- На нижние и боковые грани приложены неотражающие условия.

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 2e+08$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 1900$ ;
- Когезия  $K = 29000$ ;
- Угол внутреннего трения  $\alpha = 20$ ;
- Угол дилатансии  $\beta = 10$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Спектральные элементы 3 порядка;
- Размер сетки для верхнего слоя  $size=7$ ;
- Размер сетки для нижнего слоя  $size=8$ .

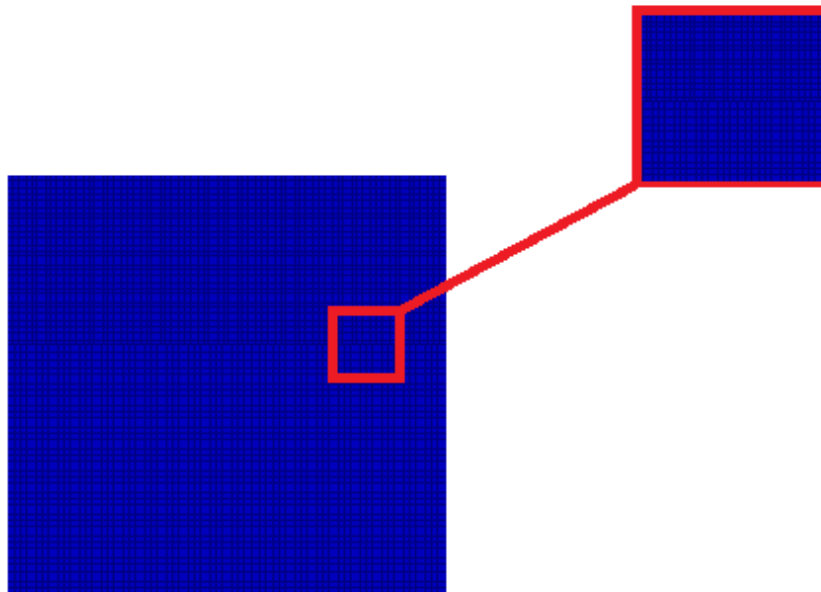


Рисунок 1.18 – Неконформная сетка из спектральных элементов для задачи Лэмба

Сетка должна быть из плоских четырехугольников, высота  $h = 500$  элемента рассчитывается в соответствии с длиной волны (см. пункт 1.9).

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время – 3 с;
- Максимальное количество шагов 2025;
- Вывод каждого 135 шага в .vtu файл.

### **Описание алгоритма аналитического решения**

Аналитическое решение приведено в разделе 1.6.

### **Результаты расчета**

Значения перемещений проверяются в точке (70.4225, 4.31214e-15, 0).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 6	Displacement X	м	-0.00110025	-0.0011002442	<<0.01
2	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 6	Displacement Y	м	0.000517095	0.00051707491	<<0.01





№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
3	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 8	Displacement X	м	-4.78016e-05	-4.77981576.e-05	<<0.01
4	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 8	Displacement Y	м	-0.000445372	-0.000445370783	<<0.01

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create surface rectangle width 1000 zplane
webcut body 1 with plane xplane offset 0
webcut body 1 with plane yplane offset 0
delete Surface 3
rotate Surface 4 5 angle -90 about Z include_merged
webcut body 3 1 with plane yplane offset -250
merge curve 18 25
merge curve 22 27
surface 9 7 size 7
mesh surface 9 7
surface 8 6 size 8
mesh surface 8 6
create material 1
modify material 1 name 'Material1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+08
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1900
modify material 1 set property 'COHESION' value 29000
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 20
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 10
create material 2
modify material 2 name 'Material2'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2e+08
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'DENSITY' value 1900
modify material 2 set property 'COHESION' value 29000
modify material 2 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 20
modify material 2 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 10
set duplicate block elements off
block 1 add surface 9 7
set duplicate block elements off
block 2 add surface 8 6
block 1 material 1
block 2 material 2
block 1 2 element plane order 3
create absorption on curve 28 24 13 15 19 21
create force on vertex 10 force value 1 direction 0 -1 0
bcdep force 1 value 'berlage(1e+8, 10, time)'
create receiver on curve 16 displacement 1 1 1
create receiver on curve 16 velocity 1 1 1
create receiver on curve 16 principalstress 1 1 1
create receiver on curve 16 pressure
create contact master curve 17 23 slave curve 20 26 tolerance 0.0005 type tied method auto
```



```
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off  
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 5 maxsteps 2025  
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 135
```

## 1.11. Контрольная задача №1.11

### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается двумерная задача о всестороннем растяжении плоской неограниченной пластины с круговым вырезом. Задача имеет аналитическое решение. Для случая поэтапного нагружения принимается во внимание, что в линейном случае результат не зависит от пути нагружения. Таким образом, нагрузка разбивается на 4 шага нагружения. В задаче проверяется корректность задания граничного условия давления для поэтапного нагружения.

### *Значения входных данных*

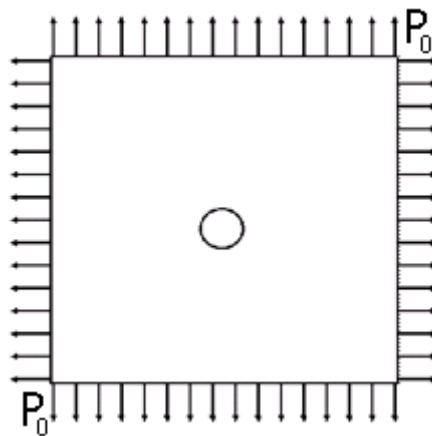


Рисунок 1.19 – Геометрическая модель для пластины с всесторонним растяжением

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/4 пластины;
- $BC = 5$  м;
- Диаметр отверстия 0.5 м;
- Используются полярные координаты.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси  $X$  на прямой  $AB$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Y$  на прямой  $ED$ ;
- $P_0 = 0.25$  МПа, 0.5 МПа, 0.75 МПа, 1МПа.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Сетки:

- 2D-четырёхугольные спектральные элементы третьего порядка;

- 2D-треугольные спектральные элементы третьего порядка.

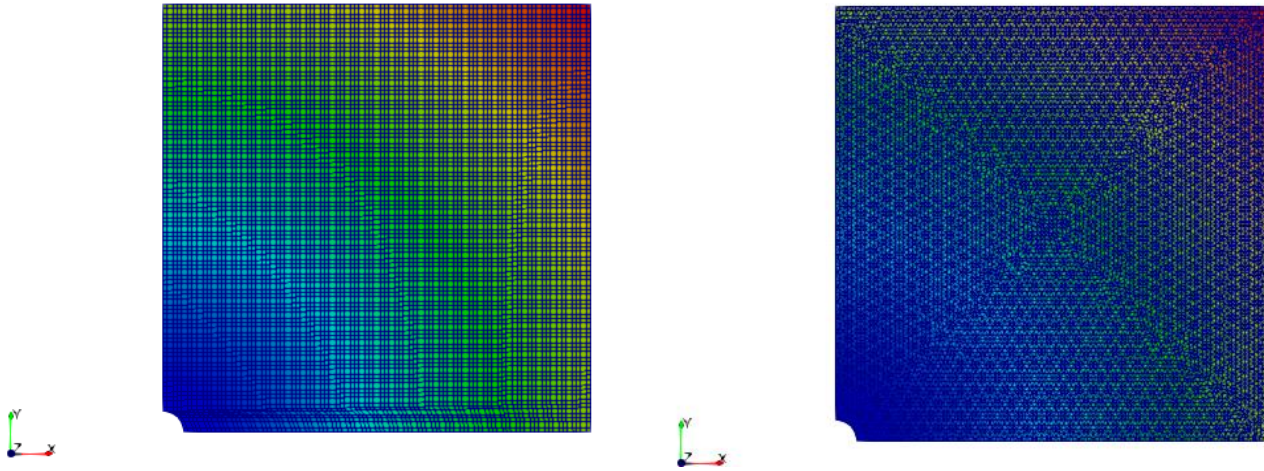


Рисунок 1.20 – Спектральные элементы

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по формуле:

$$\sigma_{\theta} = 2P_0.$$

Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г.

### Результаты расчета

Ниже приведено напряжение  $\sigma_{\theta}$  на границе вырезанной окружности на последнем шаге нагружения в точке (0.25,0,0).

Четырехугольные спектральные элементы третьего порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в полярных координатах	Stress FF	МПа	2	2.0022149	0.11
2	Номер шага	step	-	4	4	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
set node constraint on
create surface rectangle width 5 height 5 zplane
move surface 1 x 2.5 y 2.5
create surface circle radius 0.25 zplane
    
```



```

subtract body 2 from body 1
surface 3 size auto factor 2
surface 3 scheme auto
mesh surface 3
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add surface 3
block 1 material 1 cs 1 element plane order 3
create displacement on curve 7 dof 2 fix 0
create displacement on curve 8 dof 1 fix 0
create pressure on curve 1 4 magnitude 0
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 3 1 value 3
modify table 1 cell 4 1 value 4
modify table 1 cell 1 2 value -250000
modify table 1 cell 2 2 value -500000
modify table 1 cell 3 2 value -750000
modify table 1 cell 4 2 value -1e+06
bcdep pressure 1 table 1
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 4
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5

```

#### Треугольные спектральные элементы третьего порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в полярных координатах	Stress FF	МПа	2	1.9993749	0.03
2	Номер шага	step	-	4	4	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set node constraint on
create surface rectangle width 5 height 5 zplane
move surface 1 x 2.5 y 2.5

```



```
create surface circle radius 0.25 zplane
subtract body 2 from body 1
surface 3 size auto factor 2
surface 3 scheme trimesh geometry approximation angle 15
Trimesher surface gradation 1.3
Trimesher geometry sizing on
mesh surface 3
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add surface 3
block 1 material 1 cs 1 element plane order 3
create displacement on curve 7 dof 2 fix 0
create displacement on curve 8 dof 1 fix 0
create pressure on curve 1 4 magnitude 0
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 3 1 value 3
modify table 1 cell 4 1 value 4
modify table 1 cell 1 2 value -250000
modify table 1 cell 2 2 value -500000
modify table 1 cell 3 2 value -750000
modify table 1 cell 4 2 value -1e+06
bcdep pressure 1 table 1
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 4
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5
```

## 1.12. Контрольная задача №1.12

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о бесконечной цилиндрической трубе, находящейся под воздействием внутреннего и внешнего давлений. Для случая поэтапного нагружения принимается во внимание, что в линейном случае результат не зависит от пути нагружения. Таким образом, нагрузка разбивается на 2 шага нагружения. В задаче проверяется корректность задания нескольких граничных условий для поэтапного нагружения.

### Значения входных данных

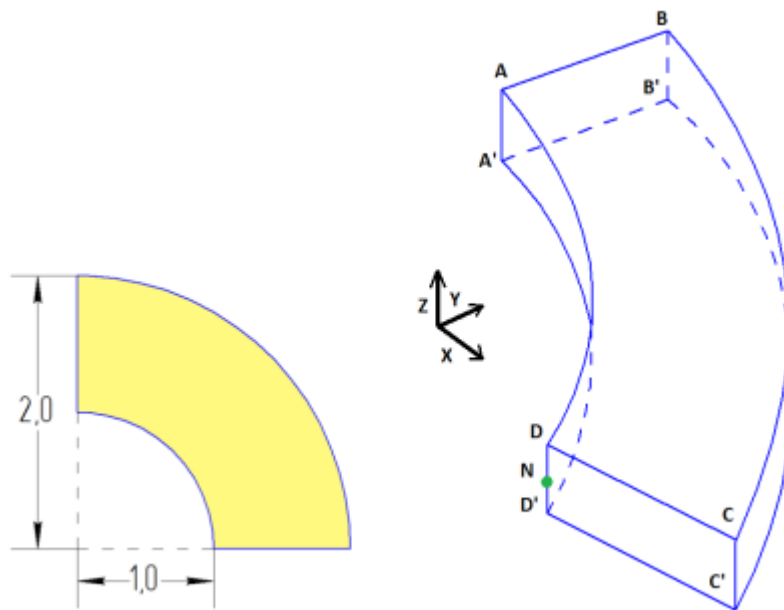


Рисунок 1.21 – Геометрическая модель задачи о бесконечной цилиндрической трубе.

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть широкого среза трубы;
- Толщина среза 0.5 м;
- Используется цилиндрическая система координат.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси  $X$  на поверхности  $ABB'A'$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Y$  на поверхности  $CDD'C'$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Z$  на поверхностях  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ ;
- Давление на поверхность  $AA'D'D$  величиной 0.5 МПа, 1 МПа;
- Давление на поверхность  $B'B'C'C$  величиной 0.25 МПа, 0.5 МПа.

Параметры материала:

- Изотропный;

- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Сетки:

- Спектральные гексаэдры третьего порядка;
- Спектральные тетраэдры третьего порядка.

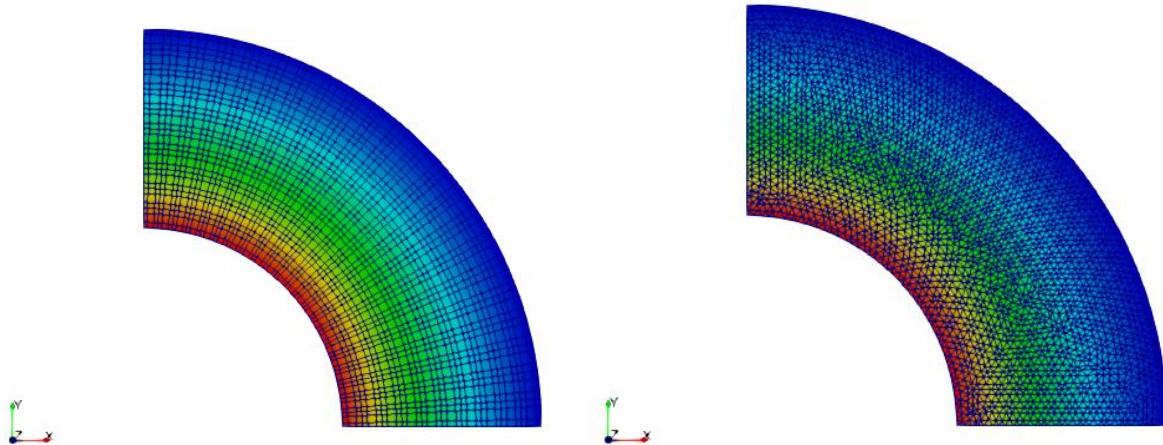


Рисунок 1.22 – Спектральные элементы

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по следующим формулам:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{11} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^2 \sigma_{22} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad \sigma_{zz} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г., 568 стр.

### Результаты расчета

Ниже приведены напряжения  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{zz}$  в точке N (1,0,0) на последнем шаге нагружения.

Спектральные гексаэдры третьего порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в цилиндрических координатах	Stress RR	МПа	-1	-0.999807813	0.02





2	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в цилиндрических координатах	Stress FF	МПа	0.33	0.333412094	1.03
3	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в цилиндрических координатах	Stress ZZ	МПа	-0.2	-0.199918719	0.04
4	Номер шага	step	-	2	2	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create Cylinder height 0.5 radius 2
create Cylinder height 0.5 radius 1
subtract volume 2 from volume 1
webcut volume 1 with plane xplane offset 0
webcut volume 1 3 with plane yplane offset 0
webcut volume 1 3 with plane yplane offset 0
delete volume 1 3 5
volume 4 size auto factor 5
volume 4 scheme auto
mesh volume 4
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add volume 4
block 1 material 1 cs 1 element solid order 3
create displacement on surface 11 dof 1 fix 0
create displacement on surface 27 dof 2 fix 0
create displacement on surface 31 29 dof 3 fix 0
create pressure on surface 30 magnitude 0
create pressure on surface 28 magnitude 0
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 1 2 value 500000
modify table 1 cell 2 2 value 1e+06
bcdep pressure 1 table 1
create table 2
modify table 2 dependency time
modify table 2 insert row 1
modify table 2 insert row 1
modify table 2 cell 1 1 value 1
modify table 2 cell 2 1 value 2
modify table 2 cell 1 2 value 250000
modify table 2 cell 2 2 value 500000
bcdep pressure 2 table 2
analysis type static elasticity dim3
static steps 2
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5
```



## Спектральные тетраэдры третьего порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в цилиндрических координатах	Stress RR	МПа	-1	-0.99999812	<<0.01
2	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в цилиндрических координатах	Stress FF	МПа	0.33	0.33332675	1.01
3	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в цилиндрических координатах	Stress ZZ	МПа	-0.2	-0.19999789	<<0.01
4	Номер шага	step	-	2	2	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create Cylinder height 0.5 radius 2
create Cylinder height 0.5 radius 1
subtract volume 2 from volume 1
webcut volume 1 with plane xplane offset 0
webcut volume 1 3 with plane yplane offset 0
webcut volume 1 3 with plane yplane offset 0
delete volume 1 3 5
volume 4 size auto factor 5
volume 4 scheme tetmesh proximity layers off geometry approximation angle 15
volume 4 tetmesh growth_factor 1
Trimesher surface gradation 1.3
Trimesher volume gradation 1.3
Trimesher geometry sizing on
mesh volume 4
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add volume 4
block 1 material 1 cs 1 element solid order 3
create displacement on surface 11 dof 1 fix 0
create displacement on surface 27 dof 2 fix 0
create displacement on surface 31 29 dof 3 fix 0
create pressure on surface 30 magnitude 0
create pressure on surface 28 magnitude 0
create table 1
```



```
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 1 2 value 500000
modify table 1 cell 2 2 value 1e+06
bcdep pressure 1 table 1
create table 2
modify table 2 dependency time
modify table 2 insert row 1
modify table 2 insert row 1
modify table 2 cell 1 1 value 1
modify table 2 cell 2 1 value 2
modify table 2 cell 1 2 value 250000
modify table 2 cell 2 2 value 500000
bcdep pressure 2 table 2
analysis type static elasticity dim3
static steps 2
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5
```

## 1.13. Контрольная задача №1.13

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается равномерное сжатие куба под действием перемещения. Для случая поэтапного нагружения принимается во внимание, что в линейном случае результат не зависит от пути нагружения. Таким образом, нагрузка разбивается на 2 шага нагружения. В задаче проверяется корректность задания граничного условия перемещение для поэтапного нагружения.

### Значения входных данных

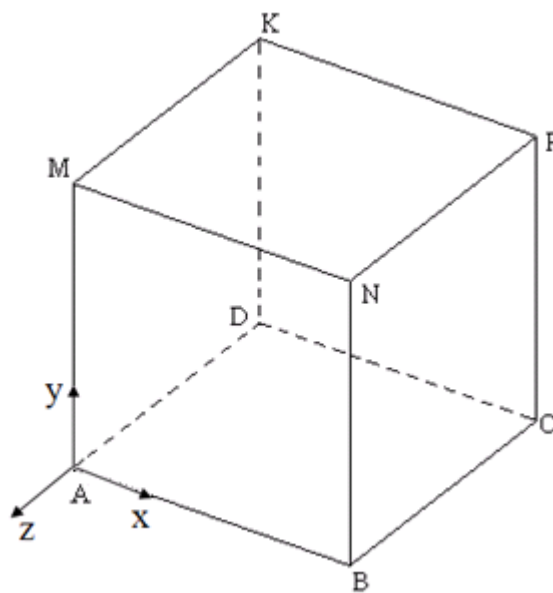


Рисунок 1.23 – Геометрическая модель задачи о равномерном сжатии куба

Геометрическая модель (размеры указаны в метрах):

- Куб со сторонами  $0 \leq x \leq 10$  м,  $0 \leq y \leq 10$  м,  $-10$  м  $\leq z \leq 0$ .

Граничные условия:

- Поверхность AMKD:  $u_x = 0$ ;
- Поверхность ADCB:  $u_y = 0$ ;
- Поверхность DKPC:  $u_z = 0$ ;
- Поверхность AMNB:  $u_z = -0.5$  м,  $-1$  м.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Сетки:

- Спектральные гексаэдры третьего порядка;

- Спектральные тетраэдры третьего порядка.

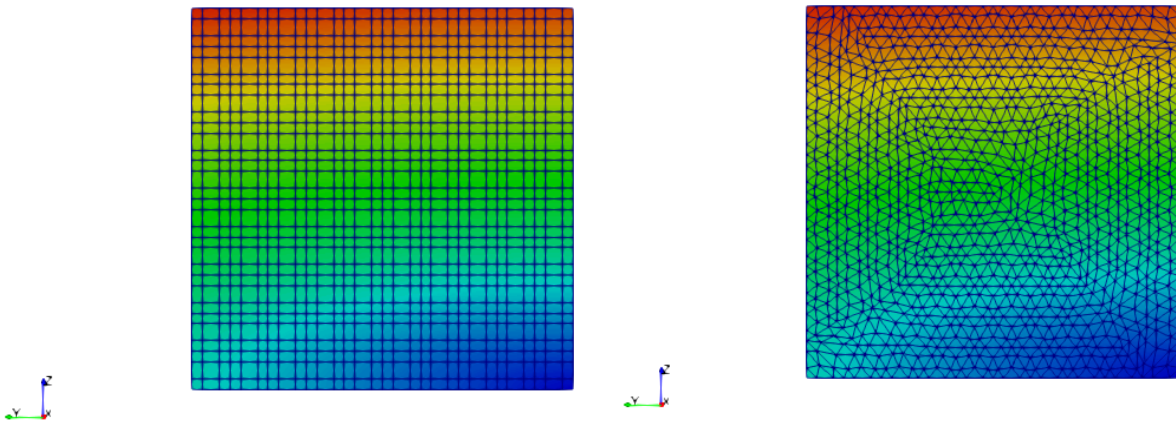


Рисунок 1.24 – Спектральные элементы

Настройки расчета:

- Статика;
- Упругость;
- Количество шагов нагружения: 2.

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{u_z}{L}; \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}; \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon_{zz} E; \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0; \\ u_z &= -1 \text{ м}; u_x = \frac{\varepsilon_{xx}}{L}; u_y = \frac{\varepsilon_{yy}}{L}. \end{aligned}$$

Где  $\sigma$  – тензор напряжения,  $\varepsilon$  – тензор деформаций,  $u$  – вектор перемещений,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $L$  – сторона куба.

Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г., 568 стр.

### Результаты расчета

Ниже приведены значения для перемещений, деформации и напряжений в точке с координатами (10,10,0) на последнем шаге нагружения.

Спектральные гексаэдры третьего порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Z	м	-1	-1	0



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
2	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement X	м	0.3	0.3	0
3	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Y	м	0.3	0.3	0
4	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain ZZ	-	-0.1	-0.1	0
5	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain XX	-	0.03	0.03	0
6	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain YY	-	0.03	0.03	0
7	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки	Stress ZZ	Па	-2e10	-2e10	0
8	Номер шага	step	-	2	2	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 10 y 10 z 10
move Volume 1 location 5 5 5 include_merged
rotate Volume 1 angle 180 about Y include_merged
rotate Volume 1 angle -90 about Y include_merged
volume 1 size auto factor 5
volume 1 scheme auto
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 3
create displacement on surface 2 dof 1 fix 0
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 6 dof 3 fix 0
create displacement on surface 4 dof 3 fix 1
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 1 2 value -0.5
modify table 1 cell 2 2 value -1
bcdep displacement 4 table 1
```



analysis type static elasticity dim3

static steps 2

nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5

Спектральные тетраэдры третьего порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Z	м	-1	-1	0
2	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement X	м	0.3	0.3	0
3	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Y	м	0.3	0.3	0
4	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain ZZ	-	-0.1	-0.1	0
5	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain XX	-	0.03	0.03	0
6	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain YY	-	0.03	0.03	0
7	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки	Stress ZZ	Па	-2e10	-2e10	0
8	Номер шага	step	-	2	2	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 10 y 10 z 10
move Volume 1 location 5 5 5 include_merged
rotate Volume 1 angle 180 about Y include_merged
rotate Volume 1 angle -90 about Y include_merged
volume 1 size auto factor 5
volume 1 scheme tetmesh proximity layers off geometry approximation angle 15
volume 1 tetmesh growth_factor 1
Trimesher surface gradation 1.3
Trimesher volume gradation 1.3
Trimesher geometry sizing on
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3

```



```
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 3
create displacement on surface 2 dof 1 fix 0
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 6 dof 3 fix 0
create displacement on surface 4 dof 3 fix 1
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 2 1 value 1
modify table 1 cell 3 1 value 2
modify table 1 cell 2 2 value -0.5
modify table 1 cell 3 2 value -1
bcdep displacement 4 table 1
analysis type static elasticity dim3
static steps 2
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5
```



## 1.14. Контрольная задача №1.14

### *Назначение контрольной задачи*

Однородное сжатие сжатие куба. Сам куб разделен на 13 частей, между которыми установлены условия связанного контакта с различными величинами зазоров. Задача проверяет отсутствие точечных концентраторов для значения поля напряжений.

### *Значения входных данных модуля*

Геометрическая модель:

- Куб со сторонами  $0 \leq x \leq 10 \text{ m}$ ,  $0 \leq y \leq 10 \text{ m}$ ,  $-10 \text{ m} \leq z \leq 0$ .

Граничные условия:

- Условия симметрии;
- На верхнюю грань куба действует давление  $1 \text{e}6 \text{ Па}$ ;
- Поверхности контакта: Автовыбор;
- Точность контакта  $0.0005$ ;
- Тип контакта: связанный.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200 \text{ ГПа}$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Сетки:

- Спектральные элементы третьего порядка;
- Неконформные сетки;

Геометрия и конечно-элементная сетка для данной задачи строится при помощи скрипта CAE Fidesys, приведенного ниже.

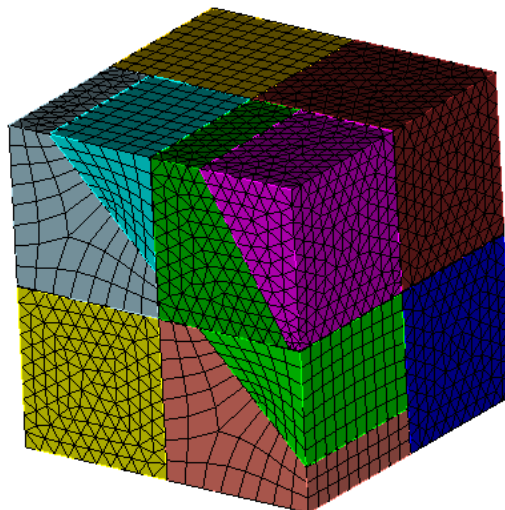


Рисунок 1.25 – Конечно-элементная сетка на модели куба, состоящего из 13 частей

Настройки расчета:

- Статика;
- Упругость.

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Диапазон изменений
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений	Stress YY	Па	От -1000000.0 до 1000000.0

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по следующим формулам:

$$\sigma_{yy} = P; \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0.$$

Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г., 568 стр.

### Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Диапазон изменений	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений	Stress YY	Па	От -1000000.0 до 1000000.0	От -1000000.0 до 1000000.0	0.00 и 0.00

Распределение поля напряжений Мизес представлено на рисунке 1.26.

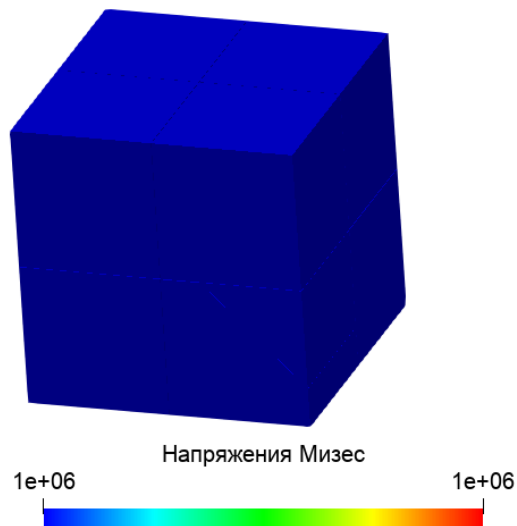




Рисунок 1.26 – Распределение Напряжения (Мизес)

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
brick x 10
webcut body 1 with plane xplane offset 0
webcut body all with plane yplane offset 0
webcut volume all with plane zplane offset 0
webcut volume 4 with plane xplane offset 1 rotate 45 about z center 0 0 0
webcut volume 3 with plane xplane offset 4 rotate 30 about z center 0 0 0
webcut volume 1 with plane xplane offset 1 rotate 45 about z center 0 0 0
webcut volume 7 with plane xplane offset 2.5 rotate 45 about z center 0 0 0
webcut volume 6 with plane xplane offset -4 rotate 45 about z center 0 0 0
move Volume 3 10 1 11 7 5 12 x 0.01 include_merged
move Volume 7 5 z -0.01 include_merged
move Volume 10 3 1 11 z 0.01 include_merged
move Volume 8 6 13 4 9 2 x -0.01 include_merged
move Volume 8 6 13 z -0.01 include_merged
move Volume 4 9 2 z 0.01 include_merged
move Volume 4 3 10 9 7 8 y 0.01 include_merged
move Volume 2 11 1 13 6 5 y -0.01 include_merged
move Volume 4 3 y 0.01 include_merged
move Volume 11 y -0.01 include_merged
move Volume 13 y -0.01 include_merged
move Volume 7 y 0.02 include_merged
move Volume 3 4 y -0.01
move Volume 12 z -0.01
webcut volume all with plane from surface 48
webcut volume all with plane from surface 91
delete Volume 14 15 16
surface 95 89 42 21 84 85 75 scheme polyhedron
surface 95 89 42 21 84 85 75 size 0.95 #order,quality: 1,0.4 ; 2,0.95 ; 3,1.5
mesh surface 95 89 42 21 84 85 75
surface 76 scheme trimesh geometry approximation angle 15
surface 76 size 0.95 #order,quality: 1,0.6 ; 2,0.9; 3,1.35
Trimesher surface gradation 1.3
mesh surface 76
volume 4 6 12 1 11 scheme polyhedron
volume 1 12 size 0.9 #order,quality: 1,0.65 ; 2,0.9; 3,1.4
volume 6 11 size 0.95 #order,quality: 1,0.6 ; 2,0.9; 3,1.35
mesh volume 4 6 12 1 11
#cube2 tetra
volume 2 3 10 5 9 7 13 scheme tetmesh proximity layers off
volume 2 3 5 7 13 10 size 0.9 #order,quality: 1,0.6 ; 2,0.9; 3,1.3
volume 9 size 0.95 #order,quality: 1,0.65 ; 2,0.9; 3,1.45
Trimesher geometry sizing on
mesh volume 2 3 10 5 9 7 13
volume 8 redistribute nodes off
volume 8 scheme Sweep source surface 76 target surface 73 sweep transform least squares
volume 8 autosmooth target on fixed imprints off smart smooth off
```



```
volume 8 size 0.9 #order,quality: 1,0.5 ; 2,0.9; 3,1.25
mesh volume 8
create material 1 name "LinearMat"
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
block 1 add volume all
block 1 material 1
block 1 element solid order 2
create displacement on surface 76 69 51 138 119 dof 1 fix
create displacement on surface 137 48 121 46 127 dof 2 fix 0
create displacement on surface 150 115 35 21 118 141 dof 3 fix 0
create pressure on surface 83 81 93 91 147 75 magnitude 1e6
create contact master surface 101 103 slave surface 95 89 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 50 slave surface 70 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 74 slave surface 54 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 113 111 slave surface 44 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 131 slave surface 49 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 47 slave surface 139 120 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 55 slave surface 43 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 42 slave surface 100 130 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 59 slave surface 79 86 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 84 80 slave surface 72 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 73 slave surface 116 149 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 148 114 slave surface 90 94 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 102 slave surface 97 tolerance 0.1 type tied method auto #vol 11 (hex) & vol 1 (hex)
create contact master surface 92 slave surface 87 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 82 slave surface 77 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 140 slave surface 117 tolerance 0.1 type tied method auto
create contact master surface 112 slave surface 107 tolerance 0.1 type tied method auto
analysis type static elasticity dim3
```

## 1.15. Контрольная задача №1.15

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача интеграции CAE Fidesys с программным комплексом Euler с помощью модели этажерки.

### Значения входных данных

Геометрическая модель представлена на рисунке 1.27:

- Объем 1 – прямоугольный параллелепипед с габаритами 0.01x0.01x0.005 м по осям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  соответственно (ограничивающие объем 1 поверхности параллельны координатным плоскостям);
- Поверхность 3 моделирует пластину толщиной 0.005 м, срединная поверхность которой - квадрат 0.01x0.01 м. Поверхность 3 параллельна плоскости  $Oxy$ . Пластина аналогична объему 1, но моделируется оболочечными элементами;
- Линии 2 – балки длиной 0.0275 м с квадратным сечением 0.001x0.001 м, соединяют объем 1 и поверхность 3 и ортогональны к ним.

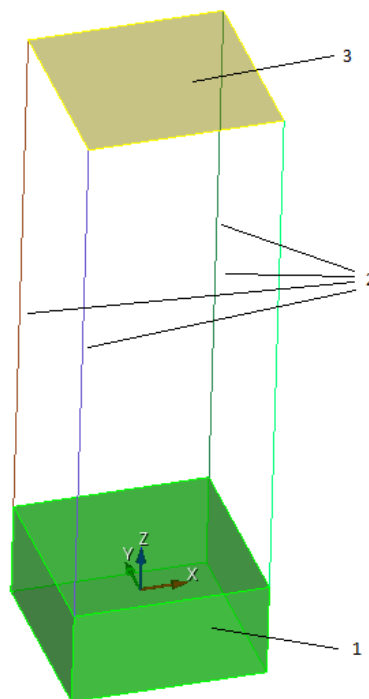


Рисунок 1.27 – Представление геометрии модели

Граничные условия:

- Поскольку рассматривается задача автомеханики, проводится серия расчетов. При этом ограничения перемещений накладываются на вершины нижней по оси  $Oz$  поверхности объема 1.

Параметры материала для объема 1:

- Модуль упругости  $E_1 = 72000$  Па;



- Коэффициент Пуассона  $\nu_1 = 0.3$ ;
- Плотность  $r_1 = 2800$  кг/м<sup>3</sup>.

Параметры материала для пластины 2 и балок 3:

- Модуль упругости  $E_2 = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu_2 = 0.3$ ;
- Плотность  $r_2 = 8000$  кг/м<sup>3</sup>.

Построение конечно-элементной сетки:

- Сетка, включающая гексаэдральные, четырехугольные оболочечные и балочные элементы.

Вид расчета:

- Автомеханика с параметрами по умолчанию.

### Ожидаемые результаты

Как следует из аналитических представлений [1], в результате выполнения расчета автомеханики должны быть получены матрицы жесткости  $K$ , масс  $M$ , а также собственные формы колебаний модели  $E$ , являющиеся входными параметрами для программного комплекса Euler. При этом корректность данных матриц следует из выполнения условий:  $E^T \cdot K \cdot E$  - диагональная матрица,  $E^T \cdot M \cdot E$  - единичная матрица. Отсюда эталонными результатами для задачи являются параметры, указанные в таблице:

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Произведение $E^T \cdot K \cdot E$	-	-	Диагональная матрица
2	Произведение $E^T \cdot M \cdot E$	-	-	Единичная матрица

Список литературы

[1] В. Г. Бойков, И. В. Гаганов, Ф. Р. Файзуллин, А. А. Юдаков, «Моделирование движения механической системы, состоящей из деформируемых упругих тел, путём интеграции двух пакетов: EULER и Fidesys», Чебышевский сб., 18:3 (2017), 131–153.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Произведение $E^T \cdot K \cdot E$	-	Диагональная матрица	diagonal	0
2	Произведение $E^T \cdot M \cdot E$	-	Единичная матрица	identity (E)	0



Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
{h=0.01}
reset
set default element hex
brick x {h} y {h} z {h/2}
#move volume 1 x {h/2} y {h/2} z {h/2}
create surface rectangle width {h} zplane
move body 2 z {3*h}
create curve vertex 1 12
create curve vertex 4 11
create curve vertex 3 10
create curve vertex 2 9
merge all
curve all size {h}
mesh curve all
mesh surface all
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'mat_bottom'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 7.2e+4
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 2800
create material 2
modify material 2 name 'mat'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'DENSITY' value 8000
block 1 add volume 1
block 1 material 1
block 1 element solid order 2
block 2 add surface 7
block 2 element shell order 2
block 2 material 2
create shell properties 2
modify shell properties 2 thickness {h/2}
modify shell properties 2 eccentricity 0.5
block 2 shell properties 2
block 3 add curve 17 to 20
block 3 material 2
block 3 element beam order 2
create beam properties 3
modify beam properties 3 type 'Rectangle'
modify beam properties 3 ey 0.0
modify beam properties 3 ez 0.0
modify beam properties 3 angle 0.0
modify beam properties 3 mesh_quality 6
modify beam properties 3 warping_dof off
modify beam properties 3 geom_H {h/10}
modify beam properties 3 geom_B {h/10}
block 3 beam properties 3
nodeset 1 add vertex 5 6 7 8
analysis type automechanics dim3 preload off
eigenvalue find 10 smallest
```



## 1.16. Контрольная задача №1.16

### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для ортогонально армированного композита.

### *Значения входных данных*

Параметры материала:

Материал матрицы:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Материал нити:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Два куба 16 x 16 x 16, лежащих друг на друге по оси Z;
- По центру вдоль одного проходит нить длиной 16 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%) параллельно оси X, вдоль другого - параллельно оси Y;
- Нить:  $\lambda = 10$ ;
- Матрица:  $\lambda = 2$ .

Граничные условия:

- Периодические.
- Тетраэдры первого порядка.



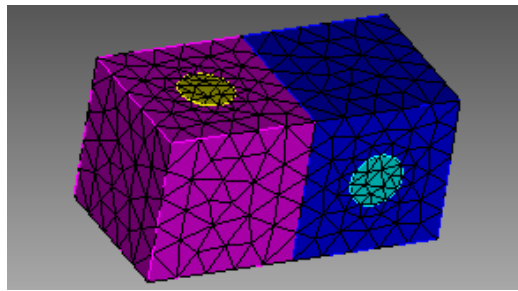


Рисунок 1.28 – Сетка 3D - тетраэдры

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.54285
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.54285
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.286

### Описание алгоритма аналитического решения

Ортогонально армированным называется композит, в котором на одно волокно, направленное вдоль оси Y, приходится k волокон, направленных вдоль оси X. Аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы". Коэффициент теплопроводности таких композитов в направлении X определяется по формуле:

$$\lambda_x^{ort} = \lambda_x \frac{k}{k+1} + \frac{\lambda_y}{k+1} = \frac{1}{k+1} (\lambda_x k + \lambda_y)$$

в направлении Y – формулой

$$\lambda_y^{ort} = \frac{\lambda_x}{k+1} + \lambda_y \frac{k}{k+1} = \frac{1}{k+1} (\lambda_x + \lambda_y k)$$

Здесь  $\lambda_x, \lambda_y$  определяются формулами для волокнистого материала.

При одинаковом количестве волокон в направлениях X и Y

$$\lambda_x^{ort} = \lambda_y^{ort} = \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2}$$

Граничные условия - строго периодические.

### Результаты

Гексаэдральная сетка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %



1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{Вт}{м * К}$	2.54285	2.53422	0.34
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{Вт}{м * К}$	2.54285	2.53092	0.47
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{Вт}{м * К}$	2.286	2.29168	0.26

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
#{length = 16.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt( 0.01 * pitch * thick * conc / 3.1415926 )}
#{size = 3.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
move volume all z {-thick/2.0} include_merged
volume all move z {thick} copy
rotate volume 2 3 angle 90 about z include_merged
imprint volume all
merge volume all
volume all scheme Tetmesh
volume all size {size}
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 10
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 1
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 2
block 1 volume 2 4
block 2 volume 3 5
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block 1 2 element solid order 1
analysis type effectiveprops heattrans dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 1.17. Контрольная задача №1.17

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных

Параметры материала:

Материал матрицы:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Материал нити:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 1 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности =  $10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Прямоугольный параллелепипед 4 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);
- Нить:  $\lambda = 10$ ;
- Матрица:  $\lambda = 2$ .

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Тетраэдры первого порядка.

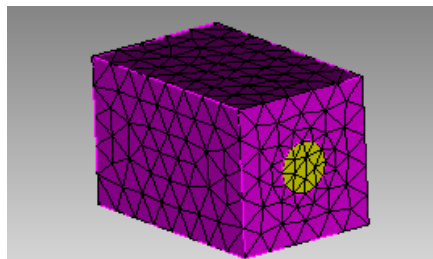


Рисунок 1.29 – Сетка 3D – тетраэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.8
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571

## Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы". Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f$ ,  $\lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f$ ,  $\gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

Тетраэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.8	2.773	-0.97%
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571	2.2829	-0.12%
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571	2.2917	0.26%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt( 0.01 * pitch * thick * conc / 3.1415926)}
```



```
#{size = 3.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
volume all scheme Tetmesh
volume all size {size}
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 10
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 1
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 2
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block 1 2 element solid order 1
analysis type effectiveprops heattrans dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 1.18. Контрольная задача №1.18

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных

Параметры материала:

Материал матрицы:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 2 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.3;
- Коэффициент теплопроводности =  $7.7 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .

Материал нити:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 2000 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.2;
- Коэффициент теплопроводности =  $1.3 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .

Геометрическая модель:

- Прямоугольный параллелепипед 25 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

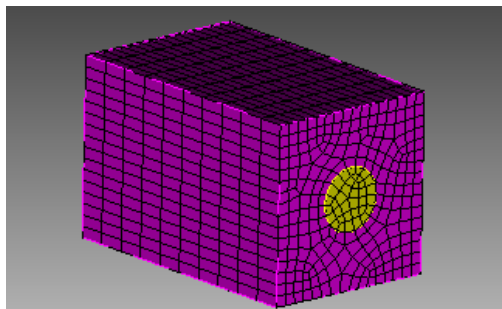


Рисунок 1.30 – Сетка 3D - гексаэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$1.35709 * 10^{-5}$
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$

## Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы". Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f, \lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

Гексаэдральная сетка второго порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	$1.35709 * 10^{-5}$	$1.358 * 10^{-5}$	0.05%
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$	$8.308 * 10^{-5}$	3.27%
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} * \text{К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$	$8.477 * 10^{-5}$	1.31%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
```



```
{conc = 10} # cord concentration, percents
{rad = sqrt( 0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
{size = 1.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
volume all size {size}
curve 18 20 22 24 interval 10
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2000
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.2
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1.3e-5
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 7.7e-5
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block all element solid order 2
analysis type effectiveprops heatexpansion dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.



## 1.19. Контрольная задача №1.19

### Назначение контрольной задачи

В предлагаемой задаче моделируется бесконечное пространство, заполненное однородной изотропной упругой средой, в которой действует сосредоточенная сила, приложенная в точке и действующая по закону Берлаге (задача Стокса [1]). Считается, что источник точечный, то есть он мал по сравнению с расстоянием до приемника и так же мал по сравнению с характерными размерами пространства. Задача имеет аналитическое решение.

### Значения входных данных

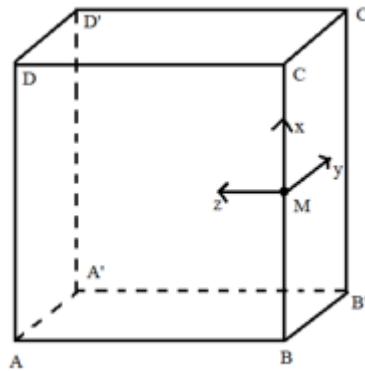


Рисунок 1.31 – Геометрическая модель задачи Стокса

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e8$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 1900$  кг/м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель:

- Куб  $100 \times 100 \times 100$  м;
- Геометрию переместили к координатам  $(0, 50, 50)$ , чтобы  $M = (0, 0, 0)$ .

Граничные условия:

- Нулевое перемещение плоскости ABCD вдоль оси Y;
- Нулевое перемещение плоскости BB'C'C вдоль оси Z;
- Нулевое перемещение ребра A'D' вдоль оси X;
- В точке  $M = (0, 0, 0)$  приложена сила величиной 100 кН, направленная вдоль оси X;
- Зависимость силы от времени по формуле Берлаге с амплитудой  $25e6$  м и циклической частотой 10 Гц. Примечание: так как в CAE Fidesys рассматривается четверть реальной модели, то следует амплитуду, используемые для реализации аналитического решения в математическом пакете,

разделить на 4;

- Неотражающие ГУ в плоскостях AA'D'D, A'B'C'D', DCC'D', ABB'A';
- Вдоль линии действия силы к узлам присвоены приёмники по всем направлениям для каждого поля из выпадающего списка (перемещение, скорость, главные напряжения, давление).

Сетка:

- Высота элемента первого блока  $h = 10$  м;
- Высота элемента второго блока  $h = 9$  м;
- Спектральные гексаэдры седьмого порядка

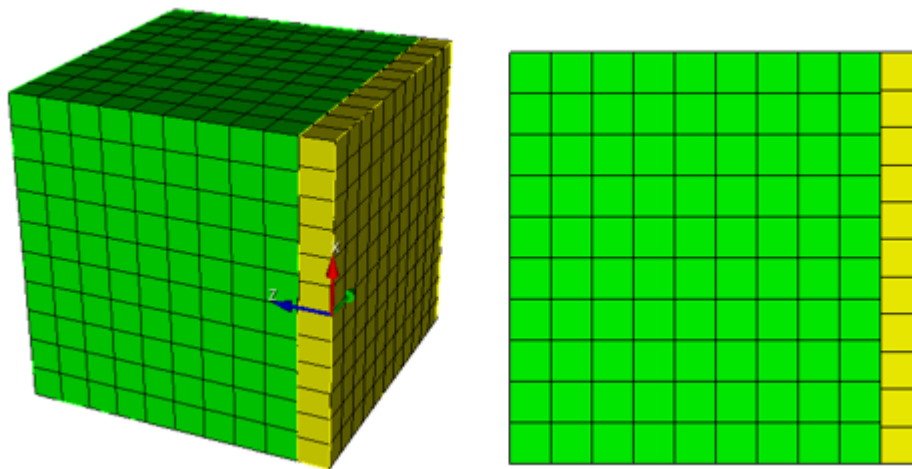


Рисунок 1.32 – Неконформная конечно-элементная сетка для задачи Стокса

### **Ожидаемые результаты**

Значения перемещений проверяются в точке (20, 10, 20).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.13	Displacement X	м	5.308e-06
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.144	Displacement Y	м	4.79e-06
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.144	Displacement Z	м	9.581e-06
4	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.199	Displacement X	м	1.843e-05



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
5	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.206	Displacement Y	м	-7.416e-06
6	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.2033	Displacement Z	м	-1.5e-05
7	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.249	Displacement X	м	-1.027e-05
8	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.2532	Displacement Y	м	3.563e-06
9	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.2532	Displacement Z	м	7.125e-06
10	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.299	Displacement X	м	3.536e-06
11	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.3	Displacement Y	м	-1.1e-06
12	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на шаге 0.303	Displacement Z	м	-2.328e-06

### Описание алгоритма аналитического решения

Пусть на бесконечное пространство, заполненное однородной изотропной упругой средой, действует сосредоточенная сила, приложенная в точке  $(x_0, y_0, z_0)$  и направленная вдоль определенной оси  $x_j$ . Пусть по величине эта сила равна нулю при  $t < 0$  и  $X_0(t)$  при  $t > 0$ . Соответствующий такой силе вектор упругих смещений  $u_i(x, t)$  определяется следующими формулами Стокса [1]:

$$u_i(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_i\gamma_j \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_i\gamma_j - \delta_{ij}) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}),$$

где

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $\gamma_i = \frac{x_i}{r}$  – направляющие косинусы,  $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  – скорость

продольной волны,  $\beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$  – скорость поперечной волны,  $\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$ ,  $\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$  –

константы Ламе,  $\rho$  – плотность среды, в которой распространяется волны.

Символ Кронекера  $\delta_{ij}$  интерпретируется следующим образом:

$$\delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j,$$

$$\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j.$$

Сила приложена вдоль оси  $x$  и распространяется по закону Берлаге. Экспериментальным путем установлено, что распространение упругих волн в земной коре качественно описываются при задании нагрузки законом Берлаге [2]:

$$X_0(t) = A \cdot \omega_1^2 e^{-\omega_1 t} \cdot \left( \sin(\omega_0 t) \left( \frac{-t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left( \frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right),$$

$$\omega_0 = 2\pi\omega, \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}},$$

здесь  $A$  – амплитуда колебаний,  $\omega$  – циклическая частота колебаний.

Проведя анализ всех коэффициентов в формуле Стокса, перепишем её более конкретно под нашу постановку:

$$u_x(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_x\gamma_x - 1) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_x\gamma_x \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_x\gamma_x - 1) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}),$$

$$u_y(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_y\gamma_x - 0) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_y\gamma_x \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_y\gamma_x - 0) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}),$$

$$u_z(x, t) = \frac{1}{4\pi\rho} (3\gamma_z\gamma_x - 0) \frac{1}{r^3} \int_{\frac{r}{\alpha}}^{\frac{r}{\beta}} \tau X_0(t - \tau) d\tau + \frac{1}{4\pi\rho\alpha^2} \gamma_z\gamma_x \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\alpha}) -$$

$$- \frac{1}{4\pi\rho\beta^2} (\gamma_z\gamma_x - 0) \frac{1}{r} X_0(t - \frac{r}{\beta}).$$

Таким образом, входными данными для реализации аналитического решения задачи Стокса в математических пакетах являются:  $A$ ,  $\omega$ ,  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$



## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.136	Displacement X	м	5.328e-06	5.54992e-06	3.08
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.144	Displacement Y	м	4.79e-06	4.85984e-06	1.56
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.144	Displacement Z	м	9.58e-06	9.43758e-06	1.39
4	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.2	Displacement X	м	1.841e-05	1.87276e-05	1.67
5	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.2	Displacement Y	м	-7.33e-06	-7.20336e-06	1.73
6	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.2	Displacement Z	м	-1.466e-05	-1.52926e-05	4.32
7	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.248	Displacement X	м	-1.025e-05	-1.05004e-05	2.54
8	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.256	Displacement Y	м	3.51e-06	3.28308e-06	0.77
9	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки на временном шаге 0.256	Displacement Z	м	7.021e-06	6.99676e-06	0.63

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 100 y 100 z 100
move Volume 1 x 0 y 50 z 50 include_merged
webcut volume 1 with plane zplane offset 10
move Volume 2 x 0 y 0 z -0.1 include_merged
partition create curve 6 position 0 0 0
volume 1 size 10
mesh volume 1
volume 2 size 9
mesh volume 2
create material 1
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e8
```



```
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1900
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 4 #fixed
block 2 add volume 2
block 2 material 1 cs 1 element solid order 4 #fixed
create displacement on curve 2 dof 1 fix 0
create displacement on surface 10 14 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create absorption on surface 1 8 9 11 13 15 16
create force on vertex 17 force value 1 direction 1 0 0
bcdep force 1 value 'berlage(25e6, 10, time)'
create contact master surface 7 slave surface 12 tolerance 0.11 type tied method auto
analysis type dynamic elasticity dim3 preload off
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 0.4 maxsteps 50000
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 10
```

#### Список литературы

- [1] Аки К. Количественная сейсмология/ Ричардс П. — М.: Мир, т. 1, 1983. — 880 с.
- [2] Geophysics, vol. 55, no. 11, november 1990. — P. 1508-1511, 2 figs.

## 1.20. Контрольная задача №1.20

### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается двумерная задача о всестороннем растяжении плоской неограниченной пластины с круговым вырезом. Задача имеет аналитическое решение. Для случая поэтапного нагружения принимается во внимание, что в линейном случае результат не зависит от пути нагружения. Таким образом, нагрузка разбивается на 6 шагов нагружения. В задаче проверяется корректность задания граничного условия давления для поэтапного нагружения.

### *Значения входных данных*

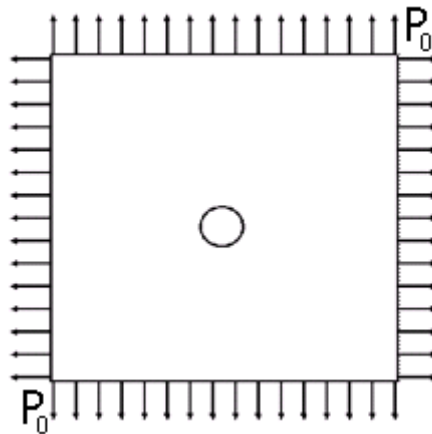


Рисунок 1.33 – Геометрическая модель для пластины с всесторонним растяжением

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/4 пластины;
- Сторона пластины 10 м;
- Диаметр отверстия 0.5 м;
- Используются полярные координаты.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси  $X$  на прямой  $AB$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Y$  на прямой  $ED$ ;
- $P_0 = 0.1$  МПа, 0.25 МПа, 0.5 МПа, 0.75 МПа, 0.9 МПа, 1 МПа.

Сетка:

- 2D-четырёхугольные спектральные элементы третьего порядка

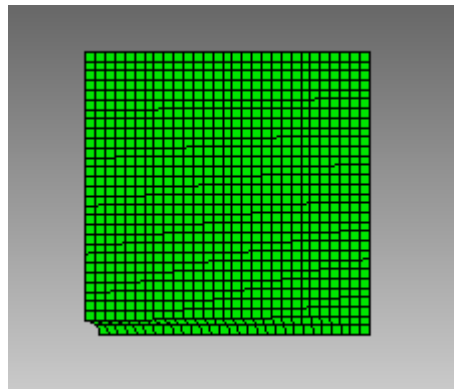


Рисунок 1.34 – Сетка 2D - четырехугольные спектральные элементы

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в полярных координатах	Stress FF	МПа	2
2	Номер шага	step	-	6

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по формуле [1]:

$$\sigma_{\theta} = 2P_0.$$

### Результаты

Четырехугольные спектральные элементы

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки в полярных координатах	Stress FF	МПа	2	2	0.00
2	Номер шага	step	-	6	6	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
set node constraint on
create surface rectangle width 5 height 5 zplane
move surface 1 x 2.5 y 2.5
create surface circle radius 0.25 zplane
subtract body 2 from body 1
surface 3 size auto factor 2
surface 3 scheme auto
    
```





```
mesh surface 3
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add surface 3
block 1 material 1 cs 1 element plane order 3
create displacement on curve 7 dof 2 fix 0
create displacement on curve 8 dof 1 fix 0
create pressure on curve 1 4 magnitude 0
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 3 1 value 3
modify table 1 cell 4 1 value 4
modify table 1 cell 5 1 value 5
modify table 1 cell 6 1 value 6
modify table 1 cell 1 2 value -100000
modify table 1 cell 2 2 value -250000
modify table 1 cell 3 2 value -500000
modify table 1 cell 4 2 value -750000
modify table 1 cell 5 2 value -950000
modify table 1 cell 6 2 value -1e+06
bcdep pressure 1 table 1
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 6
```

#### Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г.

## 1.21. Контрольная задача №1.21

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача распределение напряжений в окрестности вертикальной скважины радиуса  $R_w$ , пробуренной на глубину  $h$ . Пласт считается изотропным, однородным. Задача имеет аналитическое решение [1]. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- расчет порового давления среды;
- учёт пластических свойств материала при расчете напряженно-деформированного состояния среды;
- критерий пластичности Друкера-Прагера с симметричным упрочнением;
- нелинейной модели для расчета механической прочности;

полей вывода Перемещений, Напряжений, Упругих деформаций, Пластических деформаций с учетом возникновения пластичности.

### Значения входных данных

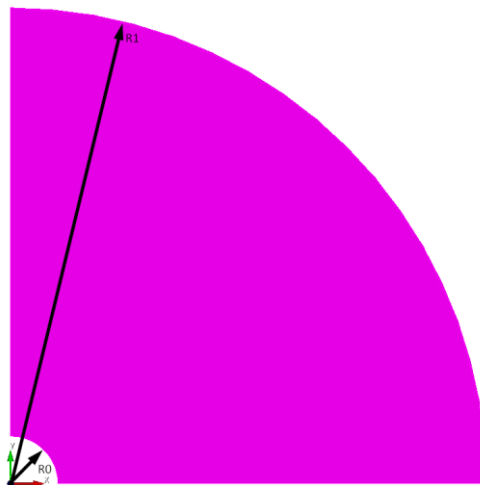


Рисунок 1.35 – Геометрическая модель

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается 1/4 пластины;
- $R_1 = 10, R_2 = 1$ ;
- В аналитическом решении используются полярные координаты

Граничные условия:

- Давление на скважине  $p = 4e7$ ;
- Давление на удалении  $p = 8e7$ ;
- Закрепление из условий симметрии;
- Поровое давление  $p = 4e7$ .

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E=1e9$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu=0.25$ ;

- Коэффициент К=5.43712e+6;
- Угол внутреннего трения  $\alpha=21.43$ ;
- Угол дилатансии  $\beta=21.43$ ;
- Пористость = 0.25;
- Проницаемость =  $1e-12$ ;
- Вязкость жидкости = 0.005;
- Число Био = 1;
- Модуль упругости жидкости =  $1e9$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры второго порядка.

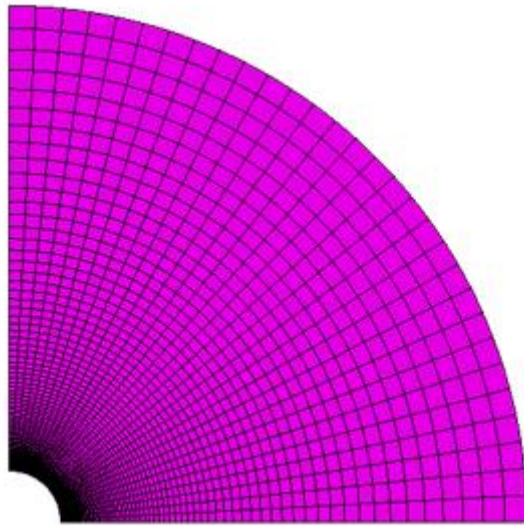


Рисунок 1.36 – Спектральные элементы 3 порядка для задачи Лэмба

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время – 3 с;
- Максимальное количество шагов 2025;
- Вывод каждого 135 шага в .vtu файл.

### ***Ожидаемые результаты***

Ожидаемые результаты получены из аналитического решения, приведенного ниже, и приведены совместно с результатами расчета.

### ***Описание алгоритма аналитического решения***

Верификация численной пороупругопластической модели CAE Fidesys основана на аналитическом решении, рассмотренной в п. 1 работы [1].



Изучается распределение напряжений в окрестности вертикальной скважины радиуса  $R_w$ , пробуренной на глубину  $h$ . Пласт считается изотропным, однородным.

Задача решается в цилиндрической системе координат.

Исходное напряженное состояние пласта рассматривается как состояние всестороннего сжатия горным давлением  $Q = -\gamma h$ , где  $\gamma$  - средний удельный вес вышележащих пород.

В работе предполагается, что коэффициент Био равен 1,  $p_0$  - начальное пластовое давление фильтрующейся жидкости. Тогда исходные эффективные напряжения определяются выражениями

$$S_r^0 = S_\theta^0 = S_z^0 = Q + p_0$$

а полные напряжения

$$\sigma_r = S_r - p_0, \sigma_\theta = S_\theta - p_0, \sigma_z = S_z - p_0$$

В постановке п. 1 [1] считается, что фильтрация жидкости отсутствует, поэтому на скважине поровое давление  $p_w$  совпадает с  $p_0$ .

В работе [1] предполагается, что в качестве критерия текучести используется критерий Кулона-Мора с параметрами  $\tau_s$  - коэффициент сцепления,  $\rho$  - угол внутреннего трения породы. В CAE Fidesys используется критерий Друкера-Прагера. Поверхность Друкера-Прагера является сглаженной поверхностью Кулона-Мора (в CAE Fidesys поверхность Друкера-Прагера вписана в шестигранный конус Кулона-Мора). На основании исследования [2] предполагаем, что отличия в результатах для критериев Друкера-Прагера и Кулона-Мора должны быть незначительны.

## Результаты

Значения перемещений проверяются в точке (70.4225, 4.31214e-15, 0.0).

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1,0,0)	Stress_YY	Па	- 6.81E+07	-6.771E+07	-0.58
2	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.1102, 0,0)	Stress_YY	Па	- 7.75E+07	-7.758E+07	-0.10
3	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.2063, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.57E+07	-8.643E+07	-0.88
4	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.30623, 0,0)	Stress_YY	Па	- 9.31E+07	-9.400E+07	-0.98
5	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.38922, 0,0)	Stress_YY	Па	- 9.68E+07	-9.757E+07	-0.78
6	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.49691, 0,0)	Stress_YY	Па	- 9.92E+07	-9.969E+07	-0.51
7	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.655, 0,0)	Stress_YY	Па	- 1.00E+08	-1.003E+08	-0.02
8	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.74951, 0,0)	Stress_YY	Па	- 9.92E+07	-9.901E+07	-0.14
9	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(1.99968, 0,0)	Stress_YY	Па	- 9.48E+07	-9.469E+07	-0.11
10	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(2.50458, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.96E+07	-8.956E+07	-0.08
11	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(3.01979, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.68E+07	-8.676E+07	-0.06



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
12	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(3.4908, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.52E+07	-8.520E+07	-0.05
13	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(4.01398, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.41E+07	-8.407E+07	-0.04
14	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(6.01916, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.21E+07	-8.212E+07	-0.02
15	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(8.01412, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.15E+07	-8.144E+07	-0.01
16	Компонента напряжений $\sigma_{yy}$	(10, 0,0)	Stress_YY	Па	- 8.11E+07	-8.113E+07	-0.02
17	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1, 0,0)	Stress_XX	Па	- 4.00E+07	-4.000E+07	-0.01
18	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.1102, 0,0)	Stress_XX	Па	- 4.32E+07	-4.329E+07	-0.17
19	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.2063, 0,0)	Stress_XX	Па	- 4.63E+07	-4.634E+07	-0.07
20	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.30623, 0,0)	Stress_XX	Па	- 4.98E+07	-4.971E+07	-0.15
21	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.38922, 0,0)	Stress_XX	Па	- 5.29E+07	-5.245E+07	-0.82
22	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.49691, 0,0)	Stress_XX	Па	- 5.67E+07	-5.578E+07	-1.53
23	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.655, 0,0)	Stress_XX	Па	- 6.09E+07	-6.001E+07	-1.45
24	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.74951, 0,0)	Stress_XX	Па	- 6.29E+07	-6.216E+07	-1.18
25	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(1.99968, 0,0)	Stress_XX	Па	- 6.69E+07	-6.648E+07	-0.64
26	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(2.50458, 0,0)	Stress_XX	Па	- 7.17E+07	-7.158E+07	-0.11
27	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(3.01979, 0,0)	Stress_XX	Па	74260000	-7.439E+07	-0.17
28	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(3.4908, 0,0)	Stress_XX	Па	- 7.57E+07	-7.594E+07	-0.31
29	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(4.01398, 0,0)	Stress_XX	Па	- 7.68E+07	-7.707E+07	-0.42
30	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(6.01916, 0,0)	Stress_XX	Па	- 7.86E+07	-7.901E+07	-0.57
31	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(8.01412, 0,0)	Stress_XX	Па	- 7.92E+07	-7.969E+07	-0.63
32	Компонента напряжений $\sigma_{xx}$	(10, 0,0)	Stress_XX	Па	- 7.95E+07	-8.000E+07	-0.66
33	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.012107	0.0122	0.10
34	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1.12917, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.01336	0.01341	0.36
35	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1.30623, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	0.011978	0.01205	0.61
36	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1.97385, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.00726	-7.271E-03	-0.16



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
37	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(2.69, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.01554	-1.562E-02	-0.52
38	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(3.685, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.02012	-2.017E-02	-0.20
39	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(6.137, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.02347	-2.348E-02	-0.05
40	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(10, 0,0)	Elastic_Strain_X	-	-0.02465	-2.465E-02	-0.00
41	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02285	-0.02251	-1.49
42	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1.497, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.0488	-0.04919	-0.81
43	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1.609, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.04991	-0.04998	-0.13
44	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(2.187, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.04021	-4.010E-02	-0.28
45	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(3.054, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.03297	-3.291E-02	-0.18
46	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(3.93, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02996	-2.992E-02	-0.13
47	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(5.455, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02774	-2.772E-02	-0.08
48	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(10, 0,0)	Elastic_Strain_Y	-	-0.02607	-2.606E-02	-0.04
49	Компонента перемещений $u_x$	(1, 0,0)	Displacement_X	м	-0.14374	-1.435E-01	-0.17
50	Компонента перемещений $u_x$	(1.1102, 0,0)	Displacement_X	м	-0.11475	-1.146E-01	-0.16
51	Компонента перемещений $u_x$	(1.2063, 0,0)	Displacement_X	м	-0.10044	-1.003E-01	-0.14
52	Компонента перемещений $u_x$	(1.30623, 0,0)	Displacement_X	м	-0.09343	-9.218E-02	-1.34
53	Компонента перемещений $u_x$	(1.47495, 0,0)	Displacement_X	м	-0.0868	-8.621E-02	-0.69
54	Компонента перемещений $u_x$	(1.70187, 0,0)	Displacement_X	м	-0.08491	-8.453E-02	-0.44
55	Компонента перемещений $u_x$	(2.10559, 0,0)	Displacement_X	м	-0.08714	-8.683E-02	-0.35
56	Компонента перемещений $u_x$	(2.44476, 0,0)	Displacement_X	м	-0.09106	-9.079E-02	-0.29
57	Компонента перемещений $u_x$	(3.1594, 0,0)	Displacement_X	м	-0.1026	-1.024E-01	-0.20
58	Компонента перемещений $u_x$	(7.5045, 0,0)	Displacement_X	м	-0.19975	-1.996E-01	-0.05
59	Компонента перемещений $u_x$	(10, 0,0)	Displacement_X	м	-0.26066	-2.606E-01	-0.04
60	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.330137	0.3313	0.36
61	Пластические деформации	(1.12917, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.161152	0.1604	0.47



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
62	Пластические деформации	(1.38922, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.024793	0.02468	0.45
63	Пластические деформации	(1.72569, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0	1.509E-05	0.00
64	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	-0.12074	-0.1209	-0.17
65	Пластические деформации	(1.12917, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	-0.06783	-0.06768	-0.22
66	Пластические деформации	(1.38922, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	-0.01683	-16.85	-0.10
67	Пластические деформации	(1.72569, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	0	-1.452E-05	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
create surface circle radius 10 zplane
create surface circle radius 1 zplane
subtract body 2 from body 1
webcut body 1 with plane yplane offset 0
webcut body 3 with plane xplane offset 0
delete Body 4
delete Body 1
merge all
create material 1
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1e+09
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'COHESION' value 5.43712e+06
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 21.43
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 21.43
modify material 1 set property 'BIOT_ALPHA' value 1
modify material 1 set property 'POROSITY' value 0.25
modify material 1 set property 'PERMEABILITY' value 1e-12
modify material 1 set property 'FLUID_VISCOCITY' value 0.005
modify material 1 set property 'FLUID_BULK_MODULUS' value 1e9
curve 8 12 interval 90
curve 8 scheme bias factor 1.05 start vertex 7
curve 12 scheme bias factor 1.05 start vertex 11
curve 13 14 interval 30
mesh surface all
create displacement on curve 8 dof 2 fix 0
create displacement on curve 12 dof 1 fix 0
create porepressure on curve 13 14 value 4e7
create pressure on curve 13 magnitude 4e7
create pressure on curve 14 magnitude 8e7
block 1 surface all
block 1 material 1
block 1 element plane order 2
analysis type static elasticity plasticity porefluidtrans dim2 planestrain
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 30 maxloadsteps 10000000 tolerance 1e-3

```

Список литературы



- [1] Журавлев А.Б. Влияние фильтрации на напряженно-деформированное состояние породы в окрестности скважины / А.Б. Журавлев, В.И. Карев, Ю.Ф. Коваленко, К.Б. Устинов // Прикладная математика и механика, Т. 78, Вып. 1, 2014, стр. 86-97.
- [2] Mountaka Souley, Alain Thoraval. Nonlinear mechanical and poromechanical analyses : comparison with analytical solutions. COMSOL Conference 2011, Oct 2011, Stuttgart, Germany. pp.NC. ffineris00973639



## 1.22. Контрольная задача №1.22

### Назначение контрольной задачи.

В предлагаемой задаче моделируется задача Герца для двух полусфер, контактирующих в начале координат. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- задания параметров скользящего контакта без трения в интерфейсе;
- статического решения с учетом скользящего контакта без трения для 3D-моделей;

корректности вывода поля Напряжений с учетом контактного взаимодействия.

### Значения входных данных

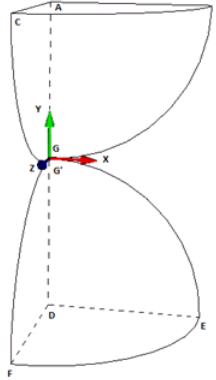


Рисунок 1.37 – Геометрическая модель задачи

Геометрическая модель:

- В виду симметрии рассматривается одна четвертая часть контактирующих в начале координат полусфер;
- Радиус полусфер  $r = 50$  мм.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e4$  Мпа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Граничные условия:

- Закрепление по нормали к поверхностям ABG и DEG':  $u_z|_{z=0} = 0$ ;
- Закрепление по нормали к поверхностям ACG и DFG':  $u_x|_{x=0} = 0$ ;
- Перемещение на поверхности ABC:  $u_y|_{y=r} = -2$  мм;
- Перемещение на поверхности DEF:  $u_y|_{y=-r} = 2$  мм;
- Общий контакт для поверхностей ABCG и DEFG`.

Параметры сетки:

- Гексаэдры первого порядка.

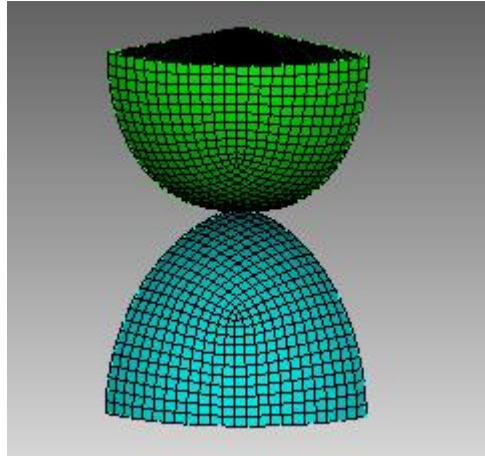


Рисунок 1.38 – Гексаэдры

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- Упругость;
- 3D.

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений	Stress YY	МПа	-2798.3

### Описание алгоритма аналитического решения

Эталонное значение получено с помощью формулы[1]:

$$\sigma_{yy} \Big|_G = -\frac{E}{\pi} \frac{1}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{4u_y \Big|_{y=-r}}{r}} .$$

### Результаты расчета

Гексаэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений	Stress YY	МПа	-2798.3	-2.744E+03	1.95



Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create sphere radius 50
move Volume 1 y 50 include_merged
create sphere radius 50
move Volume 2 y -50 include_merged
webcut volume 1 with plane yplane offset 50
webcut volume 2 with plane yplane offset -50
delete volume 3 2
webcut volume all with plane xplane offset 0
webcut volume all with plane zplane offset 0
delete volume 5 6 7 8 9 10
volume all scheme polyhedron
volume all size auto factor 4
mesh volume all
create material 1
modify material 1 name 'Material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e4
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add volume all
block 1 material 1 cs 1 element solid order 1
create displacement on surface 25 33 dof 1 fix 0
create displacement on surface 23 31 dof 3 fix 0
create displacement on surface 24 dof 2 fix -2
create displacement on surface 34 dof 2 fix 2
create contact master surface 32 slave surface 26 tolerance 0.0005 friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap off type
general method auto
analysis type static plasticity elasticity dim3
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 10 maxloadsteps 30 tolerance 1e-3 targetiter 5
```

#### Список литературы

[1] G. DUMONT: “Method of the active stresses applied to the unilateral contact” Note HI-75/93/016.

## 1.23. Контрольная задача №1.23

### Назначение контрольной задачи

В предлагаемой задаче стальной цилиндр вдавливается в алюминиевый блок. Предполагается, что оба материала линейно-упругие. При этом на цилиндр действует точечная сила  $F$  в отрицательном направлении оси  $Y$ . Задача имеет аналитическое решение для случая, когда коэффициент трения  $\mu=0$ .

Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- задания параметров скользящего контакта без трения в интерфейсе;
- статического решения с учетом скользящего контакта без трения для случая 2D;
- корректности вывода поля Напряжения в контакте.

### Значения входных данных модуля

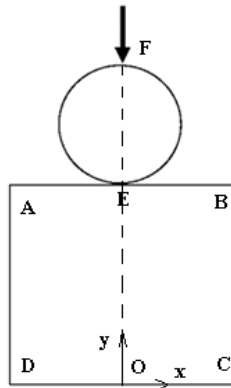


Рисунок 1.39 - Геометрическая модель задачи

Геометрическая модель:

- Круг с диаметром  $d = 100$  мм;
- Квадратная пластина  $200 \times 200$  мм.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости круга  $E_{\text{круг}} = 210$  кПа;
- Модуль упругости пластины  $E_{\text{пластина}} = 70$  кПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Граничные условия:

- Ввиду симметрии рассматривается  $\frac{1}{2}$  часть модели;
- Для стороны  $OC$   $u_x = u_y = 0$ ;
- Для стороны  $OE, EF$   $u_x = 0$ ;
- В точке  $F$  приложена сила величиной  $35$  кН, направленная вдоль отрицательной оси  $Y$ ;



- Скользящий контакт без трения (общий) для поверхностей EF и ABCD.

Параметры сетки:

- Модель разбита на квадратные 8-узловые элементы.

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение	Координаты точки	Размерность	Значение
1	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта	Contact Stress Node N	(0, -50, 0)	Pa	3600

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение этой контактной задачи можно получить из контактных формул Герца [1] для двух цилиндров. Максимальное контактное давление определяется по формуле:

$$p_{\max} = \sqrt{\frac{F_n E^*}{2\pi BR^*}},$$

где  $F_n$  - приложенная нормальная сила,  $E^*$  - комбинированный модуль упругости,  $B$  - длина цилиндра и  $R^*$  - комбинированный радиус.

Ширина контакта  $2a$  определяется как:

$$a = \sqrt{\frac{8F_n R^*}{\pi B E^*}}.$$

Используя нормированную координату с декартовой системой

координат  $\xi = x/a$  и координатой  $x$ , распределение давления определяется следующим образом:

$$p = p_{\max} \sqrt{1 - \xi^2}.$$

Комбинированный модуль упругости определяется из модуля упругости и коэффициента Пуассона цилиндра  $E_1, \nu_1$  и блока  $E_2, \nu_2$  следующим образом:

$$E^* = \frac{2E_1 E_2}{E_2(1 - \nu_1^2) + E_1(1 - \nu_2^2)}.$$

Суммарный радиус кривизны рассчитывается по радиусу кривизны цилиндра  $R_1$  и блока  $R_2$  следующим образом:

$$R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Для целевого решения блок аппроксимируется бесконечно большим радиусом. Комбинированный радиус затем оценивается как:

$$R^* = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_1.$$

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Координаты точки	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта	Contact Stress Node N	(0, -50, 0)	Pa	3600	3535	1.8

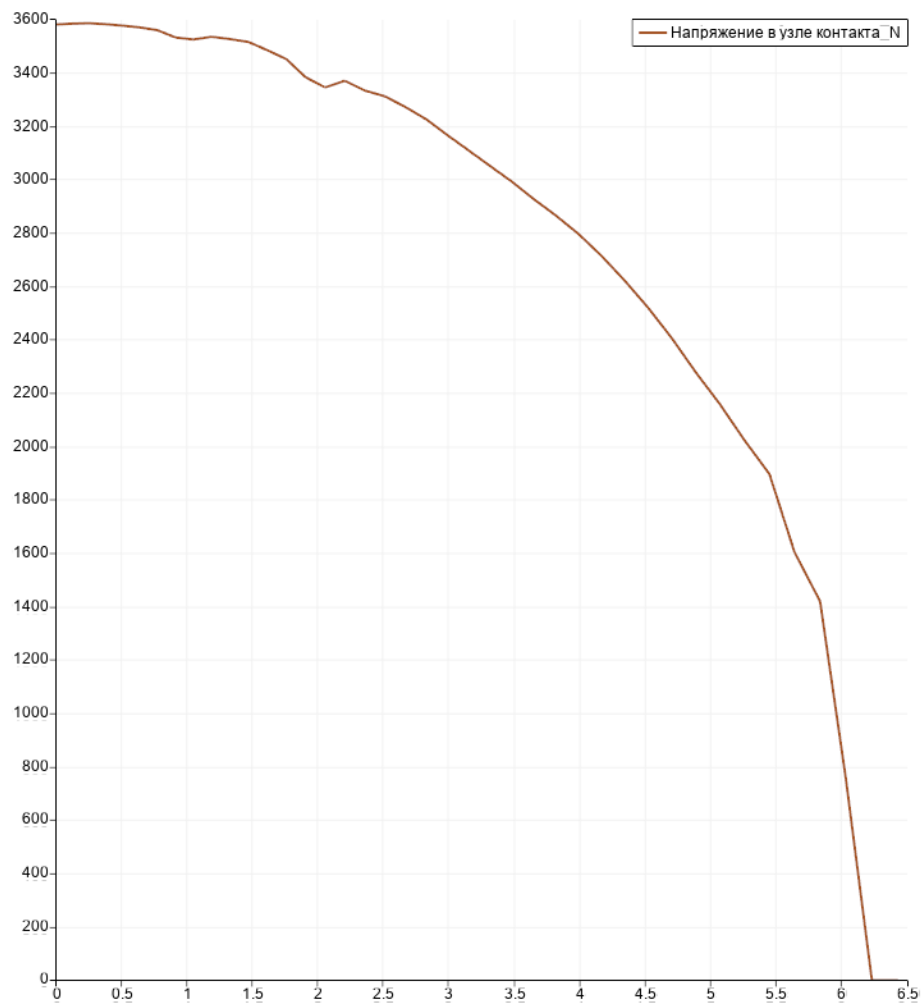


Рисунок 1.40 – График распределения напряжений в узле контакта N с зоной контакта 6.2 мм



Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create surface circle radius 50 zplane
create surface rectangle width 200 height 200 zplane
move Surface 2 y -150 include_merged
webcut body 1 2 with plane xplane offset 0
delete Surface 4 6
split surface 3 across location position 0 0 0 location position 50 0 0
create surface rectangle width 25 zplane
move Surface 9 y -62.5 include_merged
move Surface 9 x 12.5 include_merged
split surface 5 with surface 9
delete Body 5
split surface 11 across location position 0 -150 0 location position 100 -150 0
curve 18 17 scheme bias fine size 0.25 factor 1.025 start vertex 7
mesh curve 18 17
surface 7 size auto factor 3
mesh surface 7
surface 8 size auto factor 3
mesh surface 8
surface 10 size 1
mesh surface 10
surface 13 12 size auto factor 3
mesh surface 13 12
create material 1
modify material 1 name 'Mat_cube'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e5
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'Mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 7e4
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 surface 12 13 10
set duplicate block elements off
block 2 surface 8 7
block 1 material 'Mat_cube'
block 2 material 'Mat_cyl'
create displacement on curve 11 dof all fix
create displacement on curve 20 17 28 35 32 dof 1 dof 3 dof 4 dof 5 dof 6 fix
create force on vertex 6 force value 17500 direction ny
block 1 element plane order 2
block 2 element plane order 2
create contact master curve 27 slave curve 18 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap
off method penalty normal_stiffness 1.0 tangent_stiffness 0.5
analysis type static elasticity dim2 planestrain
```

#### Список литературы

[1] Hertz, H., Über die Berührung fester elastischer Körper. J. Reine Angew. Mathm. 92, 156-171, 1881.

## 1.24. Контрольная задача №1.24

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о нахождении собственных частот консольной балки, которая разделена на три части, между которыми действует условие связанного контакта. Балка зажата на левом конце и нагружена растягивающей продольной силой  $P$  на правом конце. Контрольная задача предназначена для проверки корректности результата расчета модального анализа с учетом жесткого контакта.

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Длина  $L = 0.5$  м;
- Ширина  $b = 0.05$  м;
- Высота  $h = 0.02$  м.



Рисунок 1.41 - Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- Левый конец балки закреплен по всем осям ( $u_x = u_y = u_z = r_x = r_y = r_z = 0$ );
- На правый конец балки действует сила  $P = 50000$  Н.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 2.1e + 11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.28$ ;
- Плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдральная сетка 2 порядка.

Настройки контакта:

- Жесткий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Модальный анализ;





- Преднагруженная модель;
- Поиск первой минимальной частоты.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Значение
1	Собственная частота	Eigen Values 1, Гц	86.16

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение выглядит следующим образом [1]:

$$f_1^* = f_1 \cdot \sqrt{1 + \frac{5PL^2}{14EJ}}$$

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_1}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}},$$

Где  $f_1$  - первая собственная частота консольной балки,  $J$  - момент инерции,  $\rho$  - плотность материала,  $F$  - площадь поперечного сечения,  $k_1=1.875$ .

### Результаты расчета

Значения перемещений проверяются в точке (20, 10, 20).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Собственная частота	Eigen Values 1	Гц	86.16	86.19	0.04

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 0.5 y 0.02 z 0.05
webcut volume 1 with plane xplane offset 0.083333333
webcut volume 2 with plane xplane offset -0.083333333
merge all
volume all size 0.01
volume all scheme Tetmesh
mesh volume all
create contact autoselect volume 1 2 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap off
method auto
create contact autoselect volume 3 2 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap off
method auto
create material 1 name "mat1"
modify material 1 set property 'DENSITY' value 7800
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.28
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e+11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 'mat1'

```



```
create displacement on surface 4 dof all fix
list Surface 6 mesh
create force on vertex 2 5 6 1 force value 12500 direction x
block 1 element solid order 2
analysis type eigenfrequencies dim3 preload on
eigenvalue find 10 smallest
```

#### Список литературы

[1] AutoFem Analysis First Natural Frequency of the Cantilever Beam under the Stretching Longitudinal Force (<https://autofem.com>)

## 1.25. Контрольная задача №1.25

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о зависимости критической силы от условий закрепления стержня. Стержень разделен на две части, между которыми действует условие общего контакта. Стержень зажат на левом конце и нагружен растягивающей продольной силой  $P$  на правом конце. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета для анализа потери устойчивости с учетом общего контакта.

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Длина  $L = 2.54$  м;
- Ширина  $b = 0.0508$  м;
- Высота  $h = 0.0508$  м.

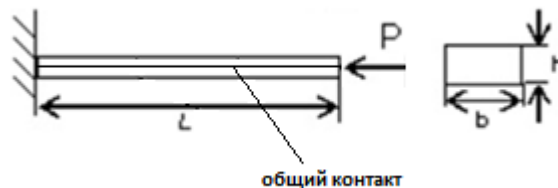


Рисунок 1.42 - Геометрическая модель стержня

Граничные условия:

- Левый конец балки закреплён по всем осям ( $u_x = u_y = u_z = r_x = r_y = r_z = 0$ );
- На правый конец балки действует сила  $P = 0.1$  Н.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 2.1e+11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Потеря устойчивости;
- Поиск первой формы потери устойчивости.



### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Значение
1	Критическая сила	Critical Values 1	44527

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение выглядит следующим образом [1]:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 E I}{(l/2)^2}.$$

### Результаты расчета

Значения перемещений проверяются в точке (70.4225, 4.31214e-15, 0).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Критическая сила	Critical Values 1	-	44527	44580	0.12

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
brick x 2.54 y 0.0508 z 0.0508
webcut volume 1 with plane yplane
webcut volume all with plane zplane
surface 19 26 33 31 scheme map
mesh surface 19 26 33 31
curve 2 4 6 8 interval 50
curve 2 4 6 8 scheme equal
mesh curve 2 4 6 8
volume all size auto factor 4
mesh volume all
create material 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 1
block 1 element solid order 2
create displacement on surface 23 35 29 21 dof all fix 0
create pressure on surface 19 26 33 31 magnitude 388
create contact autoselect tolerance 0.0005 type general method auto
analysis type stability elasticity dim3
eigenvalue find 1 smallest

```

### Список литературы

[1] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов: Учеб. для вузов. - 10-е издание, перераб. и доп. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1999. - 592 с.

## 1.26. Контрольная задача №1.26

### *Назначение контрольной задачи*

Сжатие упругопластического образца в виде прямоугольного параллелепипеда (полилинейное изотропное упрочнение).

### *Значения входных данных модуля*

Геометрическая модель:

- Параллелепипед 5x1x1;

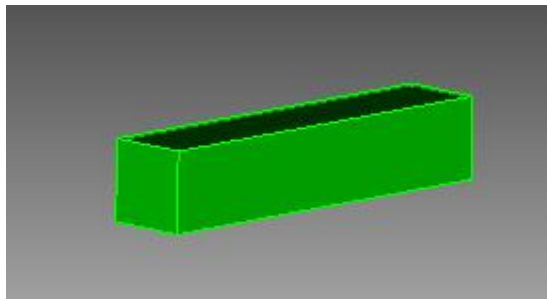


Рисунок 1.43 - Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- На грани  $y = 0$   $u_y = 0$ ;
- На грани  $z = 0$   $u_z = 0$ ;
- На всём объёме  $u_x = -2 \cdot x/5$

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 5.1 \cdot 10^6$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Когезия  $c = 15000$ ;
- Угол внутреннего трения  $\varphi = 0$ ;
- Угол дилатансии  $\psi = 0$ ;

Упрочнение, заданное кривой напряжение/пластическая деформация (на растяжение), импортированной из файла `lider_hardening.csv`:

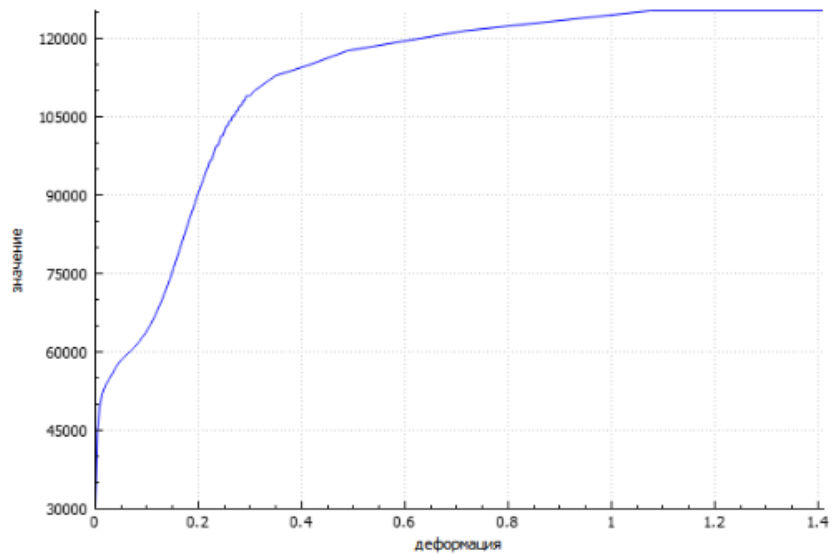


Рисунок 1.44 – Кривая напряжения/пластические деформации

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры первого порядка.

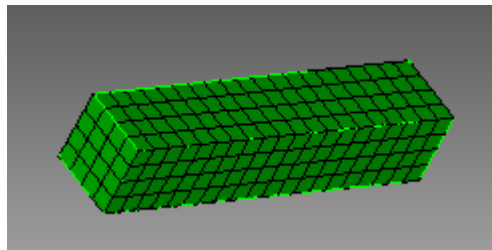


Рисунок 1.45 – Конечно-элементная сетка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение
1	Компоненты тензора напряжений при $t=0.2$	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-60117.782
2	Компоненты тензора напряжений при $t=0.4$	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-74207.347
3	Компоненты тензора напряжений при $t=0.6$	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-96336.05
4	Компоненты тензора напряжений при $t=0.8$	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-108917.197
5	Компоненты тензора напряжений при $t=1$	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-113650.937

### Описание алгоритма аналитического решения

Из закона Гука, упругие деформации связаны с напряжениями следующим образом:

$$\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{22}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{33}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11}))$$

Выражения для деформаций  $\varepsilon_{ij}$  записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда закон Гука и выражение для  $\varepsilon_{ij}$  можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_{11}(t) = t \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -0.4t$$

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{22}^e = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = \varepsilon_{33}^e$$

Для данной постановки предел текучести достигается когда деформация  $\varepsilon_{ij}$  достигает значения:

$$\varepsilon_c = -\frac{\sigma_c}{E} = -\frac{2c}{E} = 0.00588$$

Оно достигается при времени  $t$  равном

$$t_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{11}(1)} = \frac{-0.00588}{-0.4} = 0.0147$$

После достижения предела текучести материал действует согласно критерию пластичности Друкера-Прагера

$$F(\sigma, \varepsilon_{eq}^p) = \sigma_{eq} + \beta\sigma - R(\varepsilon_{eq}^p) = 0$$

Где  $\sigma_{eq}$  - интенсивность напряжений,  $H, \beta, \sigma_y$  - заданные коэффициенты,  $\sigma$  - первый инвариант тензора напряжений,  $\varepsilon_{eq}^p$  - интенсивность пластических деформаций

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}}$$

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\beta = \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi} = 2c$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p \cdot e_{ij}^p}$$

Где  $S_{ij}$ - девиатор тензора напряжений,  $e_{ij}^p$  - девиатор тензора пластических деформаций,  $\varepsilon^p$  - первый инвариант тензора пластических деформаций

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma}{3} \delta_{ij}$$

$$e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{\varepsilon^p}{3} \delta_{ij}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p$$

Для модели пластичности Друкера-Прагера связь напряжений и пластических деформаций имеет следующий вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{eq}^p \left( -\frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_{eq}} + \beta \delta_{ij} \right)$$

Полные деформации складываются из упругих и пластических:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда можно найти  $\sigma_{eq}$  и  $\sigma$

$$\sigma = \sigma_{11}, \sigma_{eq} = |\sigma_{11}|$$

Так как рассматривается одноосное сжатие,  $\sigma_{11} < 0$  и  $\varepsilon_{11}^p < 0$ , тогда выражения для критерия пластичности и связи напряжений и пластических деформаций принимают более простой вид:

$$\sigma_{11} = -R(\varepsilon_{eq}^p)$$

$$\varepsilon_{11}^p = -\varepsilon_{eq}^p$$

$$\varepsilon_{22}^p = \frac{1}{2} \varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{33}^p$$

Тогда итоговое выражение для  $\sigma_{11}$  примет вид:

$$\sigma_{11} = -R(-\varepsilon_{11}^p)$$

Где  $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{11}^p(\varepsilon_{11})$ :





$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \epsilon_{11}^p$$

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений при t=0.2	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-60117.782	-6.188E+04	-2.93%
2	Компоненты тензора напряжений при t=0.4	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-74207.347	-7.262E+04	-2.14%
3	Компоненты тензора напряжений при t=0.6	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-96336.05	-9.657E+04	-0.24%
4	Компоненты тензора напряжений при t=0.8	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	- 108917.197	-1.041E+05	-4.39%
5	Компоненты тензора напряжений при t=1	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	- 113650.937	-1.137E+05	-0.0%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
#{h=1}
brick x {5*h} y {h} z {h}
move volume 1 x {5*h/2} y {h/2} z {h/2}
create material 1
modify material 1 name "material"
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5.1e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'COHESION' value 15000
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 0
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 0
create table 1 file "relative_path_to_model" #commandRelativePath:Models\lider_hardening.csv
modify table 1 dependency strain
modify material 1 set property 'SIGMA_CURVE' table 1
block 1 volume 1
block 1 material 'material'
block 1 element solid order 1
curve 2 4 6 8 interval 20
surface 4 6 size {h/4}
mesh volume 1
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create displacement on volume 1 dof 1 fix 0
#compress
bcdep displacement 3 value '-2*x/5'
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 100 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5

```

### Список литературы

[1] RICE JR: The localization of plastic deformations, in Theoretical and Applied Mechanics (1976)

## 1.27. Контрольная задача №1.27

### *Назначение контрольной задачи*

Растяжение упругопластического образца в виде прямоугольного параллелепипеда (полилинейное изотропное упрочнение).

### *Значения входных данных модуля*

Геометрическая модель:

- Параллелепипед 5x1x1;

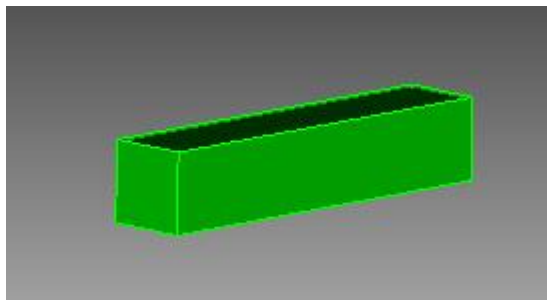


Рисунок 1.46 - Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- На грани  $y = 0$   $u_y = 0$ ;
- На грани  $z = 0$   $u_z = 0$ ;
- На всём объёме  $u_x = -2*x/5$

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 5.1e+6$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Когезия  $c = 15000$ ;
- Угол внутреннего трения  $\varphi = 0$ ;
- Угол дилатансии  $\psi = 0$ ;

Упрочнение, заданное кривой напряжение/пластическая деформация (на растяжение), импортированной из файла `lider_hardening.csv`:

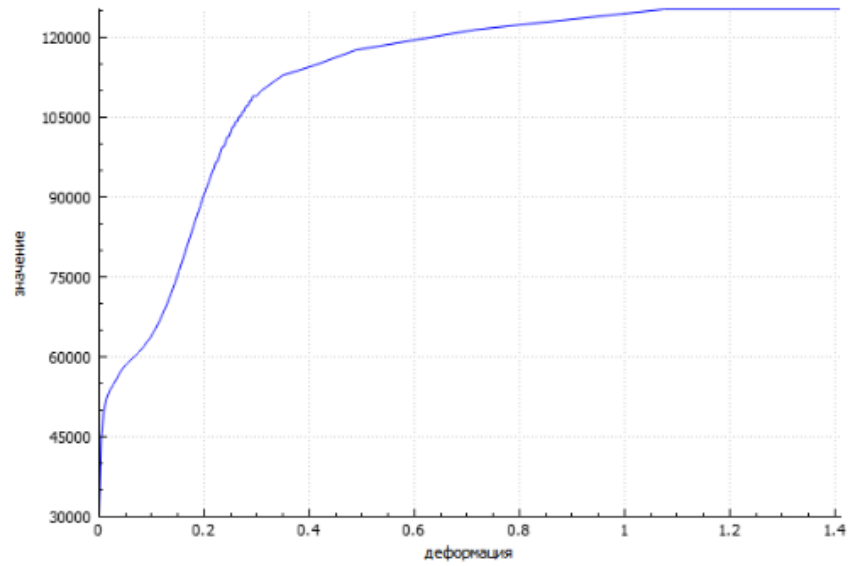


Рисунок 1.47 - Упрочнение

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры первого порядка.

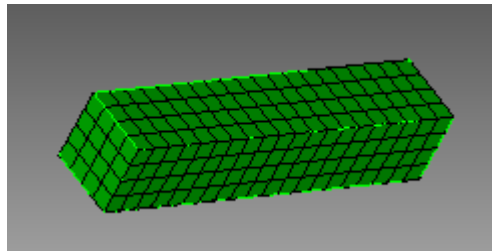


Рисунок 1.48 – Конечно-элементная сетка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение
1	Компоненты тензора напряжений при t=0.2	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-60117.782
2	Компоненты тензора напряжений при t=0.4	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-74207.347
3	Компоненты тензора напряжений при t=0.6	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-96336.05
4	Компоненты тензора напряжений при t=0.8	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-108917.197
5	Компоненты тензора напряжений при t=1	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	-113650.937

## Описание алгоритма аналитического решения

Из закона Гука, упругие деформации связаны с напряжениями следующим образом:

$$\varepsilon_{11}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{22}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33}))$$

$$\varepsilon_{33}^2 = \frac{1}{E}(\sigma_{33} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{11}))$$

Выражения для деформаций  $\varepsilon_{ij}$  записываются в виде:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда закон Гука и выражение для  $\varepsilon_{ij}$  можно записать следующим образом:

$$\varepsilon_{11}(t) = t \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0.4t$$

$$\varepsilon_{11}^e = \frac{\sigma_{11}}{E}$$

$$\varepsilon_{22}^e = -\frac{\nu\sigma_{11}}{E} = \varepsilon_{33}^e$$

Для данной постановки предел текучести достигается когда деформация  $\varepsilon_{ij}$  достигает значения:

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E} = \frac{2c}{E} = 0.00588$$

Оно достигается при времени  $t$  равном

$$t_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{11}(1)} = \frac{-0.00588}{-0.4} = 0.0147$$

После достижения предела текучести материал действует согласно критерию пластичности Друкера-Прагера

$$F(\sigma, \varepsilon_{eq}^p) = \sigma_{eq} + \beta\sigma - R(\varepsilon_{eq}^p) = 0$$

Где  $\sigma_{eq}$  - интенсивность напряжений,  $H, \beta, \sigma_y$  - заданные коэффициенты,  $\sigma$  - первый инвариант тензора напряжений,  $\varepsilon_{eq}^p$  - интенсивность пластических деформаций



$$\sigma_{eq} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} \cdot S_{ij}}$$

$$\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\beta = \frac{2 \sin \phi}{3 - \sin \phi} = 0$$

$$\sigma_y = \frac{6c \cos \phi}{3 - \sin \phi} = 2c$$

$$\varepsilon_{eq}^p = \sqrt{\frac{2}{3} e_{ij}^p \cdot e_{ij}^p}$$

Где  $S_{ij}$ - девиатор тензора напряжений,  $e_{ij}^p$  - девиатор тензора пластических деформаций,  $\varepsilon^p$  - первый инвариант тензора пластических деформаций

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{\sigma}{3} \delta_{ij}$$

$$e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{\varepsilon^p}{3} \delta_{ij}$$

$$\varepsilon^p = \varepsilon_{11}^p + \varepsilon_{22}^p + \varepsilon_{33}^p$$

Для модели пластичности Друкера-Прагера связь напряжений и пластических деформаций имеет следующий вид

$$\varepsilon_{ij}^p = \varepsilon_{eq}^p \left( -\frac{3}{2} \frac{S_{ij}}{\sigma_{eq}} + \beta \delta_{ij} \right)$$

Полные деформации складываются из упругих и пластических:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^e$$

Исходя из граничных условий,  $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ , тогда можно найти  $\sigma_{eq}$  и  $\sigma$

$$\sigma = \sigma_{11}, \sigma_{eq} = |\sigma_{11}|$$

Так как рассматривается одноосное сжатие,  $\sigma_{11} < 0$  и  $\varepsilon_{11}^p < 0$ , тогда выражения для критерия пластичности и связи напряжений и пластических деформаций принимают более простой вид:

$$\sigma_{11} = -R(\varepsilon_{eq}^p)$$

$$\varepsilon_{11}^p = -\varepsilon_{eq}^p$$

$$\varepsilon_{22}^p = \frac{1}{2} \varepsilon_{eq}^p = \varepsilon_{33}^p$$

Тогда итоговое выражение для  $\sigma_{11}$  примет вид:

$$\sigma_{11} = -R(-\varepsilon_{11}^p)$$

Где  $\varepsilon_{11}^p = \varepsilon_{11}^p(\varepsilon_{11})$ :



$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \epsilon_{11}^p$$

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений при t=0.2	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	60117.782	6.188E+04	2.93%
2	Компоненты тензора напряжений при t=0.4	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	74207.347	7.262E+04	2.14%
3	Компоненты тензора напряжений при t=0.6	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	96336.05	9.657E+04	0.24%
4	Компоненты тензора напряжений при t=0.8	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	108917.197	1.041E+05	4.39%
5	Компоненты тензора напряжений при t=1	(5, 0, 1)	$\sigma_{xx}$ , Па	113650.937	1.137E+05	0.0%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
#{h=1}
brick x {5*h} y {h} z {h}
move volume 1 x {5*h/2} y {h/2} z {h/2}
create material 1
modify material 1 name "material"
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5.1e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'COHESION' value 15000
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 0
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 0
create table 1 file "relative_path_to_model" #commandRelativePath:Models\lider_hardening.csv
modify table 1 dependency strain
modify material 1 set property 'SIGMA_CURVE' table 1
block 1 volume 1
block 1 material 'material'
block 1 element solid order 1
curve 2 4 6 8 interval 20
surface 4 6 size {h/4}
mesh volume 1
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create displacement on volume 1 dof 1 fix 0
#compress
bcdep displacement 3 value '2*x/5'
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 1000 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000000 tolerance 1e-3 targetiter 5

```

### Список литературы

[1] RICE JR: The localization of plastic deformations, in Theoretical and Applied Mechanics (1976)



## 1.28. Контрольная задача № 1.28

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных пороупругих механических для куба пористого материала (модель Био).

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 1e9$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Плотность  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>;
- Когезия  $5.43712e6$  Па;
- Угол внутреннего трения  $21.43$ ;
- Угол дилатансии  $21.43$ ;
- Пористость  $0.25$ ;
- Вязкость жидкости  $0.005$ ;
- Число Био  $1$ ;
- Модуль упругости жидкости  $1e9$  Па;
- Плотность жидкости  $1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель

- Сплошной куб со стороной  $1$  м.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты Био	BIOT_ALPHA	-	0

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Рассматриваем представительный объём  $V_0$ , выделенный в начальном состоянии, до деформации. На границе его задаём граничные условия в виде нулевых перемещений

$$u|_{\Gamma_0} = 0$$

Прикладываем внутреннее давление  $p$  к внутренней поверхности всех пор и решаем на представительном объёме краевую задачу теории упругости

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$



В результате расчёта описанной задачи мы получаем поле распределения тензора деформаций  $\sigma$  на представительном объёме. Его мы осредняем по объёму:

$$\sigma^e = \frac{1}{V} \int_V \sigma dV$$

В итоге имеем, что мы задали для представительного объёма нулевые перемещения границы, обеспечивающие нулевые эффективные деформации - а получили в результате осреднения эффективный тензор деформаций  $\sigma^e$ . В общем случае этот тензор будет ненулевым в силу приложенного порового давления. Эффективные пороупругие характеристики будем искать в виде

$$\sigma^e = -\alpha_{ij}p$$

Для однородного материала численно приближенное аналитическое решение тривиальное: в силу отсутствия пор эффективные коэффициенты Био будут нулевыми. Это работает для изотропного, трансверсально-изотропного и ортотропного материалов.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты Био	—	0	0	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1
volume 1 size 1
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1e+09
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1800
modify material 1 set property 'COHESION' value 5.43712e+06
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 21.43
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 21.43
modify material 1 set property 'SOLID_BULK_MODULUS' value 0
modify material 1 set property 'POROSITY' value 0.25
modify material 1 set property 'PERMEABILITY' value 0
modify material 1 set property 'FLUID_VISCOCITY' value 0.005
modify material 1 set property 'BIOT_ALPHA' value 1
modify material 1 set property 'BIOT_MODULUS' value 0
modify material 1 set property 'FLUID_BULK_MODULUS' value 1000
modify material 1 set property 'FLUID_DENSITY' value 1000
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 1
analysis type effectiveprops elasticity poroelast dim3 preload off
periodicbc off

```

### Список литературы:

- [1] P.C. Carman. Fluid flow through granular beds // Transactions, Institution of Chemical Engineers, London, Vol. 15, 1937. – P. 150–166.
- [2] P.C. Carman. Flow of gases through porous media (Butterworths, London, 1956).



## 1.29. Контрольная задача № 1.29

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о движении груза, с начальной скоростью, вниз по наклонной плоскости (с учетом жесткости пружины). Контрольная задача проверяет:

- корректность расчета для динамического расчета модели с учетом контактного взаимодействия «скользящий контакт с трением»;
- решение для несовпадающих сеток для спектральных элементов.

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Представлена на рисунке 1.49;
- Груз – куб 1x1 м;
- Основание - Пружина  $K = 30$  кН/м.

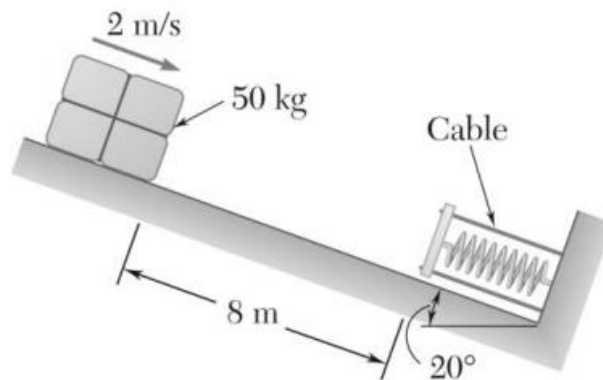


Рисунок 1.49 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Начальное преднапряжение пружины 50мм;
- Начальная скорость 2м/с;
- Основание жестко закреплено;
- Контактная пара: Общий контакт с трением, метод Автовыбор, Трение: 0, 0.2.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E_{\text{груза}} = 2 \times 10^{11}$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Основание – жесткое.

Параметры сетки:

- Гексаэдральная сетка;
- Порядок 3 и выше.

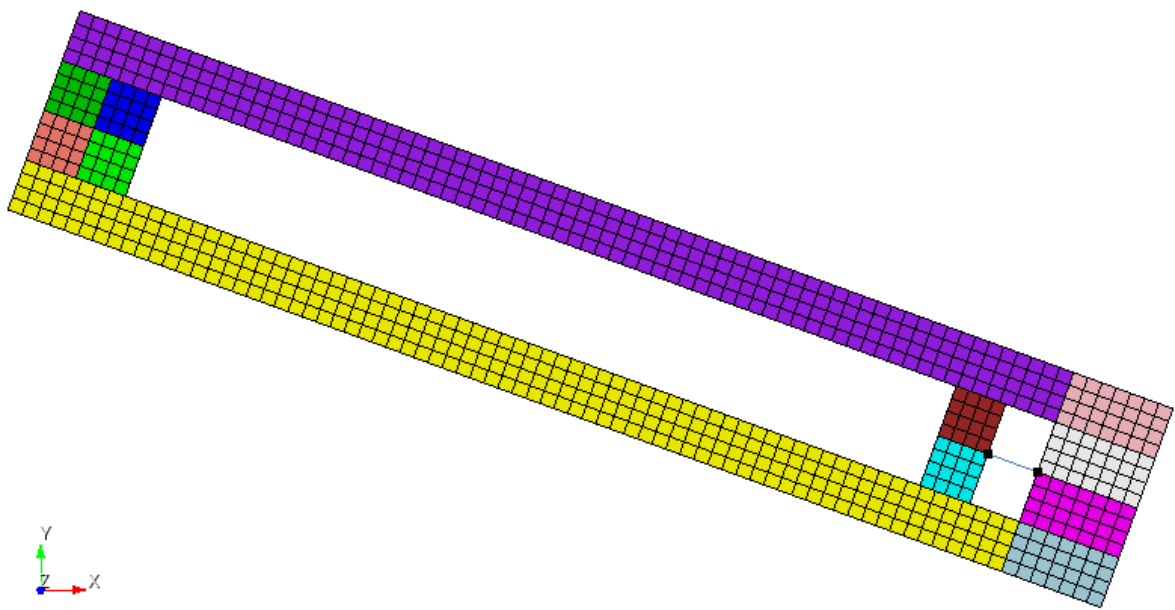


Рисунок 1.50 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- 3D.

### *Значения выходных данных модуля*

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Перемещение пружины в момент полной остановки груза	Displacement_SUM	м	0.1744
2	Компонента X вектора перемещений в точке (8, -3, 0)	Displacement_X	м	0.164
3	Компонента Y вектора перемещений в точке (8, -3, 0)	Displacement_Y	м	0.06

### *Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения*

Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения заключается в решении законов сохранения работы и энергии [1].

$$T_1 + V_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 + V_2$$

Положение 1:



$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}(50)(2)^2 = 100 \text{ J}$$

$$V_{1g} = mgh_1 = (50)(9.81)(8 \sin 20^\circ) = 1342.09 \text{ J}$$

$$V_{1e} = \frac{1}{2}ke_1^2 = \frac{1}{2}(30 \times 10^3)(0.05)^2 = 37.5 \text{ J}$$

Положение 2:

$$T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 = 0 \quad \text{since } v_2 = 0.$$

$$V_{2g} = mgh_2 = (50)(9.81)(-x \sin 20^\circ) = -167.76x$$

$$V_{2e} = \frac{1}{2}ke_2^2 = \frac{1}{2}(30 \times 10^3)(0.05 + x)^2 = 37.5 + 1500x + 15,000x^2$$

Работа сил трения:

$$+\nearrow \Sigma F_n = 0$$

$$N - mg \cos 20^\circ = 0$$

$$\begin{aligned} N &= mg \cos 20^\circ \\ &= (50)(9.81) \cos 20^\circ \\ &= 460.92 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_f &= \mu_k N \\ &= (0.2)(460.92) \\ &= 92.184 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{1 \rightarrow 2} &= -F_f d \\ &= -92.184(8 + x) \\ &= -737.47 - 92.184x \end{aligned}$$

Список литературы

[1] Vector mechanics for engineers (dynamics), 13.68(13.69)

## Результаты расчета

Спектральные гексаэдры третьего порядка (с трением)

№№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
11	Перемещение пружины в момент полной остановки груза (2.26с)	Displacement_SUM	м	0.1744	0.17741	1.7
22	Компонента X вектора перемещений в точке (8, -3, 0)	Displacement_X	м	00.164	0.166714	1.7



№№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
33	Компонента Y вектора перемещений в точке (8, -3, 0)	Displacement_Y	м	00.06	0.06067	1.1

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
create surface rectangle width 1 height 1 zplane
create surface rectangle width 10 height 0.5 zplane
Surface 1 copy move x 10
move Surface 2 x 4.5 y -0.75 include_merged
sweep curve 4 vector 1 0 0 distance 0.5 keep
webcut body all with plane yplane
Surface 7 copy move y -0.5
move Surface 10 9 x 8 include_merged
create curve vertex 26 24
webcut Surface 6 5 with plane xplane
Surface 11 2 copy move y 1.5
move Surface 12 to 15 x 6 include_merged
merge all
move Surface 12 to 15 x -6 include_merged
rotate Surface all angle -20 about Z include_merged
create cs type cartesian origin vertex 26 dir1 vertex 22 dir2 vertex 13
surface all size auto factor 4
mesh surface all
curve 39 interval 1
curve 39 scheme equal
mesh curve 39
create material 1
modify material 1 name 'mat 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+12
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 50
create material 2
modify material 2 name 'mat 2'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'DENSITY' value 5e-3
set duplicate block elements off

```



```
block 1 add surface 2 17 11 7 8 16 9 10
block 1 material 2 cs 1 element plane order 3
block 2 add surface 13 12 14 15
block 3 add curve 39
block 2 material 1 cs 1 element plane order 3
create spring properties 1
modify spring properties 1 type 'linear_spring'
modify spring properties 1 stiffness 30000
modify spring properties 1 spring_constant_damping 0
modify spring properties 1 spring_linear_damping 0
modify spring properties 1 spring_mass 0
block 3 element spring
block 3 spring properties 1
move Surface 12 to 15 y -6 include_merged
create displacement on surface 17 2 8 16 7 11 dof all fix
create contact master curve 44 42 slave curve 58 type general friction 0 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.005 method
penalty normal_stiffness 0.000001 tangent_stiffness 0.001
create contact master curve 51 47 slave curve 5 type general friction 0.2 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.005 method
penalty normal_stiffness 1 tangent_stiffness 0.5
create contact master curve 19 21 slave curve 31 33 type general friction 0 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.005 method
penalty normal_stiffness 0.01 tangent_stiffness 0.5
create directionrestraint on curve 14 16 displacement value 0 normal
move Surface 12 to 15 y 6 include_merged
create initial velocity on surface 14 15 13 12
modify initial velocity 1 dof 1 value 1.87938524
modify initial velocity 1 dof 2 value -0.684040291
modify initial velocity 1 cs 1
create gravity on surface all
modify gravity 1 dof 2 value -9.8
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off
dynamic method full_solution scheme implicit steps 400 newmark_gamma 0.01 maxtime 2.4
output nodalforce on energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 1
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 1 maxloadsteps 1000 tolerance 0.000001 targetiter 5
create force on vertex 25 force value 1500 direction x
bcdep force 1 value 'if(t<2.21,0,-1500)'
bcdep force 1 cs 2
```



## Гексаэдры второго порядка (с трением)

№№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
11	Перемещение пружины в момент полной остановки груза (2.26с)	Displacement_SUM	м	0.1744	0.17741	1.7
22	Компонента X вектора перемещений в точке (8, -3, 0)	Displacement_X	м	00.164	0.166714	1.7
33	Компонента Y вектора перемещений в точке (8, -3, 0)	Displacement_Y	м	00.06	0.06067	1.1

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
create surface rectangle width 1 height 1 zplane
create surface rectangle width 10 height 0.5 zplane
Surface 1 copy move x 10
move Surface 2 x 4.5 y -0.75 include_merged
sweep curve 4 vector 1 0 0 distance 0.5 keep
webcut body all with plane yplane
Surface 7 copy move y -0.5
move Surface 10 9 x 8 include_merged
create curve vertex 26 24
webcut Surface 6 5 with plane xplane
Surface 11 2 copy move y 1.5
move Surface 12 to 15 x 6 include_merged
merge all
move Surface 12 to 15 x -6 include_merged
rotate Surface all angle -20 about Z include_merged
create cs type cartesian origin vertex 26 dir1 vertex 22 dir2 vertex 13
surface all size auto factor 4
mesh surface all
curve 39 interval 1
curve 39 scheme equal
mesh curve 39
create material 1
modify material 1 name 'mat 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+12
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 50
create material 2
modify material 2 name 'mat 2'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'DENSITY' value 5e-3
set duplicate block elements off
block 1 add surface 2 17 11 7 8 16 9 10
block 1 material 2 cs 1 element plane order 3
block 2 add surface 13 12 14 15
block 3 add curve 39
block 2 material 1 cs 1 element plane order 3

```



```
create spring properties 1
modify spring properties 1 type 'linear_spring'
modify spring properties 1 stiffness 30000
modify spring properties 1 spring_constant_damping 0
modify spring properties 1 spring_linear_damping 0
modify spring properties 1 spring_mass 0
block 3 element spring
block 3 spring properties 1
move Surface 12 to 15 y -6 include_merged
create displacement on surface 17 2 8 16 7 11 dof all fix
create contact master curve 44 42 slave curve 58 type general friction 0 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.005 method
penalty normal_stiffness 0.000001 tangent_stiffness 0.001
create contact master curve 51 47 slave curve 5 type general friction 0.2 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.005 method
penalty normal_stiffness 1 tangent_stiffness 0.5
create contact master curve 19 21 slave curve 31 33 type general friction 0 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.005 method
penalty normal_stiffness 0.01 tangent_stiffness 0.5
create directionrestraint on curve 14 16 displacement value 0 normal
move Surface 12 to 15 y 6 include_merged
create initial velocity on surface 14 15 13 12
modify initial velocity 1 dof 1 value 1.87938524
modify initial velocity 1 dof 2 value -0.684040291
modify initial velocity 1 cs 1
create gravity on surface all
modify gravity 1 dof 2 value -9.8
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off
dynamic method full_solution scheme implicit steps 400 newmark_gamma 0.01 maxtime 2.4
output nodalforce on energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 1
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 1 maxloadsteps 1000 tolerance 0.000001 targetiter 5
create force on vertex 25 force value 1500 direction x
bcdep force 1 value 'if(t<2.21,0,-1500)'
bcdep force 1 cs 2
```

## 1.30. Контрольная задача № 1.30

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача об изгибе балки под действием осевой и небольшой поперечной нагрузок. Балка подвергается чистому сжатию до тех пор, пока не достигнет критической нагрузки на изгиб, после чего балка прогибается с большими поперечными смещениями. Контрольная задача проверяет:

- расчет с учетом конечных деформаций;
- пошаговое нагружение (изменение граничных условий между шагами).

### Значения входных данных модуля

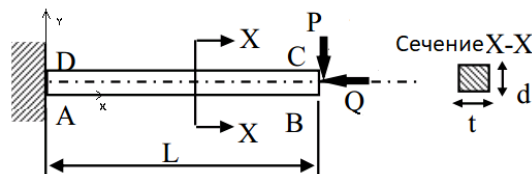


Рисунок 1.51 - Геометрическая модель

Геометрическая модель:

- Представлена на рисунке 1.51;
- Балка  $3.2 \times 0.1 \times 0.1$  м;
- $A = (0, 0, 0)$ .

Граничные условия:

- Левый торец закреплен по всем направлениям;
- Весь объем закреплен по оси Oz:  $uz = 0$ ;
- $P = 3.844e2$  Н,  $3.844e4$  Н,  $Q = 3.844e3$  Н,  $3.844e6$  Н;
- Силы Q и P приложены к вершинам правого торца по оси Ox и Oy соответственно.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.0$ .

Сетки:

- Гексаэдральная сетка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента $U_x$ вектора перемещений в точке (3.2,0,05, -0,05) на шаге 2	Displacement_X	м	-5.0464
2	Компонента $U_y$ вектора перемещений в точке (3.2,0,05, -0,05) на шаге 2	Displacement_Y	м	-1.3472



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
3	Компонента $U_z$ вектора перемещений в точке (3.2,0,05, -0,05) на шаге 2	Displacement_Z	м	0
2	Номер шага	step	-	2

### Описание алгоритма аналитического решения

Аналитическое решение этой задачи может быть получено на основе фундаментальной теории Бернулли-Эйлера с учетом большой перемещений балки. Решение представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, из которого могут быть получены перемещения и кривизна через эллиптические интегралы. Референсное решение представлено в [1] на основе [2].

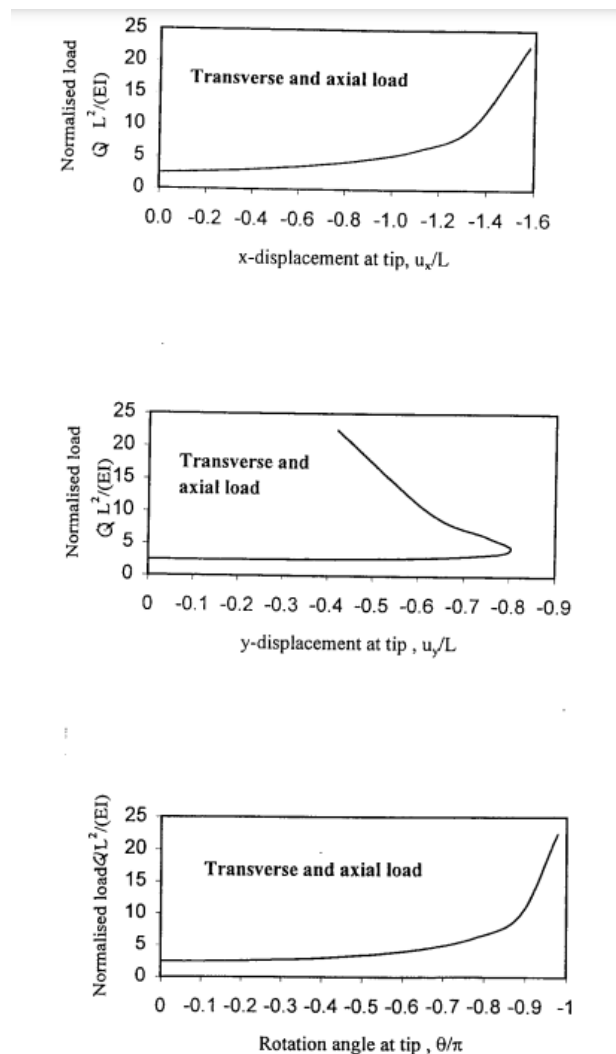


Рисунок 1.52 - Референсное решение, приведенное в [1,2]

### Список литературы

[1] NAFEMS R0072 Introduction to Non-Linear Finite Element Analysis (FE Example 5: Cantilever Problem) (пример 5.b, страница 196)



[2] Lyons P. and Holsgrove, S. [1989]

Finite elements benchmarks for 2D beams and axisymmetric shells involving geometry non-linearity, NAFEMS Report, P10

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента $U_x$ вектора перемещений в точке (3.2, 0.05, -0.05) на шаге 2	Displacement_X	м	-5.0464	-5.06008	0.27
2	Компонента $U_y$ вектора перемещений в точке (3.2, 0.05, -0.05) на шаге 2	Displacement_Y	м	-1.3472	-1.36135	1.05
3	Компонента $U_z$ вектора перемещений в точке (3.2, 0.05, -0.05) на шаге 2	Displacement_Z	м	0	0	<0.01
4	Номер шага	step	-	2	2	-

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

#{P=3.844e4}
#{Q=3.844e6}
reset
set default element hex
brick x 3.2 y 0.1 z 0.1
move Volume 1 x 1.6 y 0.05 z -0.05 include_merged
volume 1 size 0.05 #order,quality: 1,0.01
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'material'
modify material 1 set property 'POISSON' value 0
modify material 1 set property 'MODULUS' value 210e9
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 2
create displacement on surface 4 dof all fix 0
create displacement on volume 1 dof 3 fix 0
create force on vertex 1 2 5 6 force value 1 direction nx
create force on vertex 1 2 5 6 force value 1 direction ny
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 1 2 value 96.1
modify table 1 cell 2 2 value 9610
bcdep force 2 table 1
create table 2
modify table 2 dependency time
modify table 2 insert row 1
modify table 2 insert row 1
modify table 2 cell 1 1 value 1
modify table 2 cell 2 1 value 2
modify table 2 cell 1 2 value 961
modify table 2 cell 2 2 value 961000
bcdep force 1 table 2
static steps 2
analysis type static elasticity findefs dim3

```

### 1.31. Контрольная задача № 1.31

*Решается задача о сжатии упругопластического образца с несимметричным упрочнением.*

*Значения входных данных модуля*

- Модуль Юнга  $E = 5.1e+6$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Предел текучести (на растяжение)  $\sigma_t = 1.5541e+4$  Па;
- Предел текучести на сжатие  $\sigma_c = 4.3414e+4$  Па;
- Упрочнение, заданное кривой напряжение/пластическая деформация на сжатие таблично:

$\varepsilon_p^{eq}$	$\sigma_{eq}$ , Па
0	43414
1	1043414

Геометрия:

- Прямоугольный параллелепипед со сторонами  $0 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$

Граничные условия:

- На грани  $y = 0$   $u_y = 0$
- На грани  $z = 0$   $u_z = 0$
- На всём объёме  $\varepsilon_x = -0.12 \cdot x/5$

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

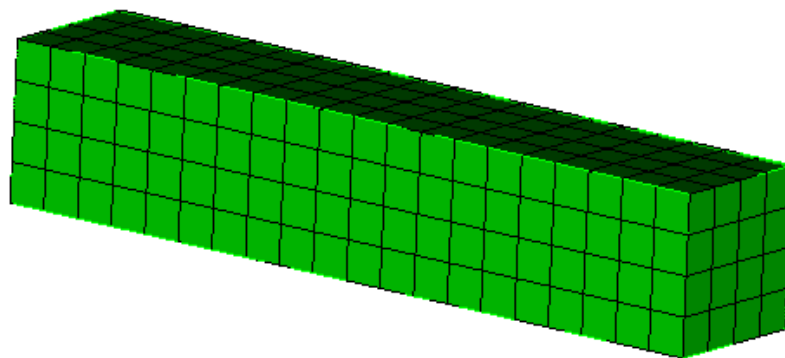


Рисунок 1.53 - Конечно-элементная сетка

**Значения выходных данных модуля**

No.	Координаты	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	(0; 0; 0)	Напряжения $\sigma_{xx}$	Па	-43414.2
2	(0; 0; 0)	Напряжения $\sigma_{xx}$	Па	-64826.3838

**Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения**

Аналитическое решение на основе метода, предложенного в [1]:

Выражение для  $\sigma_{11}$ :

$$\sigma_{11}(t) = \frac{\sigma_c (\beta - 1) + E_c \varepsilon_{11}(t)}{1 - \beta + \frac{E_t}{E}}$$

где  $E_c$  - модуль упругости на сжатие, высчитываемый для линейного упругости следующим образом:

$$E_c = \frac{\sigma_c^u - \sigma_c}{\varepsilon_u^p}$$

где  $\sigma_c$  - предельное напряжение,  $\varepsilon_c$  - предельные пластические деформации.

Список литературы:

[1] Code\_Aster Integration of the elastoplastic mechanical behaviors of Drucker-Prager, associated (DRUCK\_PRAGER) and non-aligned (DRUCK\_PRAG\_N\_A) and postprocessings [https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/en/man\\_r/r7/r7.01.16.pdf](https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/en/man_r/r7/r7.01.16.pdf)

**Результаты расчета**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Напряжение $\sigma_{xx}$ в точке (5, 0, 0) в момент времени 0.36	Stress XX	Па	-43414.2	-4.359E+04	0.41
2	Напряжение $\sigma_{xx}$ в точке (5, 0, 0) в момент времени 1	Stress XX	Па	-64826.38	-6.483E+04	0.0

При испытаниях использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 5 y 1 z 1
move volume 1 x 2.5 y 0.5 z 0.5
```



```
create material 1
modify material 1 name "material"
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5.1e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'DP_YIELD_STRENGTH_COMPR' value 4.3414e4
modify material 1 set property 'DP_YIELD_STRENGTH' value 1.5541e4
create table 1
modify table 1 dependency strain
modify table 1 insert row
modify table 1 cell 1 1 value 0
modify table 1 cell 1 2 value 4.3414e4
modify table 1 insert row
modify table 1 cell 2 1 value 1
modify table 1 cell 2 2 value 104.3414e4
modify material 1 set property 'SIGMA_CURVE_COMPR' table 1
block 1 volume 1
block 1 material 'material'
block 1 element solid order 1
curve 2 4 6 8 interval 20
surface 4 6 size 0.25
mesh volume 1
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create displacement on volume 1 dof 1 fix 0
bcdep displacement 3 value '-0.12*x/5'
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 1000 minloadsteps 100 maxloadsteps 1000000 tolerance 1e-3 targetiter 5
```

## 1.32. Контрольная задача № 1.32

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о растяжении упругопластического образца с несимметричным упрочнением.

### Значения входных данных

Параметры материала:

- модуль Юнга  $E = 5.1e+6$ ;
- коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- предел текучести (на растяжение)  $\sigma_t = 1.5541e+4$ ;
- предел текучести на сжатие  $\sigma_c = 4.3414e+4$ ;
- Упрочнение, заданное кривой напряжение/пластическая деформация на сжатие таблично:

$\varepsilon_p^{eq}$	$\sigma_{eq}$ , Па
0	43414
1	1043414

Геометрия:

- Прямоугольный параллелепипед со сторонами  $0 \leq x \leq 5$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$

Граничные условия:

- На грани  $y = 0$   $u_y = 0$
- На грани  $z = 0$   $u_z = 0$
- На всём объёме  $u_x = 0.12 * x / 5$

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

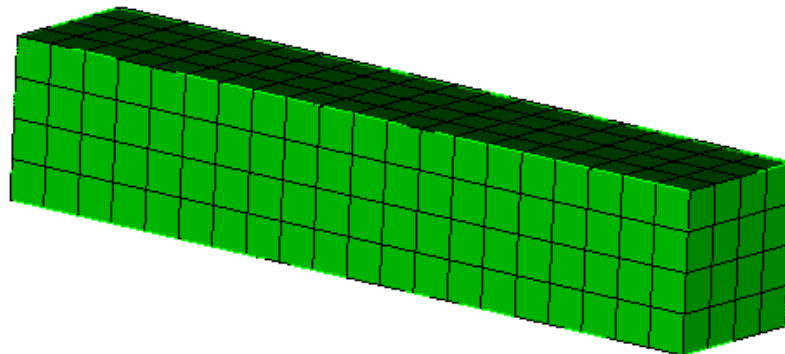


Рисунок 1.54 - Конечно-элементная сетка

**Значения выходных данных модуля**

№.	Координаты	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	(0; 0; 0)	Напряжения $\sigma_{xx}$ t=0.13 с	Па	15541
2	(0; 0; 0)	Напряжения $\sigma_{xx}$ t=1 с	Па	20402.0642

**Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения**

Аналитическое решение на основе метода, предложенного в [1]:

Выражение для  $\sigma_{11}$ :

$$\sigma_{11}(t) = \frac{\sigma_t(1+\beta)^2 + E_c(1-\beta)\varepsilon_{11}(t)}{(1+\beta)^2 + \frac{E_c}{E}(1-\beta)}$$

где  $E_c$  высчитывается для линейного упрочнения следующим образом:

$$E_c = \frac{\sigma_c^u - \sigma_c}{\varepsilon_u^p}$$

где  $\sigma_c$  - предельное напряжение,  $\varepsilon_u$  - предельные пластические деформации.

Список литературы:

[1] Code\_Aster Integration of the elastoplastic mechanical behaviors of Drucker-Prager, associated (DRUCK\_PRAGER) and non-aligned (DRUCK\_PRAG\_N\_A) and postprocessings [https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/en/man\\_r/r7/r7.01.16.pdf](https://www.code-aster.org/V2/doc/v12/en/man_r/r7/r7.01.16.pdf)

**Результаты расчета**

№.	Координаты	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	(0; 0; 0)	Напряжения $\sigma_{xx}$	Па	15541	1.556E+04	0.11
2	(0; 0; 0)	Напряжения $\sigma_{xx}$	Па	20402.0642	2.040E+04	<0.01

При испытаниях использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
brick x 5 y 1 z 1
move volume 1 x 2.5 y 0.5 z 0.5
create material 1
modify material 1 name "material"
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5.1e6

```



```
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'DP_YIELD_STRENGTH_COMPR' value 4.3414e4
modify material 1 set property 'DP_YIELD_STRENGTH' value 1.5541e4
create table 1
modify table 1 dependency strain
modify table 1 insert row
modify table 1 cell 1 1 value 0
modify table 1 cell 1 2 value 4.3414e4
modify table 1 insert row
modify table 1 cell 2 1 value 1
modify table 1 cell 2 2 value 104.3414e4
modify material 1 set property 'SIGMA_CURVE_COMPR' table 1 #a
block 1 volume 1
block 1 material 'material'
block 1 element solid order 1
curve 2 4 6 8 interval 20
surface 4 6 size 0.25
mesh volume 1
create displacement on surface 3 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 dof 3 fix 0
create displacement on volume 1 dof 1 fix 0
bcdep displacement 3 value '0.12*x/5'
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 1000 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000000 tolerance 1e-3 targetiter 5
```



### 1.33. Контрольная задача № 1.33

#### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача об устойчивости пластины с добавлением условия контакта. Контрольная задача проверяет корректность расчета анализа потери устойчивости модели с учетом контактного взаимодействия «скользящий контакт с трением».

#### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Представлена на рисунке 1.55;
- Ширина  $b = 0,1$  м;
- Толщина  $h = 0,002$  м;
- Длина  $a = 0,1$  м.

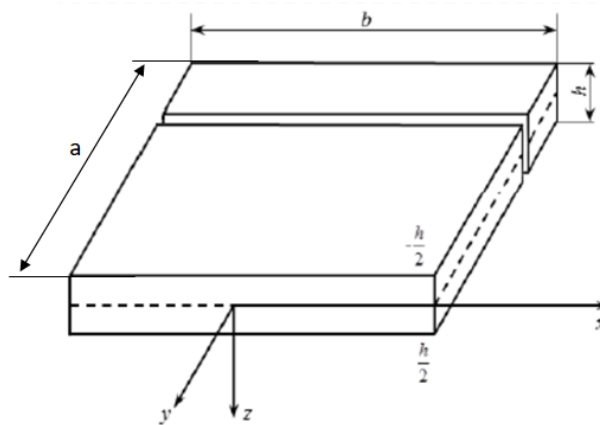


Рисунок 1.55 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Представлены на рисунке 1.56;
- Оба конца стержня опираются на шарниры;
- Контактная пара - выбор главной и побочной сущности, Общий контакт с трением, метод Автовыбор, Трение: 0, 0.2, 1;
- Действует сжимающая сила.

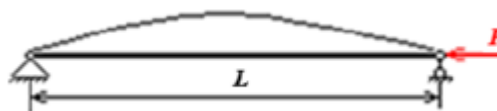


Рисунок 1.56 – Граничные условия

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 2e11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ ;

- Плотность  $\rho=1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Параметры сетки:

- Гексаэдральная сетка;
- Порядок 2.

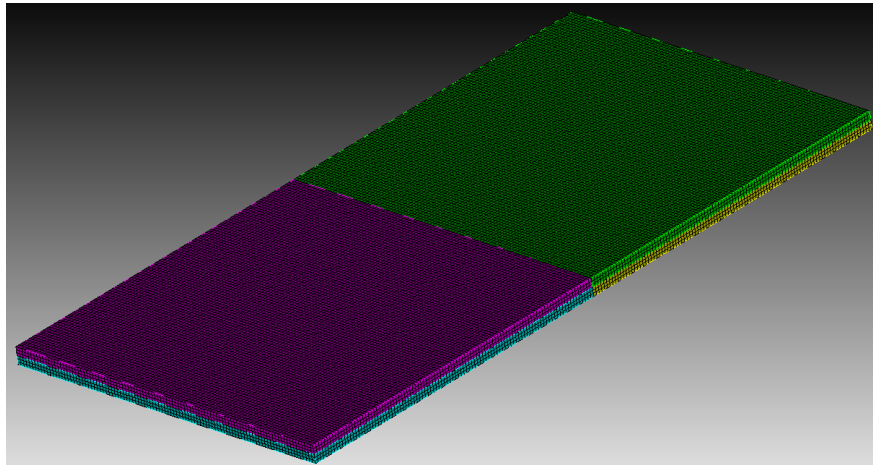


Рисунок 1.57 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Потеря устойчивости;
- 3D;
- Число форм потери устойчивости: 1.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Результат
1	Первый коэффициент критической нагрузки	load multipliers(1)	-	56220.0

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Задача имеет приближенное аналитическое решение [1], приведенное ниже.

Приближенная формула для критического напряжения пластины принимает вид:

$$\sigma_{кр} = E \left( \frac{\delta}{b} \right)^2$$

Критическая сила потери устойчивости пластины определяется по формулам:

$$P_{кр} = E \frac{\delta^3}{b}$$

Список литературы

[1] Е.И. Орешко, В.С. Ерасов, А.Н Луценко Особенности расчетов устойчивости стержней и пластин // Авиационные материалы и технологии. – 2016 - №4(45)



УДК 517.25, DOI 10.18577/207-9140-2016-0-4-74-79.

**Результаты расчета**

№	Наименование переменной		Обозначение переменной	Размерность	Результат	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Первый коэффициент критической нагрузки		load multipliers(1)	-	56220.0	5.475E+03	2.78

При испытаниях использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 0.1 y 0.1 z 0.002
webcut volume 1 with plane zplane offset 0
webcut volume all with plane yplane offset 0
curve 18 26 20 25 interval 2
curve 18 26 20 25 scheme equal
move Volume 3 4 y .02 include_merged
merge all
move Volume 3 4 y -.02 include_merged
volume all size auto factor 7
mesh volume all
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 7.9e+10
modify material 1 set property 'DENSITY' value 100
block 1 add volume all
block 1 material 1 cs 1 element solid order 2
create pressure on surface 31 19 33 25 magnitude 500 # p = 0.1 H
create displacement on curve 35 43 dof 2 dof 3 fix 0
create displacement on curve 41 36 dof 1 dof 2 dof 3 fix 0
create contact master surface 17 27 slave surface 32 22 type general friction 0.1 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.0005
method auto
analysis type buckling elasticity dim3
eigenvalue find 1 smallest

```

## 2. Задачи с численно приближенными аналитическими решениями

### 2.1. Контрольная задача №2.1

#### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для двухслойного слоисто-волокнутого композита. Используется численное приближенное решение.

#### *Значения входных данных*

Параметры материала:

Сталь:

- Модуль Юнга  $E = 200$  кПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ .

Резина:

- Модуль Юнга  $E = 2$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.49$ .

Геометрическая модель:

Сгенерирована автоматически средствами интерфейса с параметрами:

- Слоисто-волокнутовый композит;
- Диаметр нити – 6.0;
- Угол наклона нитей – 30 градусов;
- Шаг нитей – 8.0;
- Толщина слоя – 16.0.

Граничные условия:

- Периодическое условие.

Параметры сетки:

- Тетраэдральная сетка второго порядка.

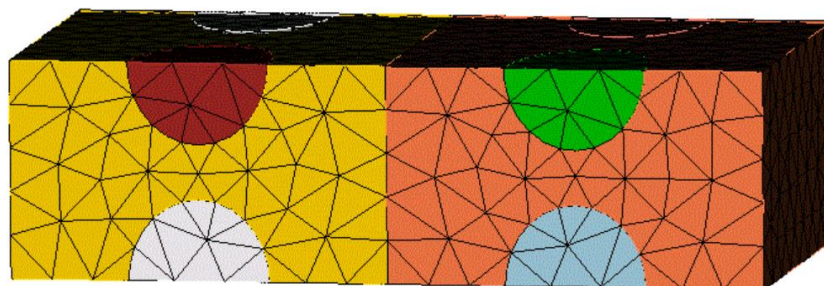


Рисунок 2.1 – Сетка 3D - тетраэдры



## Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	24852.4
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	8281.54
3	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	2763.12
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	8283.5
5	Плотность	Density	кг / м <sup>3</sup>	0

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

$$1. E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси X.}$$

$$2. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси Y.}$$

$$3. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси Z.}$$

$$4. E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости XY.}$$

$$5. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости XZ.}$$

$$6. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости YZ.}$$

Для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ .

Линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  представлена в виде:

$$a_{ij}^e = a_{ij} q .$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q} .$$



Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы для коэффициентов  $C_{ijkl}$  представляются в виде:

$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11} q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)} q.$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22} q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)} q.$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33} q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)} q.$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21}) q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)} q.$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31}) q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)} q.$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32}) q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)} q.$$

Отсюда коэффициенты  $C_{ijkl}$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)}.$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)}.$$

$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)}.$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}^{(4)}.$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}^{(5)}.$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2} \alpha_{ij}^{(6)}.$$

Постановка данной задачи позволяет вычислить искомые значения только в виде приближенно численного решения.

## Результаты



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	24852.4	24854.847	0.01
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	8281.54	8308.11363	0.32
3	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	2763.12	2799.135749	1.3
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	8283.5	8283.85704	0.004
5	Плотность	Density	$кг / м^3$	0	0	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create brick width 16 depth 9.2376 height 16
create cylinder height 50.4752 radius 3
volume 2 rotate 90.0 about y
volume 2 rotate 30 about z
volume 2 move y -9.2376
create cylinder height 50.4752 radius 3
volume 3 rotate 90.0 about y
volume 3 rotate 30 about z
volume 3 move y 0
create cylinder height 50.4752 radius 3
volume 4 rotate 90.0 about y
volume 4 rotate 30 about z
volume 4 move y 9.2376
intersect volume 1 2 keep
intersect volume 1 3 keep
intersect volume 1 4 keep
delete volume 2
delete volume 3
delete volume 4
subtract volume 5 6 7 from volume 1 keep
delete volume 1
volume all move z 8
volume all move z 16 copy
volume 9 10 11 12 reflect 1.0 0.0 0.0
imprint volume all
merge volume all
block 1 volume 5 6 7 9 10 11
block 2 volume 8 12
#{steel_E = 2.0e5}
#{steel_nu = 0.25}
#{rub_E = 2.0}
#{rub_nu = 0.49}
#{mesh_size = 2.0}
create material 1
```



```
modify material 1 name 'steel'  
modify material 1 set property 'POISSON' value {steel_nu}  
modify material 1 set property 'MODULUS' value {steel_E}  
create material 2  
modify material 2 name 'rubber'  
modify material 2 set property 'POISSON' value {rub_nu}  
modify material 2 set property 'MODULUS' value {rub_E}  
block 1 material 1  
block 2 material 2  
block 1 2 element solid order 2  
volume all scheme Tetmesh  
set tetmesher interior points on  
set tetmesher optimize level 3 overconstrained off sliver off  
set tetmesher boundary recovery off  
volume all tetmesh growth_factor 1.0  
volume all size {mesh_size}  
volume all size {mesh_size}  
mesh volume all  
analysis type effectiveprops elasticity dim3  
periodicbc on
```

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.





## 2.2. Контрольная задача №2.2

### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для дисперсного композита периодической структуры, армированного сферическими включениями.

### *Значения входных данных*

Параметры материала:

Матрица:

- Модуль Юнга  $E = 1$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.4$ ;
- Плотность  $\rho = 1000$  кг / м<sup>3</sup>.

Включение:

- Модуль Юнга  $E = 10$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Плотность  $\rho = 10000$  кг / м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель:

- Куб со стороной = 1 м;
- В центре включение в виде шара радиусом 0.228542449538.

Граничные условия:

- Периодическое условие.

Параметры сетки:

- Тетраэдры второго порядка.

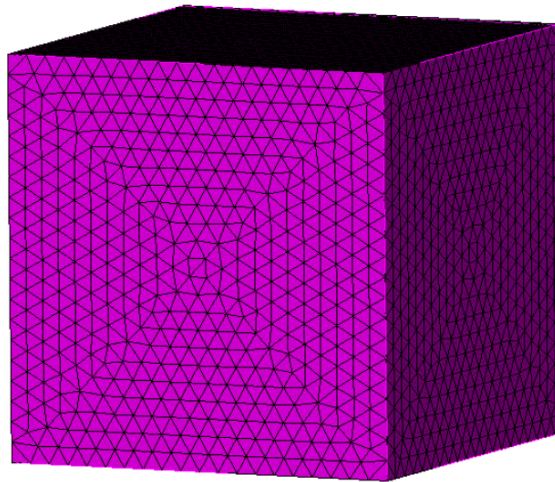


Рисунок 2.2 – Сетка 3D - тетраэдры

### Ожидаемые результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	2.26175
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	1.48163
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	1.48163
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.39006
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.39006
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	2.26175
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	1.48163
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.39006
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	2.26175
10	Плотность	Density	$кг / м^3$	1450
11	Модуль Юнга	E	Па	1.08889201676
12	Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.395799805264

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :



$$1. E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси X.}$$

$$2. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси Y.}$$

$$3. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси Z.}$$

$$4. E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости XY.}$$

$$5. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости XZ.}$$

$$6. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости YZ.}$$

Для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ .

Линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  представлена в виде:

$$a_{ij}^e = a_{ij}q.$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}.$$

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы для коэффициентов  $C_{ijkl}$  представляются в виде:

$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q.$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q.$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q.$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q.$$



$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q.$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $C_{ijkl}$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)}$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)}$$

$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)}$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)}$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)}$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}$$

Постановка данной задачи позволяет вычислить искомые значения только в виде приближенно численного решения.

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.

**Результат**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	2.26175	2.27029	0.38
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	1.48163	1.481390	0.02
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	1.48163	1.481391	0.02
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	0.39006	0.390033	0.01
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.39006	0.390014	0.01
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	2.26175	2.270277	0.38
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	1.48163	1.48141	0.01
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.39006	0.390035	0.01
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	2.26175	2.270278	0.38
10	Плотность	Density	$кг / м^3$	1450	1449.7445	0.02
11	Модуль Юнга	E	Па	1.08889201676	1.1003858	1.06
12	Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.395799805264	0.39486241	0.24

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
#{Pi = 3.1415926}
#{cube_size = 1.0}
#{ratio = 0.05}
#{E_m = 1.0}
#{nu_m = 0.4}
#{ro_m = 1000}
#{E_i = 10.0}
#{nu_i = 0.25}
#{ro_i = 10000}
#{sphere_rad = ( 0.75 * ratio * cube_size^3 / Pi )^0.33333}

```



```
create brick width {cube_size}
create sphere radius {sphere_rad}
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
create material 1 name 'matr'
modify material 1 set property 'MODULUS' value {E_m}
modify material 1 set property 'POISSON' value {nu_m}
modify material 1 set property 'DENSITY' value {ro_m}
create material 2 name 'incl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value {E_i}
modify material 2 set property 'POISSON' value {nu_i}
modify material 2 set property 'DENSITY' value {ro_i}
volume all size 0.1 #order,quality: 3,1
volume all scheme Tetmesh
mesh volume all
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'incl'
block 2 material 'matr'
set node constraint on
block 1 element solid order 2
block 2 element solid order 2
#{G_m = E_m / (2.0 + 2.0*(nu_m))} # shear modules from Young's modulus and Poisson's ratio
#{G_i = E_i / (2.0 + 2.0*(nu_i))}
#{K_m = E_m / (3.0 - 6.0*(nu_m))} # bulk modules from Young's modulus and Poisson's ratio
#{K_i = E_i / (3.0 - 6.0*(nu_i))}
#{G_eff = G_m * ( 1.0 - 15.0*(1 - (nu_m))*(1 - G_i/G_m)*ratio / (7.0 - 5.0*(nu_m) + 2.0*(4.0 - 5.0*(nu_m))*G_i/G_m ) )}
#{K_eff = K_m + (K_i - K_m)*ratio / ( 1.0 + (K_i - K_m)/(K_m + 1.33333*G_m ) )}
#{E_eff = 9.0*K_eff*G_eff / (3.0*K_eff + G_eff)} # Young's modulus from shear modulus and bulk modulus
#{nu_eff = (3.0*K_eff - 2.0*G_eff) / (6.0*K_eff + 2.0*G_eff)} # Poisson's ratio from shear modulus and bulk modulus
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc on
```

## 2.3. Контрольная задача №2.3

### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для слоистого композита, содержащего слои из двух материалов.

### *Значения входных данных*

Параметры материала:

Сталь:

- Модуль Юнга  $E = 200$  кПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Плотность  $\rho = 7800$  кг / м<sup>3</sup>.

Резина:

- Модуль Юнга  $E = 2$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.49$ ;
- Плотность  $\rho = 1300$  кг / м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель:

- Куб со стороной = 1.3 м;
- Посередине (перпендикулярно оси Z) проходит слой стали толщиной 0.3.

Граничные условия:

- Периодическое условие.

Параметры сетки:

- Гексаэдры второго порядка.

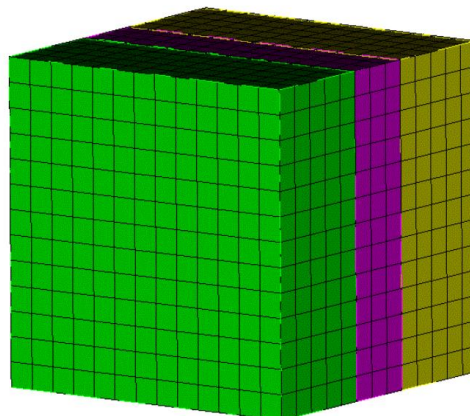




Рисунок 2.3 – Сетка 3D - гексаэдры

**Ожидаемые результаты модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	49262.4200024
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	12338.3105548
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	36.3071714214
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	18462.0547238
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.872481025635
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	49262.4200024
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	36.3071714214
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.872481025635
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	44.4947405774
10	Плотность	Density	кг / м <sup>3</sup>	2800
11	Модуль Юнга	E1=E2	Па	46155.5
12	Модуль Юнга	E3	Па	44.4519
13	Коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{21}$	-	0.25001
14	Коэффициент Пуассона	$\nu_{13} = \nu_{23}$	-	0.611983
15	Коэффициент Пуассона	$\nu_{31} = \nu_{32}$	-	0.000589395
16	Модуль сдвига	G12	Па	18462.1
17	Модуль сдвига	G13=G23	Па	0.872481

**Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения**

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

1.  $E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси X.
2.  $E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  – растяжение/сжатие вдоль оси Y.





$$3. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси } Z.$$

$$4. E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XY.$$

$$5. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XZ.$$

$$6. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } YZ.$$

Для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ .

Линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  представлена в виде:

$$a_{ij}^e = a_{ij}q.$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}.$$

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = Cijkl e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы для коэффициентов  $Cijkl$  представляются в виде:

$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q.$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q.$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q.$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q.$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q.$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $Cijkl$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :



$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)}.$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)}.$$

$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)}.$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)}.$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)}.$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}.$$

Постановка данной задачи позволяет вычислить искомые значения только в виде приближенно численного решения.

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.

#### **Результаты**



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	49262.4200024	49229.61829	0.07
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	12338.3105548	12330.11285	0.07
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	36.3071714214	36.3136	0.02
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	18462.0547238	18462.05472	<<0.01
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.872481025635	0.872481026	<<0.01
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	49262.4200024	49229.61829	0.07
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	36.3071714214	36.3136	0.02
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.872481025635	0.872481	<<0.01
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	44.4947405774	44.494741	<<0.01
10	Плотность	Density	$кг / м^3$	2800	2800	0
11	Модуль Юнга	E1=E2	Па	46155.5	46124.7424	0.07
12	Модуль Юнга	E3	Па	44.4519	44.451898	<<0.01
13	Коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{21}$	-	0.25001	0.250	<<0.01
14	Коэффициент Пуассона	$\nu_{13} = \nu_{23}$	-	0.611983	0.6121	0.02
15	Коэффициент Пуассона	$\nu_{31} = \nu_{32}$	-	0.000589395	0.0005899	0.08
16	Модуль сдвига	G12	Па	18462.1	18462.055	<<0.01
17	Модуль сдвига	G13=G23	Па	0.872481	0.8725	<<0.01

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
cubit.cmd("reset")
fidesys.cmd("set default element hex")
rub_thick = 1.0
steel_thick = 0.3
```



```
rub_number = 1
length = 1.3
width = 1.3
height = rub_number*(rub_thick + steel_thick)
def lambda_Calc_E_nu (E, nu): return E * nu / ( (1+nu)*(1-2*nu) )
def G_Calc_E_nu(E, nu): return E / (2 + 2*nu)
steel_E = 2.0e5
steel_nu = 0.25
steel_lambda = lambda_Calc_E_nu(steel_E, steel_nu)
steel_G = G_Calc_E_nu(steel_E, steel_nu)
steel_rho = 7800.0
rub_E = 2.0
rub_nu = 0.49
rub_lambda = lambda_Calc_E_nu(rub_E,rub_nu)
rub_G = G_Calc_E_nu(rub_E, rub_nu)
rub_rho = 1300.0
mesh_size = 0.1
cubit.cmd("brick x " + str(length) + " y " + str(width) + " z " + str(height))
for i in range(0, rub_number): cubit.cmd( "webcut body all with plane zplane offset " + str(0.5*rub_thick +
i*(rub_thick+steel_thick) - 0.5*height ) + " imprint merge")
for i in range(0, rub_number): cubit.cmd( "webcut body all with plane zplane offset " + str( (i+1)*(rub_thick+steel_thick) -
0.5*height - 0.5*rub_thick) + " imprint merge" )
command1 = "block 2 volume"
for i in range(1, rub_number+2): command1 = command1 + " " + str(i)
cubit.cmd(command1)
command2 = "block 1 volume"
for i in range(rub_number+2, 2*rub_number+2): command2 = command2 + " " + str(i)
cubit.cmd(command2)
cubit.cmd("imprint volume all")
cubit.cmd("merge volume all")
cubit.cmd("create material 1 name 'steel'")
cubit.cmd("create material 2 name 'rubber'")
cubit.cmd("modify material 1 set property 'MODULUS' value " + str(steel_E))
cubit.cmd("modify material 1 set property 'POISSON' value " + str(steel_nu))
cubit.cmd("modify material 1 set property 'DENSITY' value " + str(steel_rho))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'MODULUS' value " + str(rub_E))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'POISSON' value " + str(rub_nu))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'DENSITY' value " + str(rub_rho))
cubit.cmd("block 1 material 'steel'")
cubit.cmd("block 2 material 'rubber'")
cubit.cmd("block 1 2 element solid order 2")
cubit.cmd("volume all scheme Sweep")
cubit.cmd("volume all size " + str(mesh_size) )
cubit.cmd("mesh volume all")
cubit.cmd("analysis type effectiveprops elasticity dim3")
cubit.cmd("periodicbc on")
cubit.cmd("analysis type effectiveprops elasticity dim3")
cubit.cmd("periodicbc on")
```

## 2.4. Контрольная задача №2.4

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для слоистого композита, содержащего слои из двух материалов, один из которых моделируется оболочкой.

### Значения входных данных

Параметры материала:

Сталь:

- Модуль Юнга  $E = 2.0e5$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Плотность  $\rho = 7800$  кг / м<sup>3</sup>.

Резина:

- Модуль Юнга  $E = 2$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.49$ ;
- Плотность  $\rho = 1300$  кг / м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель:

- Куб со стороной = 1.3 м;
- Посередине (перпендикулярно оси Z) проходит слой стали толщиной 0.05, моделируемый оболочечными элементами.

Граничные условия:

- Периодическое условие.

Параметры сетки:

- Оболочка первого порядка.

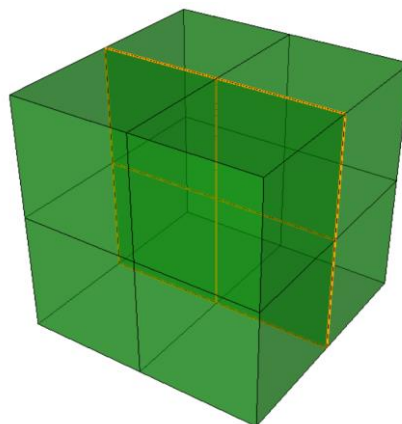


Рисунок 2.4 – Сетка 3D - оболочки (объемный вид)

### Ожидаемые результаты модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	8238.889
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	2083.752
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	33.342
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	3077.568
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.698
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	8238.889
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	33.342
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.698
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	35.597
10	Плотность	Density	кг / м <sup>3</sup>	1600
11	Модуль Юнга	E1=E2	Па	7694.38
12	Модуль Юнга	E3	Па	35.3816
13	Коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{21}$	-	0.250074
14	Коэффициент Пуассона	$\nu_{13} = \nu_{23}$	-	0.70242
15	Коэффициент Пуассона	$\nu_{31} = \nu_{32}$	-	0.00322999
16	Модуль сдвига	G12	Па	3077.57
17	Модуль сдвига	G13=G23	Па	0.698

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

$$7. E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси X.}$$



$$8. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси } Y.$$

$$9. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси } Z.$$

$$10. E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XY.$$

$$11. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } XZ.$$

$$12. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости } YZ.$$

Для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ .

Линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  представлена в виде:

$$a_{ij}^e = a_{ij}q.$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}.$$

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы для коэффициентов  $C_{ijkl}$  представляются в виде:

$$7) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q.$$

$$8) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q.$$

$$9) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \quad \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q.$$



$$10) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q.$$

$$11) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q.$$

$$12) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $C_{ijkl}$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$7) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)}.$$

$$8) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)}.$$

$$9) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)}.$$

$$10) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)}.$$

$$11) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)}.$$

$$12) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}.$$

Постановка данной задачи позволяет вычислить искомые значения только в виде приближенно численного решения.

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.
- [5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.
- [6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.



**Результаты**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные упругие модули	C_1111	Па	8238.889	8239.3564	0.01
2	Эффективные упругие модули	C_1122	Па	2083.752	2084.168	0.02
3	Эффективные упругие модули	C_1133	Па	33.342	32.885906	1.37
4	Эффективные упругие модули	C_1212	Па	3077.568	3077.5942	<<0.001
5	Эффективные упругие модули	C_1313	Па	0.698	0.67114094	3.85
6	Эффективные упругие модули	C_2222	Па	8238.889	8239.3564	0.01
7	Эффективные упругие модули	C_2233	Па	33.342	32.885906	1.37
8	Эффективные упругие модули	C_2323	Па	0.698	0.67114094	3.85
9	Эффективные упругие модули	C_3333	Па	35.597	34.228188	3.85
10	Плотность	Density	$кг / м^3$	1600	1600	0
11	Модуль Юнга	E1=E2	Па	7694.38	7694.4592	<<0.001
12	Модуль Юнга	E3	Па	35.3816	34.01867	3.85
13	Коэффициент Пуассона	$\nu_{12} = \nu_{21}$	-	0.250074	0.25007696	<<0.001
14	Коэффициент Пуассона	$\nu_{13} = \nu_{23}$	-	0.70242	0.72051429	2.58
15	Коэффициент Пуассона	$\nu_{31} = \nu_{32}$	-	0.00322999	0.0031855309	1.38
16	Модуль сдвига	G12	Па	3077.57	3077.5942	<<0.001
17	Модуль сдвига	G13=G23	Па	0.698	0.67114094	3.85

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
fidesys.cmd("reset")
fidesys.cmd("set default element hex")
rub_thick = 1.25
steel_thick = 0.05
steel_E = 2.0e5
steel_nu = 0.25
steel_alpha = 1.3e-5
steel_lambda = 40.0
steel_rho = 7800.0
```



```
rub_E = 2.0
rub_nu = 0.49
rub_alpha = 7.7e-5
rub_lambda = 1.0
rub_rho = 1300.0
mesh_size = 0.65
def lambda_Calc_E_nu(E, nu): return E * nu / ((1+nu)*(1-2*nu))
def G_Calc_E_nu(E, nu): return E / (2 + 2*nu)
# averaging over the volume
def aver(st, rub): return (steel_thick * st + rub_thick * rub) / (rub_thick + steel_thick)
fidesys.cmd("brick x " + str(rub_thick + steel_thick) )
fidesys.cmd("webcut volume all with plane zplane offset 0 merge ")
fidesys.cmd("create material 1")
fidesys.cmd("modify material 1 name 'steel'")
fidesys.cmd("modify material 1 set property 'MODULUS' value " + str(steel_E) )
fidesys.cmd("modify material 1 set property 'POISSON' value " + str(steel_nu) )
fidesys.cmd("modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value " + str(steel_alpha) )
fidesys.cmd("modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value " + str(steel_lambda) )
fidesys.cmd("modify material 1 set property 'DENSITY' value " + str(steel_rho) )
fidesys.cmd("create material 2 ")
fidesys.cmd("modify material 2 name 'rubber'")
fidesys.cmd("modify material 2 set property 'MODULUS' value " + str(rub_E) )
fidesys.cmd("modify material 2 set property 'POISSON' value " + str(rub_nu) )
fidesys.cmd("modify material 2 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value " + str(rub_alpha) )
fidesys.cmd("modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value " + str(rub_lambda) )
fidesys.cmd("modify material 2 set property 'DENSITY' value " + str(rub_rho) )
fidesys.cmd("set duplicate block elements off")
fidesys.cmd("block 1 add surface 7")
fidesys.cmd("set duplicate block elements off")
fidesys.cmd("block 2 add volume 1 2")
fidesys.cmd("block 1 material 1")
fidesys.cmd("block 2 material 2")
fidesys.cmd("block 1 element shell order 1")
fidesys.cmd("block 2 element solid order 1")
fidesys.cmd("create shell properties 1")
fidesys.cmd("modify shell properties 1 thickness " + str(steel_thick))
fidesys.cmd("modify shell properties 1 eccentricity 0.5")
fidesys.cmd("block 1 shell properties 1")
fidesys.cmd("volume all scheme Sweep")
fidesys.cmd("volume all size " + str(mesh_size) )
fidesys.cmd("mesh volume all")
fidesys.cmd("analysis type effectiveprops heattrans elasticity dim3 preload off")
fidesys.cmd("periodicbc on")
fidesys.cmd("solver method direct use_uzawa no try_other off")
fidesys.cmd("output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off")
```

## 2.5. Контрольная задача №2.5

### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для пористого материала периодической структуры, с порами сферической формы.

### *Значения входных данных*

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 1$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.4$ ;
- Плотность  $\rho = 1$  кг / м<sup>3</sup>.

Геометрическая модель:

- Куб со стороной = 1 м;
- В центре отверстие в виде шара радиусом 0.228542449528.

Граничные условия:

- Периодическое условие.

Параметры сетки:

- Тетраэдры второго порядка.

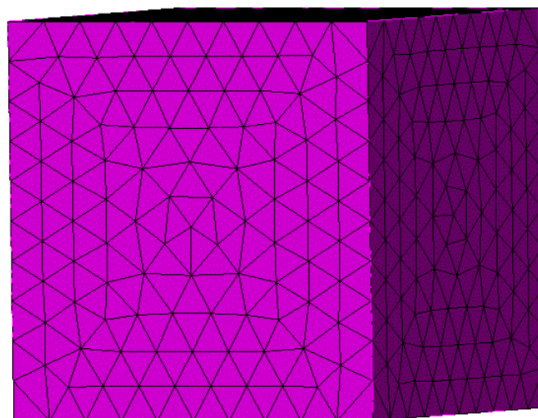


Рисунок 2.5 – Сетка 3D - тетраэдры

**Ожидаемые результаты модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.383928510975
2	Модуль Юнга	E	Па	0.899553532133
3	Плотность	Density	$кг / м^3$	0.95

**Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения**

К представительному объёму прикладывается шесть видов деформаций, каждому из которых соответствует свой вид эффективного тензора деформаций  $E^e$ :

$$1. E_e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси X.}$$

$$2. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси Y.}$$

$$3. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} - \text{растяжение/сжатие вдоль оси Z.}$$

$$4. E_e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости XY.}$$

$$5. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости XZ.}$$

$$6. E_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} - \text{сдвиг в плоскости YZ.}$$

Для каждой из шести краевых задач был задан эффективный тензор деформаций  $E^e$  - а получен эффективный тензор напряжений  $\sigma^e$ .

Линейная зависимость  $\sigma^e$  от  $q$  представлена в виде:

$$a_{ij}^e = a_{ij}q.$$

Поскольку величину деформаций  $q$  и соответствующий ей тензор  $\sigma^e$  известны - тензорный коэффициент зависимости  $a_{ij}$  вычисляется по формуле:

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij}^e}{q}.$$

Поскольку эффективные свойства оцениваются в виде обобщённого закона Гука

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl},$$

учитывая вид  $E^e$  в каждой задаче, формулы для коэффициентов  $C_{ijkl}$  представляются в виде:



$$1) E^e = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij11}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(1)}q.$$

$$2) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij22}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(2)}q.$$

$$3) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ij33}q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(3)}q.$$

$$4) E^e = \begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij12} + \sigma_{ij21})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(4)}q.$$

$$5) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij13} + \sigma_{ij31})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(5)}q.$$

$$6) E^e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q \\ 0 & q & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma_{ij} = (\sigma_{ij23} + \sigma_{ij32})q, \sigma_{ij} = \alpha_{ij}^{(6)}q.$$

Отсюда коэффициенты  $C_{ijkl}$  вычисляются из соответствующих  $\alpha_{ij}$ :

$$1) C_{ij11} = \alpha_{ij}^{(1)}.$$

$$2) C_{ij22} = \alpha_{ij}^{(2)}.$$

$$3) C_{ij33} = \alpha_{ij}^{(3)}.$$

$$4) C_{ij12} = C_{ij21} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(4)}.$$

$$5) C_{ij13} = C_{ij31} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(5)}.$$

$$6) C_{ij23} = C_{ij32} = \frac{1}{2}\alpha_{ij}^{(6)}.$$

Постановка данной задачи позволяет вычислить искомые значения только в виде приближенно численного решения.

#### Список литературы

- [1] Бидерман В.Л., Гуслицер Р.Л., Захаров С.П., Ненахов Б.В., Селезнев И.И., Цукерберг С.М. Автомобильные шины (конструкция, расчет, испытание, эксплуатация). – Под общей редакцией Бидермана В.Л. – М.: Государственное научно-техническое изд-во химической литературы, 1963. – 384 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.
- [4] Mohammad Ali Bagheri, Antonin Settari Effects of fractures on reservoir deformation and flow modeling // Canadian Geotechnical Journal, Vol 43, 2006. - P. 574-586.



[5] Hashin, Z, and Shtrikman, S, 1963, A variational approach to the elastic behavior of multiphase minerals. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 11 (2), 127-140.

[6] Kachanov M., Tsukrov I., Shafiro B. Effective moduli of solids with cavities of various shapes // Applied Mechanics Reviews, Vol. 47, No. 1, Part 2, 1994 - P. 151-174.

## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Коэффициент Пуассона	$\nu$	-	0.383928510975	0.388215587	1.12
2	Модуль Юнга	E	Па	0.899553532133	0.916450489	1.88
3	Плотность	Density	$кг / м^3$	0.95	0.95342265	0.36

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set node constraint off
#{Pi = 3.1415926}
#{cube_size = 1.0}
#{ratio = 0.05} # porosity
#{E_m = 1.0}
#{nu_m = 0.4}
##{E_i = 100.0}
###{nu_i = 0.25}
#{sphere_rad = (0.75 * ratio * cube_size^3 / Pi)^0.33333}
create brick width {cube_size}
create sphere radius {sphere_rad}
subtract volume 2 from volume 1
create material 1 name 'matr'
modify material 1 set property 'MODULUS' value {E_m}
modify material 1 set property 'POISSON' value {nu_m}
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1.0
volume all size 0.1 #order,quality: 3,1
volume all scheme Tetmesh
mesh volume all
block 1 volume 3
block 1 material 'matr'
block 1 element solid order 2
#{G_m = E_m / (2.0 + 2.0*nu_m)} # shear modulus from Young's modulus and Poisson's ratio
#{K_m = E_m / (3.0 - 6.0*nu_m)} # bulk modulus from Young's modulus and Poisson's ratio
#{G_eff = G_m * (1.0 - 15.0*(1 - nu_m)*ratio / (7.0 - 5.0*nu_m))}
#{K_eff = K_m - K_m*ratio / (1.0 - K_m/(K_m + 1.33333*G_m))}
#{E_eff = 9.0*K_eff*G_eff / (3.0*K_eff + G_eff)} # Young's modulus from shear modulus and bulk modulus
#{nu_eff = (3.0*K_eff - 2.0*G_eff) / (6.0*K_eff + 2.0*G_eff)} # Poisson's ratio from shear modulus and bulk modulus
analysis type effectiveprops elasticity dim3
periodicbc on

```

## 2.6. Контрольная задача №2.6

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается динамическая задача о квадрате, стороны которого перемещаются по заданным законам от времени. В данной постановке квадрат разделен на 4 части по диагоналям - три контактные пары (одна пара - нахлест, две пары - зазор).

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Сторона квадрата  $a = 10$  м.

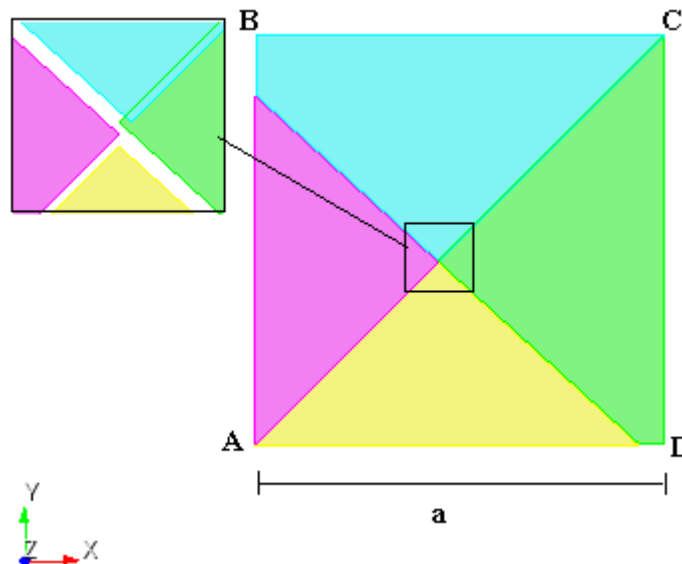


Рисунок 2.6 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Сторона АВ закреплена по оси X;
- Сторона AD закреплена по оси Y;
- Перемещение стороны CD по оси X равно  $-4 \cdot e^{-70 \cdot t} \cdot \sin(314 \cdot t + 3.14)$ ;
- Перемещение стороны BC по оси Y равно  $-8 \cdot e^{-70 \cdot t} \cdot \sin(314 \cdot t + 3.14)$ ;
- Три контактные пары - (автовывбор главной и побочной сущности);
- Точность контакта - 0.03 для всех контактных пар.

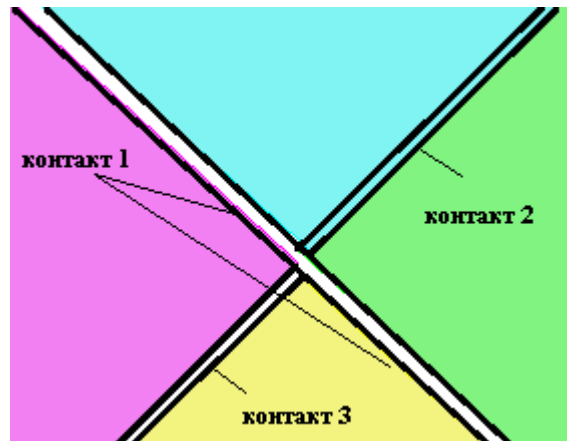


Рисунок 2.7 - Контактные пары

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E=2e11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ ;
- Плотность  $\rho=7900$  кг/м<sup>3</sup>.

Параметры сетки:

- Смешанная неконформная сетка порядка;
- Конечные элементы: квадраты и треугольники.

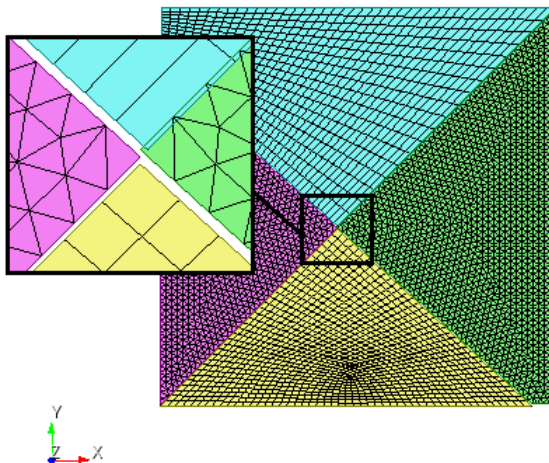


Рисунок 2.7 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Временной анализ;
- Схема: неявная;
- Максимальное время:  $2e-2$ ;
- Шаг по времени:  $6e-5$ .





## Описание алгоритма численного решения

В качестве эталонного решения выступают данные, полученные в пакете ANSYS.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в точке (0, 0, 0)	Displacement X	м	0.423	0.40984529	3.11
2	Компонента Y вектора перемещений в точке (0, 0, 0)	Displacement Y	м	0.845	0.81715182	3.3

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
create surface rectangle width 10.1 zplane
webcut body 1 with general plane location 0 -1 0 direction 1 1.1 0
webcut body 2 1 with plane xplane rotate -45 about z center 0 0 0
move Surface 5 y -0.025 include_merged
move Surface 4 y -0.025 include_merged
move Surface 4 y -0.025 include_merged
move Surface 7 x 0.025 include_merged
webcut body 1 2 3 with general plane location 0 -4.95 0 direction 0 1 0
delete surface 9 11
webcut body 3 4 with general plane location -4.98 0 0 direction 1 0 0
webcut body 1 4 with general plane location 5.02 0 0 direction 1 0 0
delete surface 13 15 17 18 20
surface 21 19 size auto factor 1
surface 14 10 size auto factor 1
surface 14 10 scheme trimesh
surface 21 19 scheme auto
mesh surface all
create material 1
modify material 1 name 'Material 1'
modify material 1 set property 'DENSITY' value 7900
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e11
block 1 surface all
block 1 material 'Material 1'
block 1 element plane order 2
create displacement on curve 43 37 dof 1 fix 0
create displacement on curve 25 38 54 dof 2 fix 0
create displacement on curve 52 58 dof 1 fix 1
create displacement on curve 59 dof 2 fix 1
set node constraint on

```



```
bcdep displacement 3 value '-4*exp(-70*t)*sin(314*t+3.14)'  
bcdep displacement 4 value '-8*exp(-70*t)*sin(314*t+3.14)'  
create contact master curve 27 slave curve 32 tolerance 0.08 type tied method auto  
create contact master curve 39 slave curve 44 tolerance 0.08 type tied method auto  
create contact master curve 60 slave curve 53 tolerance 0.08 type tied method auto  
create contact master curve 21 slave curve 26 tolerance 0.08 type tied method auto  
analysis type dynamic elasticity dim2  
dynamic method full_solution scheme implicit maxtime 2e-2 timestep 6e-5 newmark_gamma 0.005  
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 10 tolerance 1e-3  
output nodalforce off results everystep 1000
```

## 2.7. Контрольная задача №2.7

### Назначение контрольной задачи

Расчет напряженно-деформированного и теплового состояния массивных шин при величинах осевой нагрузки от 0 до 100 т. Рассмотрим типовую модель массивной шины (см. рисунок 2.8). Будем полагать, что механические свойства резины и стали шины описываются законом Гука.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- $R1 = 0.1$  м;
- $R2 = 0.2$  м;
- $R3 = 0.21$  м;
- $R4 = 0.26$  м;
- $H1 = 0.07$  м;
- $H2 = 0.01$  м.

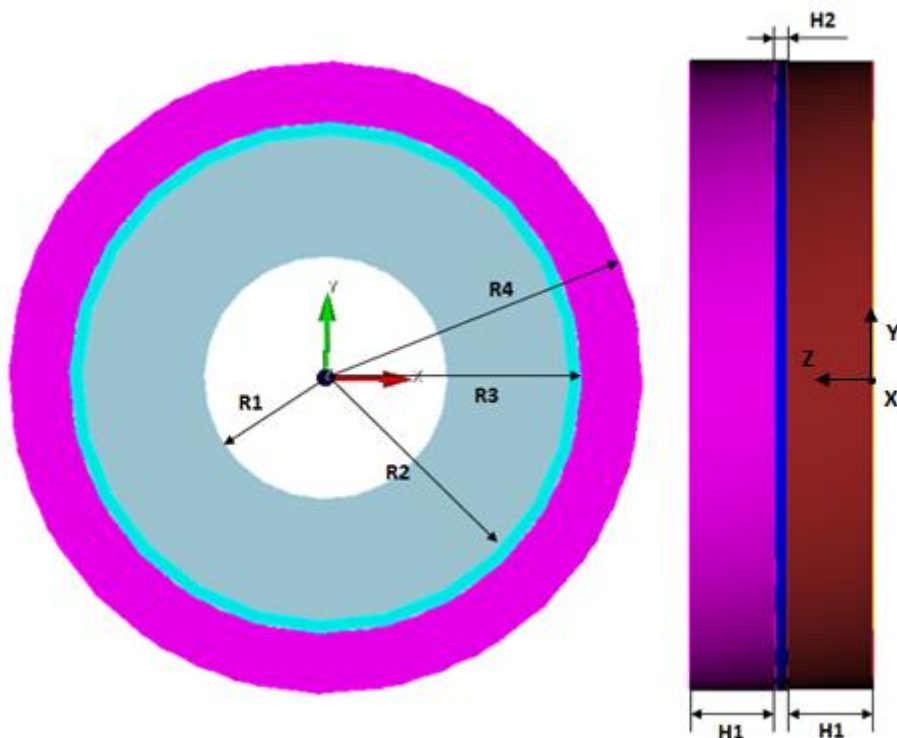


Рисунок 2.8 - Проекция массивной шины

Граничные условия:

- Условие защемления:  $\vec{u}|_{z=0} = \vec{0}$ ;
- Осевая нагрузка, моделируемая давлением на левом торце шины ( $Z = 2 H1 + H2$ ):  $p = 1000 \cdot t$ ;
- Осевое ускорение на внутренней поверхности  $r = R1$  (цилиндрическая СК)  $a_z = 0.01$  м/с<sup>2</sup>;

- Температура 25 °С на всём объеме массивной шины.

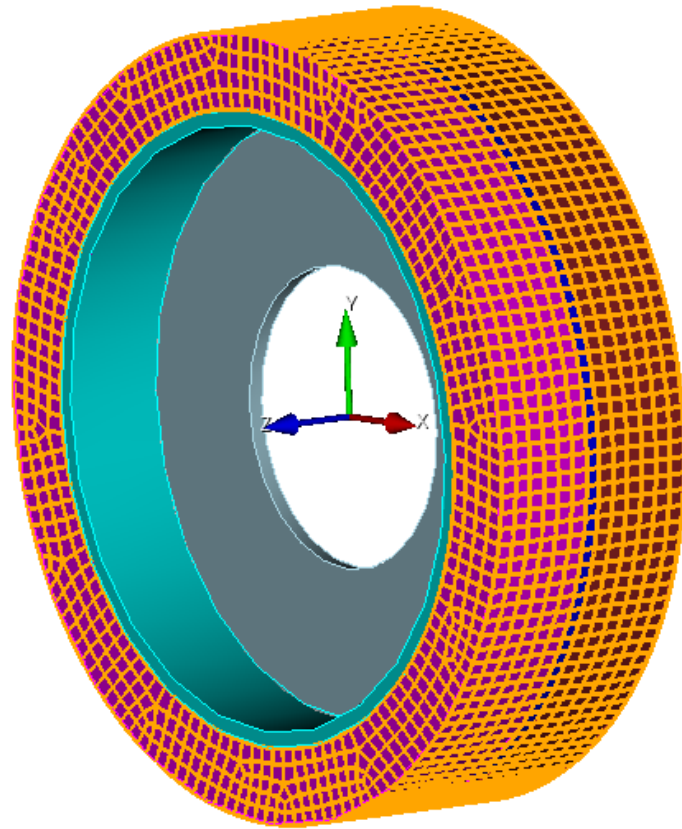


Рисунок 2.9 - 3D вид массивной шины

Параметры материала:

- Сталь:
  - Модуль упругости  $E = 210$  ГПа;
  - Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
  - Плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;
  - Коэффициент температурного расширения  $\alpha = 1.2e-5$  °С<sup>-1</sup>;
  - Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 58$  Вт/(м·К);
  - Коэффициент удельной теплоемкости  $c = 462$  Дж/(кг·К).
- Резина:
  - Модуль упругости  $E = 5$  МПа;
  - Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.45$ ;
  - Плотность  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>;
  - Коэффициент температурного расширения  $\alpha = 7.7e-5$  °С<sup>-1</sup>;
  - Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 0.1$  Вт/(м·К);
  - Коэффициент удельной теплоемкости  $c = 1420$  Дж/(кг·К).

Параметры сетки:

- Гексаэдральная сетка.

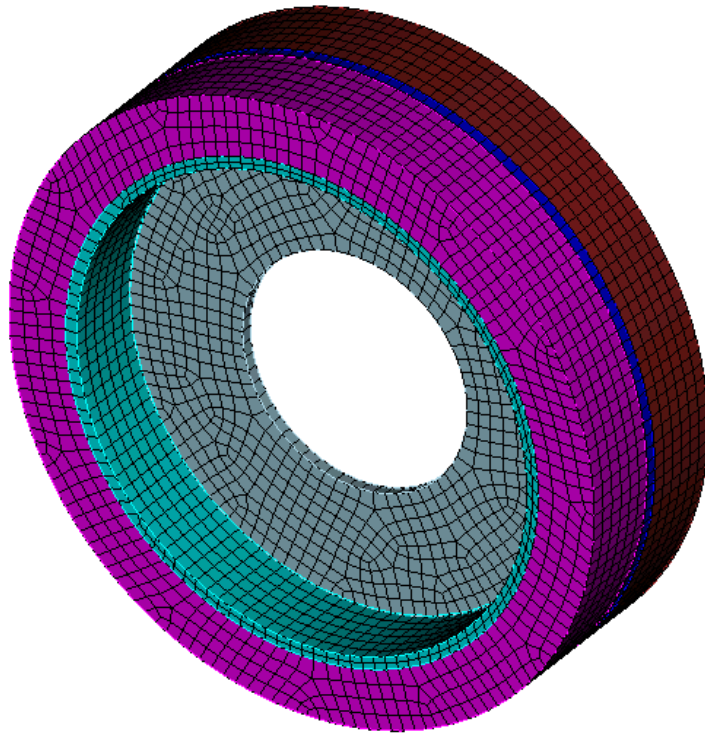


Рисунок 2.10 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Временной анализ;
- Схема: Неявная;
- Упругость;
- Теплопроводность;
- Максимальное время: 1000;
- Число шагов: 10.

### Описание алгоритма численного решения

В качестве эталонного выступает решение ANSYS.

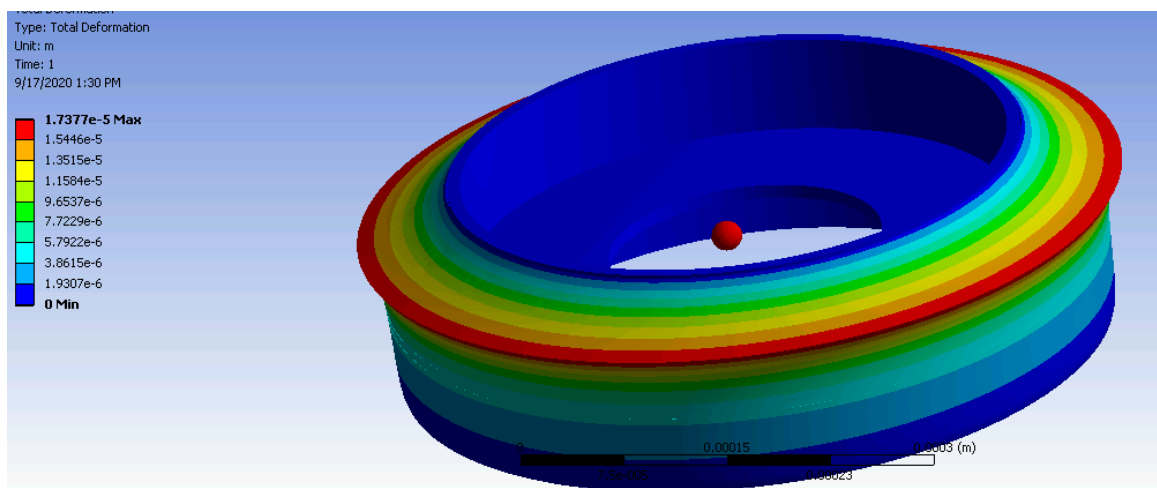




Рисунок 2.11 - Решение задачи в ANSYS

**Результаты расчета**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений $u_z$ в точке (0.26; 0; 0.15)	Displacement Z	м	0.0171	0.016878524	1.3

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
#{tireOuterHeight = 0.15}
#{tireThinHeight = 0.01}
#{wideSteelInnerR = 0.2}
#{thinSteelInnerR = 0.1}
#{wideSteelH = 0.01}
#{wideRubberH = 0.05}
set node constraint off
create Cylinder height {tireOuterHeight} radius {wideSteelInnerR}
create Cylinder height {tireOuterHeight} radius {wideSteelInnerR + wideSteelH}
create Cylinder height {tireOuterHeight} radius {wideSteelInnerR + wideSteelH + wideRubberH}
subtract body 1 from body 2 keep
subtract body 2 from body 3
delete volume 1
webcut body all with plane zplane offset {tireThinHeight/2}
webcut body all with plane zplane offset {-tireThinHeight/2}
create Cylinder height {tireThinHeight} radius {wideSteelInnerR}
create Cylinder height {tireThinHeight} radius {thinSteelInnerR}
subtract body 10 from body 9
merge all
create material 1
modify material 1 name 'steel'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 7800
modify material 1 set property 'SPECIFIC_HEAT' value 462
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 58
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1.2e-05
create material 2
modify material 2 name 'rubber'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 5e6
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.45
modify material 2 set property 'DENSITY' value 1200
modify material 2 set property 'SPECIFIC_HEAT' value 1420
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 0.1
modify material 2 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 7.7e-05

```



```
block 1 volume 3 5 7
block 2 volume 4 6 8 9
block 1 material 2
block 2 material 1
block 1 element solid order 2
block 2 element solid order 2
volume all size auto factor 4
mesh volume all
create temperature on volume all value 25
create displacement on surface 12 15 dof all fix 0
create pressure on surface 13 16 magnitude 0
bcdep pressure 1 value '(1e3)*t'
#create acceleration on surface 47 dof 3 fix 0.01
analysis type dynamic heattrans elasticity dim3
dynamic method full_solution scheme implicit maxtime 1000 steps 10
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 10 tolerance 1e-3 targetiter 5
```

## 2.8. Контрольная задача №2.8

### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается переходный процесс нагружения стержневой конструкции сосредоточенной силой. В задаче проверяются максимальные полные перемещения в момент 1 сек, а также равенство максимальных полных перемещений нулю в момент 5 сек.

### *Значения входных данных*

Геометрическая модель:

- Геометрия фермы построена в стороннем CAD пакете и импортируется как файл с расширением stp (Truss.stp).

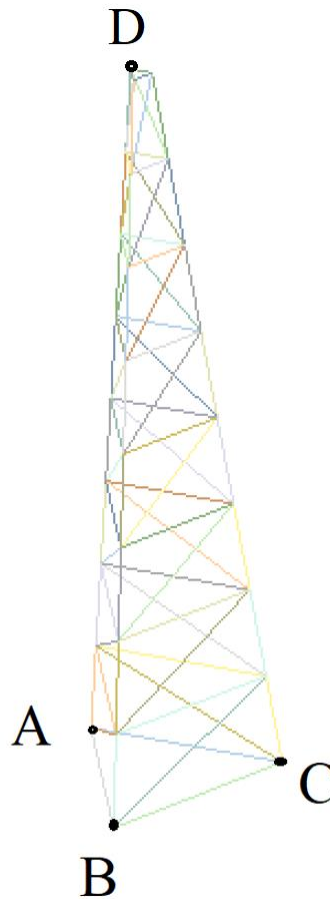


Рисунок 2.12 - Геометрическая модель

Граничные условия

- Закрепление по всем перемещениям в точках A, B, C.
- В точке D приложена точечная сила, зависящая от времени по закону в табличном виде (таблица 2.8)





Таблица 2.8 Задание зависимости от времени для силы

Время	Значение силы, Н
0	0
1	$10^5$
2	0
5	0

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  Гпа;
- Плотность  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Сетки:

- Балочные конечные элементы первого порядка;
- Сечение балочных элементов: полая труба, внешний радиус 100мм, внутренний радиус 90 мм.

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Неявная схема;
- Метод Ньютона-Рафсона;
- На первом этапе, с 0 сек до 2 сек, использовался шаг 0,01 сек;
- На втором этапе. С 2 сек до 5 сек, использовался шаг 0,1 сек;
- Максимальное время - 5 с;
- Максимальное количество шагов 230;
- Вывод каждого 10 шага в .vtu файл.

## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Задача имеет численное решение, полученное в пакете ANSYS.

### A: Transient Structural

Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: m  
Time: 1,  
17.09.2020 14:45

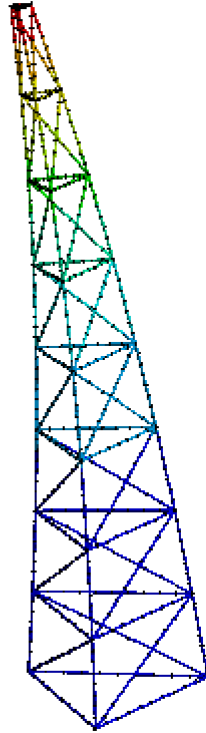
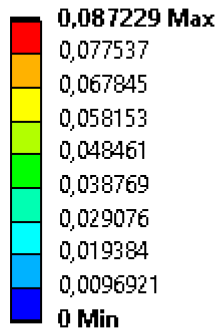


Рисунок 2.13 – Полные перемещения в момент времени  $t = 1$  с, м

### A: Transient Structural

Total Deformation  
Type: Total Deformation  
Unit: m  
Time: 5,  
17.09.2020 14:46

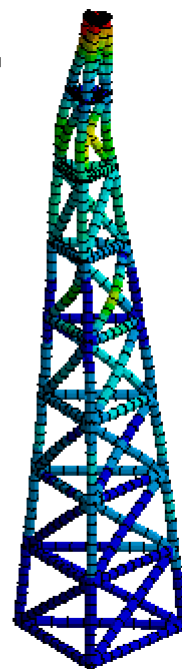
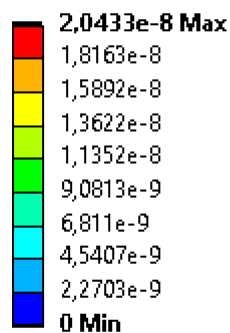


Рисунок 2.14 – Полные перемещения в момент времени  $t = 5$  с, м



## Результаты расчета

Ниже приведены значения для перемещений в точке (6.06032, 4.81675, 49.3827) в момент времени  $t = 1$  с.

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки	Displacement X	м	0	5.4466067e-05	0.01
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Y	м	8.72e-2	8.7121458e-02	0.09
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Z	м	-3.48e-3	-3.4934805e-03	0.39

Ниже приведены значения для перемещений в точке (6.06032, 4.81675, 49.3827) в последний момент времени  $t = 5$  с.

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки	Displacement X	м	0	0	0
2	Компонента Y вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Y	м	0	0	0
3	Компонента Z вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Z	м	0	0	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
import step "C:\Users\ Truss.stp" heal
merge vertex all
curve all interval 5
curve all scheme equal
mesh curve all
create material 1 from 'Steel'
modify material 1 set property 'DENSITY' value 7800
set duplicate block elements off
block 1 add curve all
block 1 material 1
create beam properties 1
modify beam properties 1 type 'Circle With Offset Hole'
modify beam properties 1 angle 0.0
modify beam properties 1 ey 0.0
modify beam properties 1 ez 0.0
modify beam properties 1 geom_D1 200e-3
modify beam properties 1 geom_D2 180e-3

```



```
modify beam properties 1 geom_e 0
modify beam properties 1 mesh_quality 5
modify beam properties 1 warping_dof off
block 1 element beam order 1
block 1 beam properties 1
create displacement on vertex 4 2 1 dof all fix
create force on vertex 54 force value {1e5} direction 0 1 0
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 2 1 value 1
modify table 1 cell 3 1 value 2
modify table 1 cell 4 1 value 5
modify table 1 cell 2 2 value 1e5
bcdep force 1 table 1
analysis type dynamic elasticity dim3 preload on
dynamic method full_solution scheme implicit maxtime 5 steps 500 newmark_gamma 0.005
damping mass_matrix 0 stiffness_matrix 0.05
solver method direct use_uzawa auto try_other off
output nodalforce off energy off record3d off log on vtu on material off results everystep 10
```

## 2.9. Контрольная задача №2.9

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача Лэмба, которая представляет собой задачу о динамическом воздействии на границу упругой полуплоскости, состоящей из двух слоев из разных материалов, сосредоточенной или распределенной нагрузки, меняющейся по времени по закону Берлаге.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Представлена на рисунке 2.15.

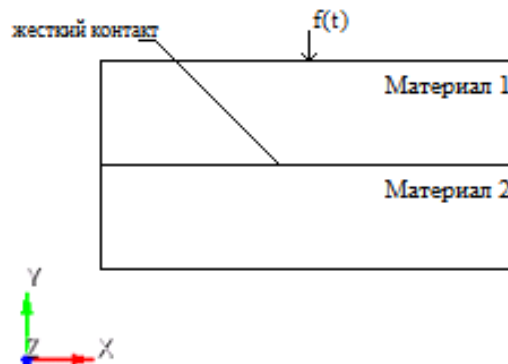


Рисунок 2.15 – Геометрическая модель

Граничные условия:

- Точечная сила задается с помощью формулы Берлаге:

$$f(t) = A \cdot \frac{\omega_1^2 e^{-\alpha t}}{4} \left( \sin(\omega_0 t) \left( -\frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_1^3} \right) - \cos(\omega_0 t) \sqrt{3} \left( \frac{t^2}{\omega_1} + \frac{t}{\omega_1^2} \right) \right), \omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{3}}, \omega_0 = 2\pi\omega$$

где  $A$  - амплитуда,  $\omega$  - частота,  $t$  - время;

- На нижние и боковые грани приложены неотражающие условия.

Параметры материала верхнего слоя:

- Модуль Юнга  $E = 2e+08$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 1900$ ;
- Когезия  $K = 29000$ ;
- Угол внутреннего трения  $\alpha = 20$ ;
- Угол дилатансии  $\beta = 10$ .

Параметры материала нижнего слоя:

- Модуль Юнга  $E = 3e+08$ ;



- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 1900$ ;
- Когезия  $K = 29000$ ;
- Угол внутреннего трения  $\alpha = 20$ ;
- Угол дилатансии  $\beta = 10$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Спектральные элементы 3 порядка.

Сетка должна быть из плоских четырехугольников, высота  $h = 500$  элемента рассчитывается в соответствии с длиной волны.

Настройки контакта:

- Тип: связанный;
- Точность 0.0005;
- Метод: MPC.

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- Максимальное время – 5 с;
- Максимальное количество шагов 2025;
- Вывод каждого 135 шага в .vtu файл.

## Результаты расчета

Значения перемещений проверяются в точке (70.4225, 4.31214e-15, 0).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 6	Displacement X	м	-0.00110025	-0.0011002442	<<0.01
2	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 6	Displacement Y	м	0.000517095	0.0005170749	<<0.01
3	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 8	Displacement X	м	-4.78016e-05	-4.77981576e-05	0.01
4	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки на шаге 8	Displacement Y	м	-0.000445372	-0.00044537078	<<0.01



## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Значения получены в сравнении с полной моделью, без использования связанного контакта.

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hexzplane
webcut body 1 with plane xplane offset 0
webcut body 1 with plane yplane offset 0
delete Surface 3
rotate Surface 4 5 angle -90 about Z include_merged
webcut body 3 1 with plane yplane offset -250
merge curve 18 25
merge curve 22 27
surface all size 7
mesh surface all
create material 1
modify material 1 name 'Material1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+08
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1900
modify material 1 set property 'COHESION' value 29000
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 20
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 10
create material 2
modify material 2 name 'Material2'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2e+08
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'DENSITY' value 1900
modify material 2 set property 'COHESION' value 29000
modify material 2 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 20
modify material 2 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 10
set duplicate block elements off
block 1 add surface 9 7
set duplicate block elements off
block 2 add surface 8 6
block 1 material 1
block 2 material 2
block 1 2 element plane order 3
create absorption on curve 28 24 13 15 19 21
create force on vertex 10 force value 1 direction 0 -1 0
bcdep force 1 value 'berlage(1e+8, 10, time)'
create receiver on curve 16 displacement 1 1 1
#create receiver on curve 16 velocity 1 1 1
#create receiver on curve 16 principalstress 1 1 1
#create receiver on curve 16 pressure
create contact master curve 17 23 slave curve 20 26 tolerance 0.0005 type tied method auto
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off
dynamic method full_solution scheme explicit maxtime 3 maxsteps 2025
output nodalforce off energy off record3d on log on vtu on material off results everystep 135
```

## 2.10. Контрольная задача №2.10

### *Назначение контрольной задачи*

В задаче рассматривается подвешенная балка с квадратным сечением, закреплённая в верхней секции. Осевая растягивающая сила приложена к свободному концу балки.

### *Значения входных данных*

Геометрическая модель:

- Высота балки  $L = 10$  in (дюйм);
- Ширина балки  $d = 2$  in (дюйм);
- Геометрия импортируется из файла 01\_model.stp.

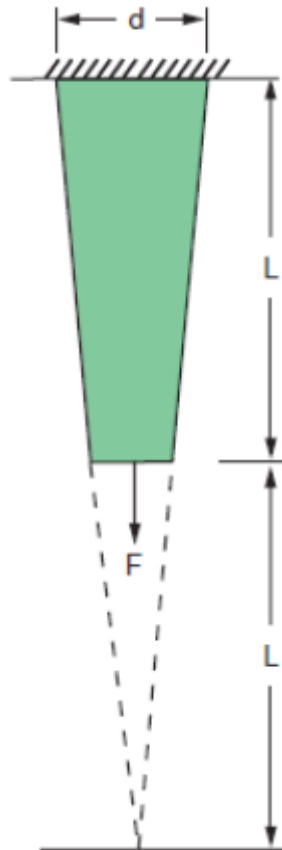


Рисунок 2.16 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей на плоскости  $Y = 0$ ;
- Осевая сила  $F = 5000, 7500, 10\,000$  lb (фунт), приложенная ко всем узлам плоскости  $Y = L$ .
- Количество шагов нагружения: 3



Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 10.4e + 6$  psi (фунт-сила на квадратный дюйм);
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Параметры сетки:

- Конформная сетка второго порядка.
- Конечные элементы: гексаэдры.

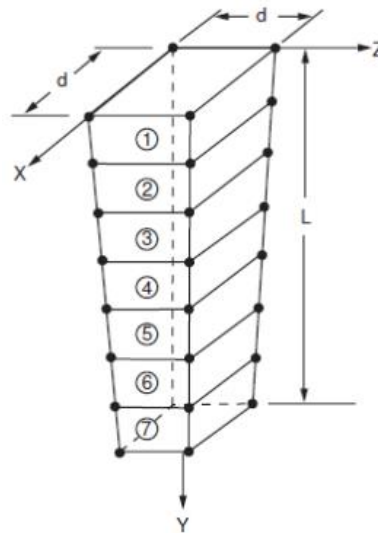


Рисунок 2.17 - Конечно-элементная сетка модели

### Описание алгоритма численного решения

В качестве эталонного выступает решение ANSYS задача VM37 [1].

Список литературы

[1] Verification Manual for the Mechanical APDL Application, SAS IP, Inc 2009

### Результаты расчета

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Шаг 3	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений в точке (1, L/2, 1)	Stress YY	psi	4444	4443.109	0.02
2	Шаг 3	Номер шага	безразмерная	-	3	3	-



Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
import step "01_model.stp"
#import step "D:/Комплект численных решений/CAD/01_model.stp" heal
move Volume 1 x 1 y 0 z 1 include_merged
volume 1 size auto factor 10
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1.04e+07
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
set duplicate block elements off
block 1 add volume 1
block 1 material 1 cs 1 element solid order 2
create displacement on surface 4 dof all fix
create pressure on surface 2 magnitude -10000
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 3 1 value 3
modify table 1 cell 1 2 value -5000
modify table 1 cell 2 2 value -7500
modify table 1 cell 3 2 value -10000
bcdep pressure 1 table 1
analysis type static elasticity dim3
static steps 3
```

## 2.11. Контрольная задача №2.11

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о проверке способности контактных алгоритмов передавать равномерное давление с использованием неконформной нерегулярной сетки.

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

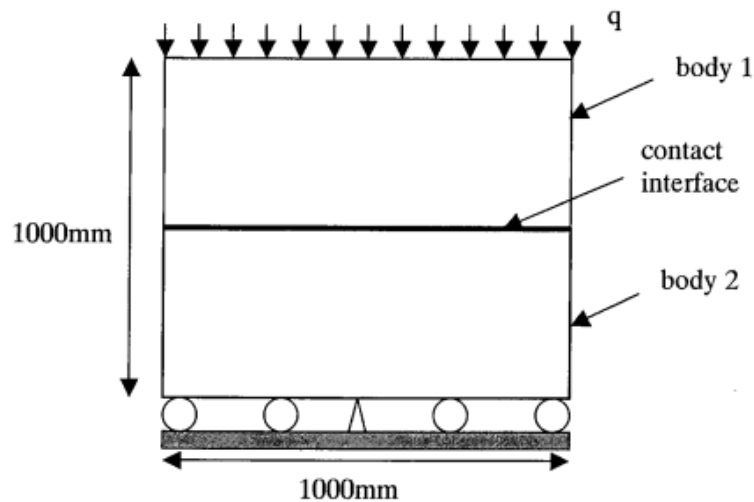


Рисунок 2.18 - Геометрическая модель

Граничные условия:

- Нижняя сторона фундамента закреплена по вертикальным перемещениям, центр этой стороны закреплён по всем направлениям;
- Для улучшения сходимости задачи добавлено закрепление вершины 2 по оси x;
- Давление  $q = 40000 \text{ Н/м}^2$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 100 \text{ Мпа}$ ;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Параметры сетки:

- Неконформная нерегулярная сетка, элементы первого порядка.

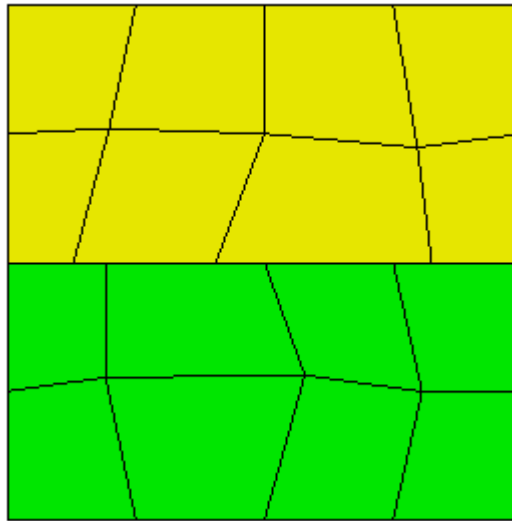


Рисунок 2.19 – Неконформная нерегулярная сетка

Настройки контакта:

- Тип: общий;
- Точность 0.0005;
- Метод: автовыбор.

Настройки расчета:

- Статика;
- Упругость.

### ***Ожидаемые результаты модуля***

Ниже приведены значения для напряжения в контакте в точках с координатами  $(-0.5, 0.001, 0)$ ,  $(0, 0.001, 0)$  и  $(0.5, 0.001, 0)$ .

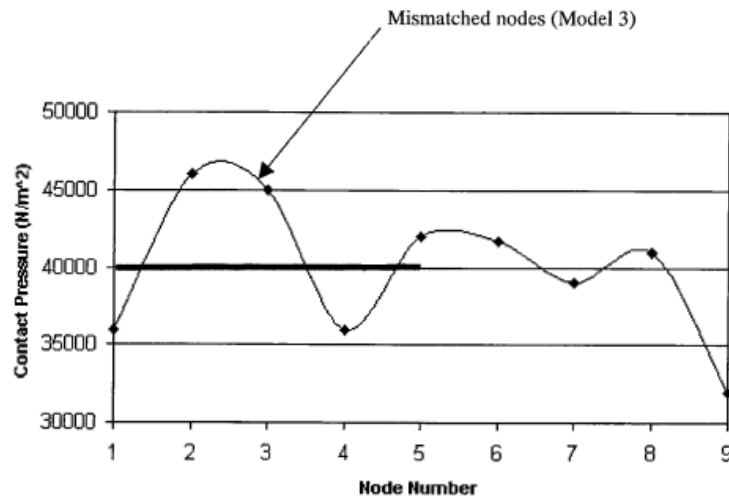
№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке $(-0.5, 0.001, 0)$	Contact Stress N	Па	40000
2	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке $(0, 0.001, 0)$	Contact Stress N	Па	40000



3	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0.5,0.001,0)	Contact Stress N	Па	40000
---	---	------------------	----	-------

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Ожидаемые результаты [1]:



Список литературы

[1] NAFEMS R0081 - Benchmark Tests for Finite Element Modelling of Contact, Gapping and Sliding

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (-0.5,0.001,0)	Contact Stress N	Па	40000	39839.9999	0.4
2	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0.001,0)	Contact Stress N	Па	40000	39836.085	0.41
3	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0.5,0.001,0)	Contact Stress N	Па	40000	39840	0.4

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:



```
reset
set default element hex
create surface rectangle width 1 height 1 zplane
webcut body 1 with plane yplane offset 0
partition create curve 3 position 0 -50 0
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1e+8
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
curve 1 interval 4
curve 1 scheme equal
mesh curve 1
curve 9 10 interval 2
curve 9 10 scheme equal
mesh curve 9 10
mesh surface 3
node 12 move X -0.120828 Y 0.000000 Z 0.000000
node 11 move X -0.094434 Y 0.000000 Z 0.000000
node 10 move X 0.074762 Y 0.000000 Z 0.000000
node 13 move X -0.058639 Y 0.049426 Z -0.000000
node 15 move X 0.047123 Y -0.026582 Z -0.000000
node 13 move X 0.006909 Y -0.039155 Z -0.000000
curve 7 6 interval 2
curve 7 6 scheme equal
mesh curve 7 6
curve 11 3 interval 2
curve 11 3 scheme equal
mesh curve 11 3
surface 2 size auto factor 10
mesh surface 2
node 27 move X -0.058639 Y 0.000000 Z 0.000000
node 30 move X -0.058639 Y 0.026582 Z -0.000000
node 29 move X 0.078311 Y 0.031188 Z -0.000000
node 28 move X 0.056336 Y -0.001057 Z -0.000000
block 1 add surface 2
block 2 add surface 3
block all material 'mat1'
block 1 element plane order 1
block 2 element plane order 1
create displacement on vertex 9 dof all fix
create displacement on curve 3 11 dof 2 fix
create displacement on vertex 2 dof 1 fix
create pressure on curve 1 magnitude 40000
create contact master curve 5 slave curve 8 type general friction 0.0 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.0005 method auto
analysis type static elasticity dim2 planestrain
```

## 2.12. Контрольная задача №2.12

### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается задача о проверке способности контактных алгоритмов передавать суммарные перемещения с использованием неконформной нерегулярной сетки с применением жесткого контакта.

### *Значения входных данных модуля*

Геометрическая модель:

- Геометрия импортируется из файла 02\_model.stp.

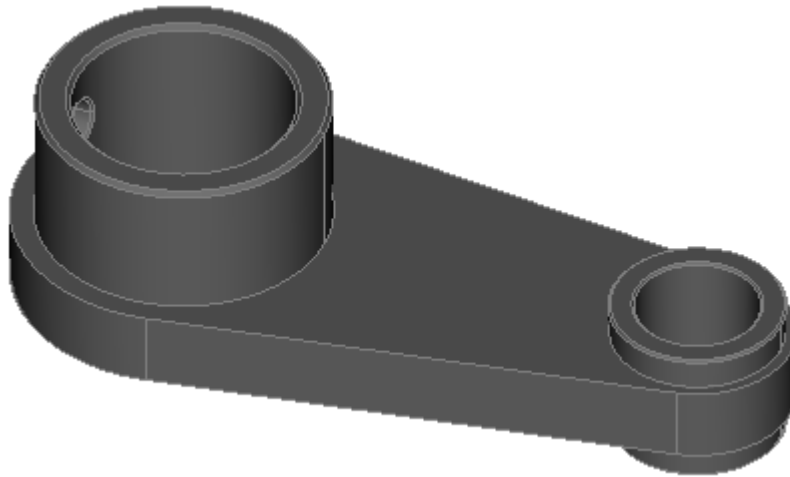


Рисунок 2.20 - Геометрическая модель

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 7850$  кг / м<sup>3</sup>.

Параметры сетки:

- Конечные элементы второго порядка.

Граничные условия:

- Внутренняя поверхность большего цилиндра жестко закреплена;
- На верхнюю поверхность малого цилиндра действует давление  $p = 1e5$  кг / м<sup>3</sup> ;
- Связанный контакт с точностью 0.25.

Для корректных результатов перед запуском на расчет модель следует отмасштабировать на 0.001.  
Настройки расчета:

- Статический линейный расчет.

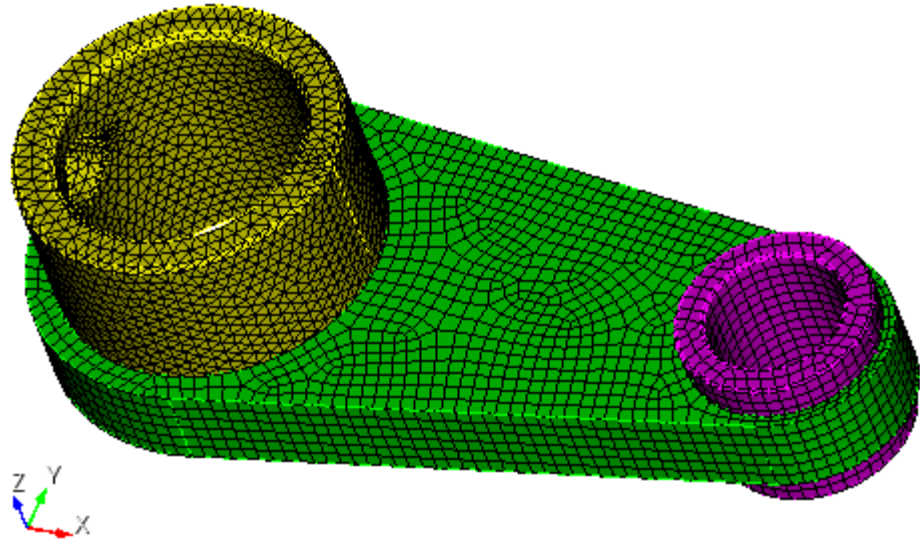


Рисунок 2.21 - Модель с отображенной сеткой

### ***Ожидаемые результаты модуля***

Ниже приведены численные значения для перемещений.

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Максимальное значение полных перемещений на сетке с размерностью элемента = 0.0025	Displacement sum	м	3.2011e-6



## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

В качестве эталонного выступает решение ANSYS. Для корректности сравнения было проведено исследование на сеточную сходимость (рисунки 2.22 – 2.24).

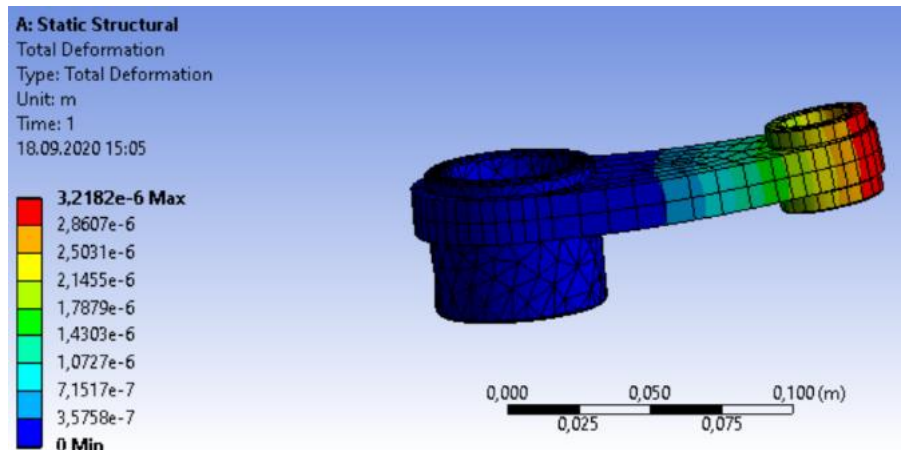


Рисунок 2.22 - Значения полных перемещений на сетке с размерностью элемента = 0.01

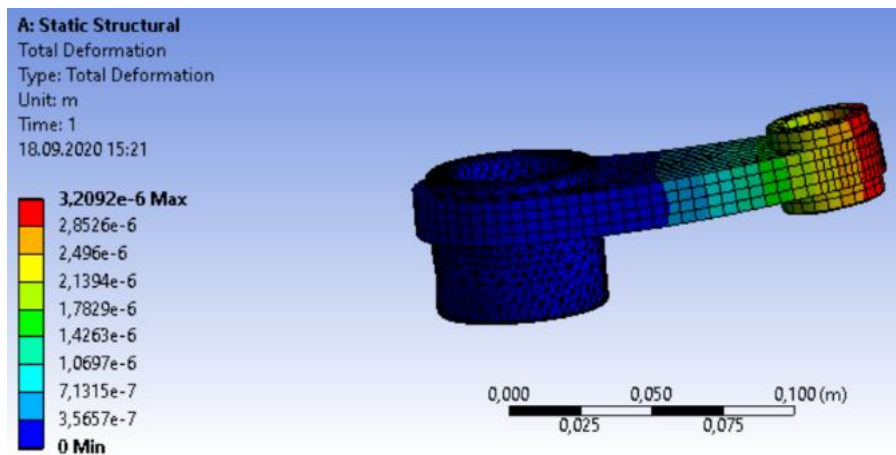


Рисунок 2.23 - Значения полных перемещений на сетке с размерностью элемента = 0.005



## Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Максимальное значение полных перемещений на сетке с размерностью элемента = 0.0025	Displacement sum	м	3.2011e-6	3.1847985e-6	0.51

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
import step "C:/02_model.step" heal
Volume all scale 0.001
volume all size 0.0025
mesh volume 1
volume 3 redistribute nodes off
volume 3 scheme Sweep source surface 24 target surface 23 sweep transform least squares
volume 3 autosmooth target on fixed imprints off smart smooth off
volume 3 redistribute nodes off
volume 3 scheme Sweep source surface 24 target surface 23 sweep transform least squares
volume 3 autosmooth target on fixed imprints off smart smooth off
mesh volume 3
volume 2 scheme tetmesh proximity layers off geometry approximation angle 15
volume 2 tetmesh growth_factor 1
Trimesher surface gradation 1.3
Trimesher volume gradation 1.3
Trimesher geometry sizing on
mesh volume 2
create material 1
modify material 1 name 'material 1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 7850
set duplicate block elements off
block 1 add volume all
block 1 material 1 cs 1 element solid order 2
create displacement on surface 19 dof all fix 0
create pressure on surface 24 magnitude 1e5
create contact autoselect tolerance 0.00025 type tied method auto
analysis type static elasticity dim3
```



## 2.13. Контрольная задача №2.13

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного изотропного материала.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 1$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.25$ ;
- Плотность  $\rho = 1 \text{ кг} / \text{м}^3$ ;
- Коэффициент теплопроводности  $\kappa = 1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha = 1 \text{ К}^{-1}$ .

Геометрическая модель

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$\text{К}^{-1}$	1
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$\text{К}^{-1}$	1
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$\text{К}^{-1}$	1

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Рассматриваем представительный объём  $V_0$ , выделенный в начальном состоянии, до деформации. На границе его задаём граничные условия в виде нулевого давления



$$N \cdot \sigma|_{\Gamma_0} = 0$$

изменяем температуру всего объёма на  $\Delta T$  и решаем на представительном объёме краевую задачу теории упругости

$$\nabla \cdot \sigma = 0$$

В результате расчёта описанной задачи мы получаем поле распределения тензора деформаций  $E$  на представительном объёме. Его мы осредняем по объёму:

$$E^e = \frac{1}{V} \int_V E dV$$

В итоге имеем, что мы задали для представительного объёма одинаковое изменение температуры  $\Delta T$  и более никаких граничных условий, кроме нулевого давления на границе - а получили в результате осреднения эффективный тензор деформаций  $E^e$ . Эффективные термоупругие характеристики будем искать в виде

$$E^e = \alpha_{ij} \Delta T$$

Для однородного материала численно приближенное аналитическое решение тривиальное: при осреднении мы должны получить эффективные коэффициенты температурного расширения, равные коэффициентам температурного расширения этого самого однородного материала. Это работает для изотропного, трансверсально-изотропного и ортотропного материалов.

## Результаты

Гексаэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1	1	0
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	1	1	0
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	1	1	0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
brick x 1
volume 1 scheme Map
volume 1 size 0.5
mesh volume 1
create material 1 name 'Material1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 1
block 1 volume 1
block 1 material 'Material1'

```



```
block 1 element solid order 2  
analysis type effectiveprops heattrans dim3  
periodicbc off
```

#### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.



## 2.14. Контрольная задача №2.14

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного ортотропного материала.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Ортотропный;
- Модуль Юнга  $E_x = 12$  Па;
- Модуль Юнга  $E_y = 8$  Па;
- Модуль Юнга  $E_z = 4$  Па;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{xy} = 0.375$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{xz} = 0.75$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{yz} = 0.5$ ;
- Плотность  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>;
- Модуль сдвига  $G_{xy} = 3$  Па;
- Модуль сдвига  $G_{xz} = 2$  Па;
- Модуль сдвига  $G_{yz} = 1$  Па;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_x = 1$  К<sup>-1</sup>;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_y = 2$  К<sup>-1</sup>;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_z = 3$  К<sup>-1</sup>.

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1 м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	К <sup>-1</sup>	1
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	К <sup>-1</sup>	2
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	К <sup>-1</sup>	3



## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения приведено в п. 2.13.

### Результат

Гексаэдральная сетка второго порядка

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1	1	0.00%
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	2	2	0.00%
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	3	3	0.00%

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
brick x 1.0
volume 1 size 0.5
mesh volume 1
create material 1
modify material 1 name 'Material 1'
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_X' value 12
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Y' value 8
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_E_Z' value 4
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XY' value 0.375
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_XZ' value 0.75
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_PR_YZ' value 0.5
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XY' value 3
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_XZ' value 2
modify material 1 set property 'ORTHOTROPIC_G_YZ' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_X' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Y' value 2
modify material 1 set property 'ORTHO_THERMAL_EXPANSION_Z' value 3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_CONDUCTIVITY_X' value 1
modify material 1 set property 'ORTHO_CONDUCTIVITY_Y' value 2
modify material 1 set property 'ORTHO_CONDUCTIVITY_Z' value 3
block 1 volume 1
block 1 material 'Material 1'
block 1 element solid order 2
analysis type effectiveprops heattrans dim3
periodicbc off

```

### Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.

## 2.15. Контрольная задача №2.15

### *Назначение контрольной задачи*

Определение эффективных механических характеристик для куба однородного трансверсально-изотропного материала.

### *Значения входных данных модуля*

Параметры материала:

- Трансверсально-изотропный;
- Модуль Юнга  $E_T = 3$  Па;
- Модуль Юнга  $E_L = 4$  Па;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_T = 0.25$ ;
- Главный коэффициент Пуассона  $\nu_{TL} = 0.5$ ;
- Модуль сдвига  $G_{TL} = 1$  Па;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_T = 1$   $K^{-1}$ ;
- Коэффициент температурного расширения  $\alpha_L = 2$   $K^{-1}$ .

Геометрическая модель:

- Сплошной куб со стороной 1м;
- Однородный материал.

Граничные условия:

- Непериодические.

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

### *Значения выходных данных модуля*

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	1
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	2

### *Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения*

Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения приведено в п. 2.13.





## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{11}$	$K^{-1}$	1	1	0.00
2	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{22}$	$K^{-1}$	1	1	0.00
3	Эффективные коэффициенты температурного расширения	$\alpha_{33}$	$K^{-1}$	2	2	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset  
brick x 1  
volume 1 scheme Map  
volume 1 size 0.5  
mesh volume 1  
create material 1  
modify material 1 set property 'TR_ISO_CONDUCTIVITY_T' value 1  
modify material 1 set property 'TR_ISO_CONDUCTIVITY_L' value 2  
block 1 volume 1  
block 1 material 1  
block 1 element solid order 2  
analysis type effectiveprops heattrans dim3  
periodicbc off
```

## Список литературы

- [1] Вишняков Л.Р., Грудина Т.В., Кадыров В.Х., Карпинос Д.М., Олейник В.И., Сапожникова А.Б., Тучинский Л.И. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
- [2] Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: «Мир», 1982. – 334 с.
- [3] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. - М.: Издательство Московского университета, 1984. - 335 с.



## 2.16. Контрольная задача №2.16

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Материал матрицы:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности =  $2 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .
- Материал нити:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности =  $10 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Геометрическая модель

- Прямоугольный параллелепипед 4 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);
- Нить:  $\lambda = 10$ ;
- Матрица:  $\lambda = 2$ .

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Тетраэдры первого порядка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.8
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	2.28571



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Численно приближенное аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы" [1]. Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f$ ,  $\lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f$ ,  $\gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

### Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.8	2.773E+00	0.95
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.283E+00	0.12
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.292E+00	0.26

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt( 0.01 * pitch * thick * conc / 3.1415926)}
#{size = 3.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
volume all scheme Tetmesh

```



```
volume all size {size}
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 10
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 1
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 2
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block 1 2 element solid order 2
analysis type effectiveprops heattrans dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

[1 ] Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.



## 2.17. Контрольная задача №2.17

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных модуля

Параметры материала:

- Материал матрицы:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 2 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.3;
  - Коэффициент теплопроводности =  $7.7 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .
- Материал нити:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 2000 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.2;
  - Коэффициент теплопроводности =  $1.3 * 10^{-5} \frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$ .

Геометрическая модель

- Прямоугольный параллелепипед 25 x 16 x 16;
- По центру вдоль оси X проходит нить длиной 25 и радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%);

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка: Гексаэдры второго порядка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$	$1.35709 * 10^{-5}$
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м*К}}$	$8.58878 * 10^{-5}$



## Описание алгоритма аналитического решения

Численно приближенное аналитическое решение взято из параграфа 1.6.2 справочника Карпиноса "Композиционные материалы" [1]. Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}$$

Здесь волокна направлены вдоль оси X,  $\lambda_f, \lambda_m$  - коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  - объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия - строго периодические.

## Результаты

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$1.35709 \cdot 10^{-5}$	1.358E-05	0.08
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$8.58878 \cdot 10^{-5}$	8.484E-05	1.22
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{_33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	$8.58878 \cdot 10^{-5}$	8.484E-05	1.22

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
#{length = 25.0}
#{pitch = 16.0}
#{thick = 16.0} # thickness
#{conc = 10} # cord concentration, percents
#{rad = sqrt(0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
#{size = 1.0}
create brick width {length} depth {pitch} height {thick}
create cylinder height {length} radius {rad}
volume 2 rotate 90.0 about y
subtract volume 2 from volume 1 keep
delete volume 1
imprint volume all
merge volume all
volume all size {size}
curve 18 20 22 24 interval 10
mesh volume all
create material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2000

```



```
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.2
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1.3e-5
create material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 2
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 2 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 7.7e-5
block 1 volume 2
block 2 volume 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block all element solid order 2
analysis type effectiveprops heatexpansion dim3
periodicbc on
```

#### Список литературы

[1 ] Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592с.

## 2.18. Контрольная задача №2.18

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для слоистого композита, содержащего слой из двух материалов.

### Значения входных данных модуля

Параметры материалов:

Резина:

- Изотропный;
- Модуль упругости = 2 Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.49;
- Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 1 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Сталь:

- Изотропный;
- Модуль упругости =  $2e5$  Па;
- Коэффициент Пуассона = 0.25;
- Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 40 \frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Сплошной куб из резины со стороной 1.3;
- Посередине (перпендикулярно оси Z) куба проходит слой стали толщиной 0.3.

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	10.0
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	10.0
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{К}}$	1.29032





## Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Слоистый композит представляет собой несколько склеенных между собой слоёв из разных материалов. В формулах [1] предполагается, что слои лежат в плоскости XY.

$$\lambda_x = \lambda_y = \langle \lambda \rangle,$$

$$\lambda_z = \frac{1}{\langle 1/\lambda \rangle},$$

где символы  $\langle \rangle$  означают осреднение величины по объёму, то есть, фактически, по высоте. Граничные условия – строго периодические.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	10	10	0.0
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	10	10	0.0
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	1.29032	1.290E+00	0.0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

cubit.cmd("reset")
rub_thick = 1.0
steel_thick = 0.3
rub_number = 1
length = 1.3 # length
width = 1.3 # width
height = rub_number*(rub_thick + steel_thick) # height
def lambda_Calc_E_nu (E, nu): return E * nu / ((1+nu)*(1-2*nu))
def G_Calc_E_nu(E, nu): return E / (2 + 2*nu)
# steel constants
steel_E = 2.0e5
steel_nu = 0.25
steel_cond = 40.0
steel_lambda = lambda_Calc_E_nu(steel_E, steel_nu)
steel_G = G_Calc_E_nu(steel_E, steel_nu)

# rubber constants
rub_E = 2.0
rub_nu = 0.49
rub_cond = 1.0
rub_lambda = lambda_Calc_E_nu(rub_E, rub_nu)
rub_G = G_Calc_E_nu(rub_E, rub_nu)
mesh_size = 0.1
cubit.cmd("brick x " + str(length) + " y " + str(width) + " z " + str(height))
for i in range(0, rub_number): cubit.cmd( "webcut body all with plane zplane offset " + str(0.5*rub_thick +
i*(rub_thick+steel_thick) - 0.5*height ) + " imprint merge")
for i in range(0, rub_number): cubit.cmd( "webcut body all with plane zplane offset " + str( (i+1)*(rub_thick+steel_thick) -
0.5*height - 0.5*rub_thick) + " imprint merge" )

```



```
# rubber block
command1 = "block 2 volume"
for i in range(1, rub_number+2): command1 = command1 + " " + str(i)
cubit.cmd(command1)
# steel block
command2 = "block 1 volume"
for i in range(rub_number+2, 2*rub_number+2): command2 = command2 + " " + str(i)
cubit.cmd(command2)
cubit.cmd("imprint volume all")
cubit.cmd("merge volume all")
# materials
cubit.cmd("create material 1 name 'steel'")
cubit.cmd("create material 2 name 'rubber'")
cubit.cmd("modify material 1 set property 'MODULUS' value " + str(steel_E))
cubit.cmd("modify material 1 set property 'POISSON' value " + str(steel_nu))
cubit.cmd("modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value " + str(steel_cond))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'MODULUS' value " + str(rub_E))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'POISSON' value " + str(rub_nu))
cubit.cmd("modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value " + str(rub_cond))
# blocks
cubit.cmd("block 1 material 'steel'")
cubit.cmd("block 2 material 'rubber'")
cubit.cmd("block 1 2 element solid order 2")
# meshing
cubit.cmd("volume all scheme Sweep")
cubit.cmd("volume all size " + str(mesh_size) )
cubit.cmd("mesh volume all")

# solution settings
cubit.cmd("analysis type effectiveprops heattrans dim3")
cubit.cmd("periodicbc on")
cubit.cmd("solver method direct use_uzawa auto try_other on")
```

#### Список литературы

[1] Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М: Изд-во МГУ, 1984. – 335 с.



## 2.19. Контрольная задача №2.19

### Назначение контрольной задачи

Определение эффективных механических характеристик для однослойного волокнистого композита.

### Значения входных данных модуля

Параметры материалов:

- Материал матрицы:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 2 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .
- Материал нити:
  - Изотропный;
  - Модуль упругости = 1 Па;
  - Коэффициент Пуассона = 0.25;
  - Коэффициент теплопроводности  $\lambda = 10 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ .

Геометрическая модель:

- Квадрат  $16 \times 16$  (матрица);
- В центре круг (нить) радиусом 2.85459861019 (подобрано так, чтобы объёмная концентрация нити в композите составляла 10%).

Граничные условия:

- Периодические.

Сетка:

- Плоские треугольные элементы второго порядка.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571



3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.8
---	---	----------------	---	-----

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Эффективные коэффициенты теплопроводности вычисляются по формулам [1]:

$$\lambda_x = \gamma_f \lambda_f + \gamma_m \lambda_m,$$

$$\lambda_y = \lambda_z \approx \lambda_m \frac{1 + \gamma_f + \gamma_m \frac{\lambda_m}{\lambda_f}}{\gamma_m + (1 + \gamma_f) \frac{\lambda_m}{\lambda_f}},$$

здесь волокна направлены вдоль оси  $X$ ,  $\lambda_f, \lambda_m$  – коэффициенты теплопроводности нитей и матрицы соответственно,  $\gamma_f, \gamma_m$  – объёмные концентрации нитей и матрицы соответственно (в сумме равны единице).

Граничные условия – строго периодические.

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{11}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.28576	0.0
2	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{22}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.28571	2.28576	0.0
3	Эффективные коэффициенты теплопроводности	$\lambda_{33}$	$\frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$	2.8	2.8	0.0

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
```

```
# {pitch = 16.0}
# {thick = 16.0} # thickness
# {conc = 10} # cord concentration, percents
# {rad = sqrt( 0.01*pitch*thick*conc/3.1415926)}
# {size = 1.0}
```

```
# geometry
create surface rectangle width {pitch} depth {thick} zplane
create surface circle radius {rad} zplane
subtract body 2 from body 1 keep
delete body 1
imprint body all
merge body all
```

```
# meshing
surface all scheme trimesh
surface all size {size}
mesh surface all
```

```
# materials
```



```
create material 1
modify material 1 name 'fiber'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 10
create material 2
modify material 2 name 'matrix'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 1
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.25
modify material 2 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 2

# blocks
block 1 add surface 2
block 2 add surface 3
block 1 material 'fiber'
block 2 material 'matrix'
block 1 2 element plane order 2

# solution options

analysis type effectiveprops heattrans dim2
periodicbc on
```

#### Список литературы

[1] Карпинос Д. М. Композиционные материалы. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1985. –592 с.

## 2.20. Контрольная задача №2.20

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача об упругой полосе, которая движется с начальной скоростью и врезается в жесткую стену. Во время взаимодействия полоса контактирует со стеной (скользящий контакт без трения). Во время решения определяется время взаимодействия и отделения, а также соответствующие перемещения и скорости на поверхности контакта и сравниваются с решением, приведенным в [1]. Контрольная задача проверяет корректность:

- поддержку контактного взаимодействия «скользящий без трения»;
- поддержку неконформно стыкованных сеток из спектральных элементов.

### Значения входных данных

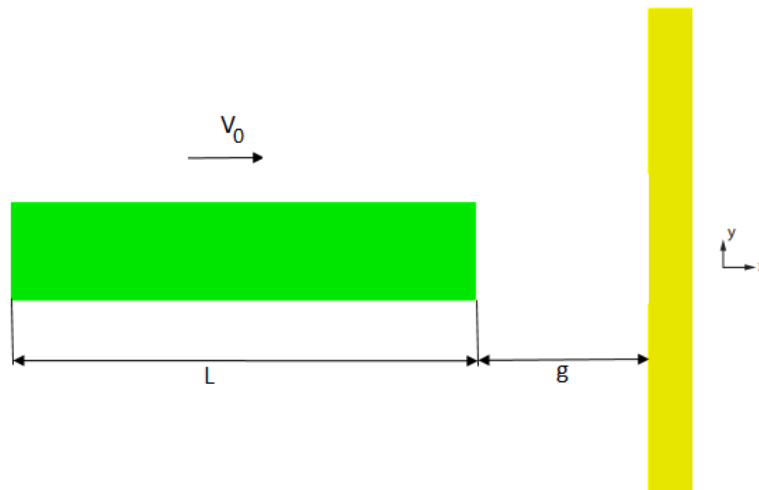


Рисунок 2.32 - Геометрическая модель

Геометрическая модель:

- Полоса: прямоугольник ( $L=10$  in,  $h=1$  in);
- Стена: прямоугольник ( $L=5$  in,  $h=1$  in);
- Начальный зазор между полосой и стеной 0.01 in.

Материал:

- $E_{\text{полосы}}=3e7$  psi,  $\nu_{\text{полосы}}=0.3$ ;

Граничные условия:

- Стена закреплена по всем направлениям;
- Полоса закреплена по вертикальному направлению;
- На полосу действует начальная скорость  $V_0=202.2$  in/sec<sup>2</sup>.

Сетка:

- 8-узловые конечные элементы.

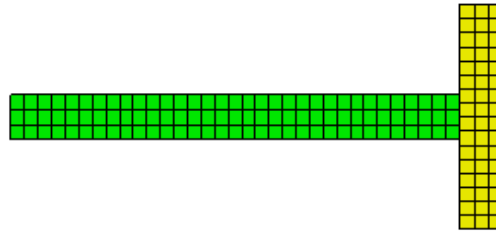


Рисунок 2.33 - Конечно-элементная сетка

Контакт:

- Общий контакт (главная сущность – кривая 6, побочная сущность – кривая 4);
- Трение 0;
- Точность 0.0005;
- Метод Штрафов (жесткость контакта по нормали 1, жесткость контакта по касательной 0.5).

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Полное решение;
- Неявная схема;
- Максимальное время 0.003 с;
- Число шагов 1000.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Статус контакта в контактном регионе в точке (5,0,0) при $t=0.00005$ с.	contact_status	-	2
2	Компонента вектора перемещений $u_x$ в точке (0,0,0) при $t=0.00005$ с.	Displacement_XX	in	0.01
3	Компонента вектора скорости $v_x$ в точке (0,0,0) при $t=0.00005$ с.	Velocity_XX	In/c	202.2



№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
	Статус контакта в контактном регионе в точке (5,0,0) при $t=0.00015$ с.	contact_status	-	0
	Компонента вектора перемещений $u_x$ в точке (0,0,0) при $t=0.00015$ с.	Displacement_XX	in	0.01
	Компонента вектора скорости $v_x$ в точке (0,0,0) при $t=0.00015$ с.	Velocity_XX	In/c	-202.2

Таблица 2.3.1 Задание зависимости от времени для силы

Время	Значение силы, Н
0	0
1	$10^5$
2	0
5	0

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Численное приближенное решение приведено в [1].

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Статус контакта в контактном регионе в точке (5,0,0) при $t=0.00005$ с.	contact_status	-	2	2	0.00
2	Компонента вектора перемещений $u_x$ в точке (5,0,0) при $t=0.00005$ с.	Displacement_X	in	0.01	1.011E-02	1.10
3	Компонента вектора скорости $v_x$ в точке (5,0,0) при $t=0.00005$ с.	Velocity_X	In/c	202.2	2.022E+02	0.00
4	Статус контакта в контактном регионе в точке (5,0,0) при $t=0.00015$ с.	contact_status	-	0	0	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:





```
reset
create surface rectangle width 10 height 1 zplane
create surface rectangle width 1 height 5 zplane
move Surface 2 x 5.51 include_merged
surface all size auto factor 5
undo group begin
surface all size auto factor 5
mesh surface all
undo group end
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 3e+07
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 0.73
set duplicate block elements off
block 1 add surface all
block 1 material 1 cs 1 element plane order 2
create displacement on surface 1 dof 2 dof 3 fix
create displacement on surface 2 dof all fix
create initial velocity on surface 1
modify initial velocity 1 dof 1 value 202.2
create contact master curve 6 slave curve 4 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0 ignore_overlap off
method penalty normal_stiffness 1.0 tangent_stiffness 0.5
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off
dynamic method full_solution scheme implicit maxtime 0.0003 steps 1000 newmark_gamma 0.005
calculation start path 'C:/fidesys01.pvd'
```

#### Список литературы

[1] N.J. Carpenter, R.L. Taylor and M.G. Katona, “Lafrange Constraints For Transient Finite Element Surface Contact”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol.32, 1991. pg 103-128.

## 2.21. Контрольная задача №2.21

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается плоская статическая задача о замене материала по шагам. Цель задачи - проверить корректность выполнения смены материала по шагам решения. В результатах в Fidesys Viewer проверяются свойства материалов по шагам. Контрольная задача проверяет корректность:

- линейно-упругую математическую модель материала;
- изменение граничных условий между шагами нагружения;
- изменение свойств материала между шагами нагружения.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

В пластине имеется включение. В ходе расчета свойства материала включения изменяются.

- Длина пластины  $a=10$  м;
- Ширина пластины  $b=5$  м;
- Круг с радиусом  $R=1$  м.

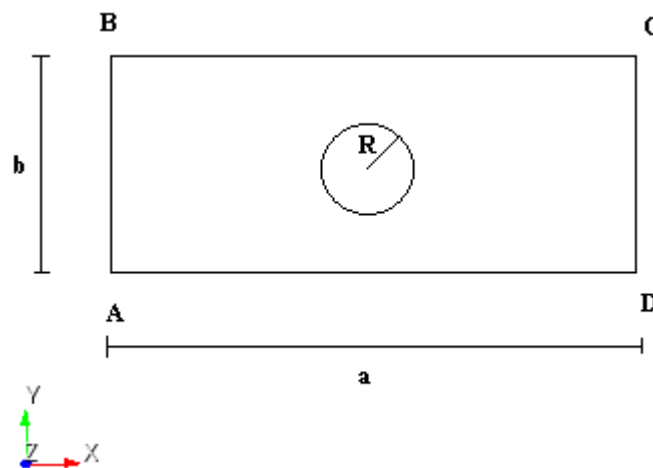


Рисунок 2.34 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Сторона AB закреплена по всем осям и поворотам;
- Стороны AD и BC закреплены по оси  $Y$ ;
- К стороне CD приложено давление с пошаговой нагрузкой:
  - Шаг 1: - 1000 Па;
  - Шаг 2: - 1000 Па;
  - Шаг 3: 0 Па.

Параметры материала:

- Материал для пластины:

- Модуль упругости  $E = 2e + 11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .
- Материалы для включения:
  - Материал 2:  $E = 0.7e + 11$  Па,  $\nu = 0.34$ ;
  - Материал 3:  $E = 1e + 11$  Па,  $\nu = 0.35$ .

Материал для включения вводится таблично:

- Шаг 1: Материал 2;
- Шаг 2: Материал 2;
- Шаг 3: Материал 3.

Параметры сетки:

- Конформная сетка;
- Четырехугольные конечные элементы.

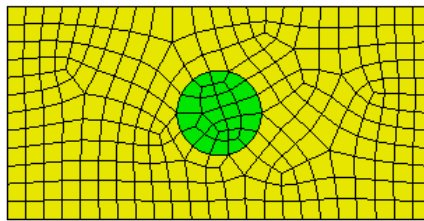


Рисунок 2.35 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Упругость;
- Число шагов нагружения: 3.

### Значение выходных данных

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Шаг 1	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	7e10
2	Шаг 2	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	7e10
3	Шаг 3	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	1e11



## Результаты расчета

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Шаг 1	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	7e10	7e10	0.00
2	Шаг 2	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	7e10	7e10	0.00
3	Шаг 3	Модуль Юнга в точке (0, 0, 0)	Elasticity Modulus Young's modulus	Па	1e11	1e11	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
create surface rectangle width 10 height 5 zplane
create surface circle radius 1 zplane
subtract surface 2 from surface 1 keep
delete surface 1
merge curve all
compress all
surface all size auto factor 4
mesh surface all
set duplicate block elements off
create material 1 from 'Steel'
create material 2
modify material 2 name ' 2'
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.34
modify material 2 set property 'MODULUS' value 0.7e11
create material 3
modify material 3 name ' 3'
modify material 3 set property 'MODULUS' value 1e+11
modify material 3 set property 'POISSON' value 0.35
block 1 add surface 2
block 2 add surface 1
block 1 material 1
block 2 material 2
block all element plane order 2
create displacement on curve 3 dof all fix
create displacement on curve 2 4 dof 2 fix
create pressure on curve 5 magnitude 1
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 1 2 value -1000
modify table 1 cell 2 1 value 2
```



```
modify table 1 cell 2 2 value -1000
modify table 1 cell 3 1 value 3
bcdep pressure 1 table 1
block 2 step 1 2 material 2
block 2 step 3 material 3
block 1 step all
output nodalforce off midresults on record3d on log on vtu on material on
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 3
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5
```

## 2.22. Контрольная задача №2.22

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается плоская задача об образовании в предварительно нагруженном, бесконечно протяженном теле (механические свойства материала которого описываются потенциалом Мурнагана) кругового в момент возникновения включения. Механические свойства материала включения описываются потенциалом Мурнагана. Рассматривается вариант модели образования упругого включения, которое (в момент образования) полностью повторяет форму удаленной части тела в том случае, когда по поверхности включения действуют силы, противоположные силам, действующим по вновь образованной границе тела (через замену материала по шагам). Контрольная задача проверяет корректность:

- физически нелинейную математическую модель материала;
- изменение свойств материала между шагами нагружения.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

В пластине имеется включение. В ходе расчета свойства материала включения изменяются.

- Длина пластины 100 м;
- Ширина пластины 100 м;
- Включение: круг с радиусом  $R = 1$  м.

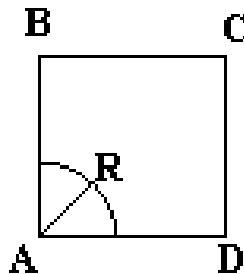


Рисунок 2.36 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- В виду симметрии рассматривается  $\frac{1}{4}$  часть модели;
- Сторона AB закреплена по оси X;
- Сторона AD закреплена по оси Y;
- К стороне CD приложено давление 0.00315 Па.

Параметры материала:

- Материал матрицы:
  - $\lambda_{\text{матрицы}}=0.39$ ;
  - $G_{\text{матрицы}} = 0.186$ ;
  - $C_{\text{мат}} = -0.013$ ;

- $C_{4\text{мат}} = -0.07$ ;
- $C_{5\text{мат}} = 0.063$ .
- Материалы для включения:
  - $\lambda_{\text{матрицы}} = 1.07$ ;
  - $G_{\text{матрицы}} = 0.477$ ;
  - $C_{3\text{мат}} = -0.093$ ;
  - $C_{4\text{мат}} = 1.72$ ;
  - $C_{5\text{мат}} = -5.31$ .

Материал для включения вводится таблично:

- Шаг 1: Материал матрицы;
- Шаг 2: Материал включения.

Параметры сетки:

- Конформная сетка.
- Четырехугольные конечные элементы второго порядка.

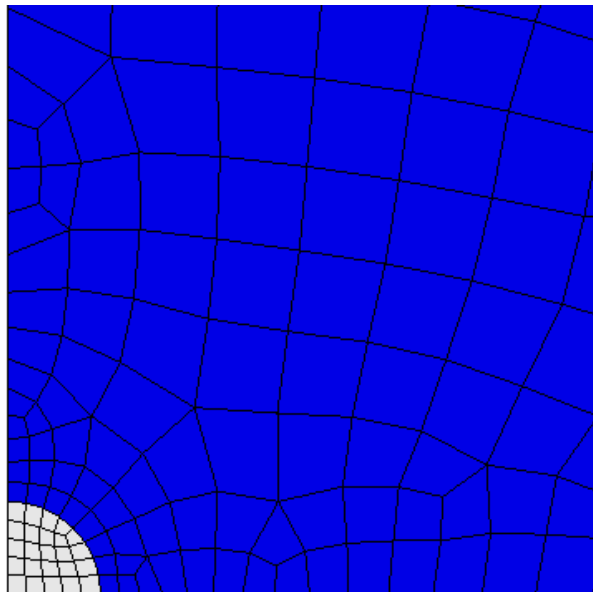


Рисунок 2.37 - Конечно-элементная сетка модели в месте включения

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Упругость;
- Число шагов нагружения: 2.

**Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Напряжения $\sigma_{xx}$ в точке (0,0,0)	Stress XX	Па	0.00275

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Алгоритм решения представлен в работе [1]. Ниже приведен результат решения для напряжений для включения и матрицы. Для критерия данной контрольной задачи рассматривается линейный случай.

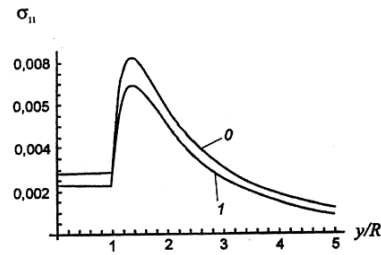


Рисунок 2.38 - Распределение напряжений для включения и матрицы: 0 – линейное решение, 1 – нелинейное решение

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Напряжения $\sigma_{xx}$ в точке (0,0,0)	Stress XX	Па	0.00275	2.674E-03	2.77

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
create surface rectangle width 100 zplane
create surface ellipse major radius 0.5 minor radius {0.5-0.005601016} zplane
subtract surface 2 from surface 1 keep_tool
webcut body all with plane xplane offset 0
webcut body all with plane yplane offset 0
delete Body 4 3 7 8
delete Body 1
delete Body 2
merge all
curve 30 32 26 size 0.1
curve 30 32 26 scheme equal
curve 30 32 26 size 0.1
curve 30 32 26 scheme equal
mesh curve 30 32 26
surface 11 size auto factor 5
mesh surface 11
curve 24 7 scheme bias fine size 0.1 factor 1.09 start vertex 22 8
curve 24 7 scheme bias fine size 0.1 factor 1.09 start vertex 22 8
mesh curve 24 7
    
```





```
surface 9 size auto factor 5
mesh surface 9
create material 1
modify material 1 name 'Матрица'
create material 2
modify material 2 name 'Включение'
modify material 1 set property 'MUR_SHEAR' value 0.186
modify material 1 set property 'MUR_LAME' value 0.39
modify material 1 set property 'MUR_C3' value -0.013
modify material 1 set property 'MUR_C4' value -0.07
modify material 1 set property 'MUR_C5' value 0.063
modify material 2 set property 'MUR_LAME' value 1.07
modify material 2 set property 'MUR_SHEAR' value 0.477
modify material 2 set property 'MUR_C3' value -0.93
modify material 2 set property 'MUR_C4' value 1.72
modify material 2 set property 'MUR_C5' value -5.31
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_XZ' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_YZ' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_XY' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_ZZ' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_YY' value 0
modify material 2 set property 'INIT_STRESS_XX' value 0
set duplicate block elements off
block 1 add surface 9
block 1 name 'Матрица'
set duplicate block elements off
block 2 add surface 11
block 2 name 'Включение'
block 1 material 1 cs 1 element plane order 2
block 2 material 1 cs 1 element plane order 2
create displacement on curve 11 dof 2 fix {0.05*0.063}
delete displacement 1
create displacement on curve 30 24 dof 2 fix
create displacement on curve 32 7 dof 1 fix
create pressure on curve 25 magnitude {-0.05*0.063}
static steps 2
block 2 step 2 material 2
analysis type static elasticity dim2 planestrain
static steps 2
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5
```

## Список литературы

[1] В. А. Левин, И. А. Мишин, А. В. Вершинин, Плоская задача об образовании включения в упругом нагруженном теле. Конечные деформации, Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2006, номер 1, 56–59

## 2.23. Контрольная задача №2.23

### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается нагреваемый изнутри туннель (в качестве нагрузки выступает температура на внутренней поверхности).

### *Значения входных данных*

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 18500$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3333$ ;
- Плотность  $\rho = 1e-8$ ;
- Коэффициент трения = 11;
- Угол внутреннего трения = 35;
- Угол дилатансии = 35;
- Коэффициент удельной теплоемкости = 1.23;
- Коэффициент теплоемкости = 1;
- Коэффициент теплопроводности =  $1.72e-5$ .

Граничные условия:

- На внутреннюю поверхность туннеля действует температура  $250^{\circ}\text{C}$ , температура на внешней поверхности туннеля  $0^{\circ}\text{C}$ ;
- Закрепление из условий симметрии.

Сетка:

- Гексаэдры первого порядка.

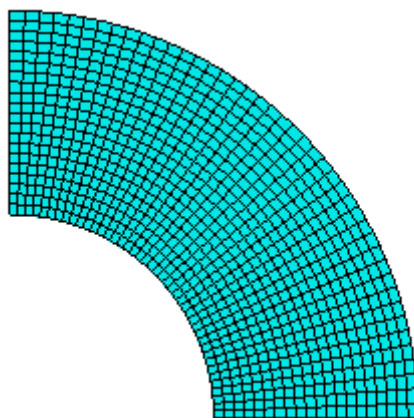


Рисунок 2.39 - Конечно-элементная сетка



## Значения выходных данных модуля

Приведены совместно с результатами расчета.

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Для данной задачи рассматривалось численное решение, полученное в пакете ANSYS.

## Результаты расчета

Гексаэдральная сетка первого порядка

№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Компонента перемещений $u_x$	(0.5, 0,0)	Displacement Y	м	0.1558e-2	1.558E-03.	0.01
2	Компонента перемещений $u_x$	(0.6, 0,0)	Displacement Y	м	0.2119e-2	2.119E-03	0.01
3	Компонента перемещений $u_x$	(0.7, 0,0)	Displacement Y	м	0.2458e-2	2.458E-03	0.01
4	Компонента перемещений $u_x$	(0.8, 0,0)	Displacement Y	м	0.2668e-2	2.668E-03	0.01
5	Компонента перемещений $u_x$	(0.94, 0,0)	Displacement Y	м	0.278e-2	2.780E-03	0.01
6	Компонента перемещений $u_x$	(0.1, 0,0)	Displacement Y	м	0.2765e-2	2.765E-03	0.01
7	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	-0.225e-3	-2.295e-04	1.84
8	Пластические деформации	(0.9, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.769e-4	7.678E-05	0.15
9	Пластические деформации	(0.78, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.267e-3	2.668E-04	0.09
10	Пластические деформации	(0.7, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0.113e-3	1.133E-04	0.27
11	Пластические деформации	(0.67, 0,0)	Plastic_Strain_XX	-	0	-3.630E-07	0.00
12	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	0.198e-2	1.980E-03	0.02
13	Пластические деформации	(0.9, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	0.15e-2	1.496E-03	0.25
14	Пластические деформации	(0.8, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	0.878e-3	8.786E-04	0.07
15	Пластические деформации	(0.7, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	0.175e-3	1.761E-04	0.60
16	Пластические деформации	(0.67, 0,0)	Plastic_Strain_YY	-	0	-5.081E-07	0.00
17	Пластические деформации	(1, 0,0)	Plastic_Strain_ZZ	-	0.1736e-3	1.784E-04	2.78



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
18	Пластические деформации	(0.9, 0,0)	Plastic_Strain_Z Z	-	-0.1243e-3	-1.242E-04	0.05
19	Пластические деформации	(0.8, 0,0)	Plastic_Strain_Z Z	-	-0.23e-3	-2.300E-04	0.01
20	Пластические деформации	(0.7, 0,0)	Plastic_Strain_Z Z	-	-0.747e-4	-7.519E-05	0.66
21	Пластические деформации	(0.67, 0,0)	Plastic_Strain_Z Z	-	0	2.339E-07	0.00
22	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_X X	-	-0.303e-3	-3.047E-04	0.54
23	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.9, 0,0)	Elastic_Strain_X X	-	-0.26e-3	-2.599E-04	0.05
24	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.8, 0,0)	Elastic_Strain_X X	-	-0.898e-4	-8.983E-05	0.04
25	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.7, 0,0)	Elastic_Strain_X X	-	0.308e-3	3.081E-04	0.02
26	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.67, 0,0)	Elastic_Strain_X X	-	0.119e-2	1.190E-03	0.03
27	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{xx}$	(0.5, 0,0)	Elastic_Strain_X X	-	0.274e-2	2.734E-03	0.24
28	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_Y Y	-	0.787e-3	7.859E-04	0.01
29	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.9, 0,0)	Elastic_Strain_Y Y	-	0.928e-3	9.282E-04	0.02
30	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.8, 0,0)	Elastic_Strain_Y Y	-	0.107e-2	1.073E-03	0.28
31	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.7, 0,0)	Elastic_Strain_Y Y	-	0.112e-2	1.123E-03	0.31
32	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.67, 0,0)	Elastic_Strain_Y Y	-	0.363e-3	3.629E-04	0.03
33	Компонента упругих деформаций $\epsilon_{yy}$	(0.5, 0,0)	Elastic_Strain_Y Y	-	-0.1184e-2	-1.185E-03	0.05



№	Наименование переменной	Координаты точки	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
34	Компонента упругих деформаций $\varepsilon_{zz}$	(1, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.181e-3	-1.784E-04	1.42
35	Компонента упругих деформаций $\varepsilon_{zz}$	(0.9, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.529e-3	-5.294E-04	0.07
36	Компонента упругих деформаций $\varepsilon_{zz}$	(0.8, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.115e-2	-1.154E-03	0.38
37	Компонента упругих деформаций $\varepsilon_{zz}$	(0.7, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.214e-2	-2.137E-03	0.12
38	Компонента упругих деформаций $\varepsilon_{zz}$	(0.67, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.317e-2	-3.169E-03	0.03
39	Компонента упругих деформаций $\varepsilon_{zz}$	(0.5, 0,0)	Elastic_Strain_Z	-	-0.43e-2	-4.300E-03	0.00

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

reset
set default element hex
create cylinder height 0.1 radius 0.5
create cylinder height 0.1 radius 1
subtract body 1 from body 2
webcut body 2 with plane xplane offset 0
webcut body 2 with plane yplane offset 0
delete body 2
delete body 3
create material 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3333
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1.85e+04
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1e-8
modify material 1 set property 'COHESION' value 11
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 35
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 35
modify material 1 set property 'SPECIFIC_HEAT' value 1.23
modify material 1 set property 'ISO_THERMAL_EXPANSION' value 1.72e-05
modify material 1 set property 'ISO_CONDUCTIVITY' value 1
set duplicate block elements off
block 1 volume 4
block 1 material 1
block 1 element solid order 2
surface 31 size 0.025
mesh surface 31
curve 11 13 40 42 interval 1
mesh curve 11 13 40 42
mesh volume 4
create temperature on surface 30 value 250
create temperature on surface 28 value 0

```

create displacement on surface 11 dof 1 fix 0  
create displacement on surface 27 dof 2 fix 0  
create displacement on surface 29 31 dof 3 fix 0  
analysis type static elasticity plasticity heattrans dim3  
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 1000 tolerance 0.01 targetiter 5

## 2.24. Контрольная задача №2.24

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задачи об устойчивости склона с учетом образования пластических зон по критерию Друкера-Прагера. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- учёт пластических свойств материала при расчете напряженно-деформированного состояния среды
- критерий пластичности Друкера-Прагера с симметричным упрочнением;
- нелинейная модель для расчета механической прочности.

### Значения входных данных

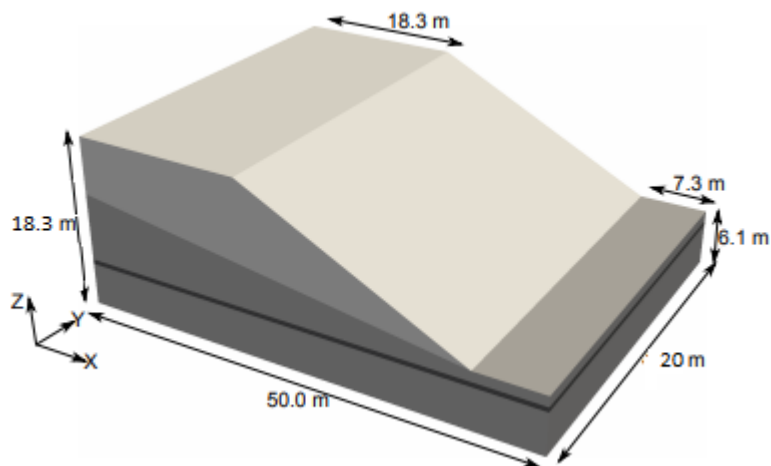


Рисунок 2.40 - Геометрическая модель

Геометрическая модель:

- Характерные размеры указаны на рисунке 2.40.

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 1e+8$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 1918.37$ ;
- Когезия = 12889;
- Угол внутреннего трения = 9.189°;
- Угол дилатансии = 0.

Граничные условия:

- На тело действует гравитация;
- Закрепление из условий симметрии.

Сетка:

- Гексаэдры второго порядка.

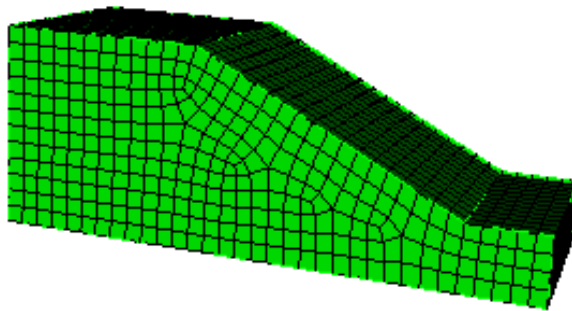


Рисунок 2.41 - Конечно-элементная сетка

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента $u_z$ в точке (12.595, -20, 17.584)	Displacement Z	м	-0.0366
2	Компонента $u_x$ в точке (27.389, -20, 7.190)	Displacement X	м	0.01199
3	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain YY	-	0.59e-3
4	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain XX	-	0.000888

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Численно приближенное решение представлено в [1].

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента $u_z$ в точке (12.595, -20, 17.584)	Displacement Z	м	-0.0366	-3.656E-02	0.11
2	Компонента $u_x$ в точке (27.389, -20, 7.190)	Displacement X	м	0.01199	1.194E-02	0.41
3	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain YY	-	0.59e-3	5.906E-04	0.11



4	Пластические деформации в точке (18.411, -20, 6.7264)	Plasticity_strain XX	-	0.000888	8.872E-04	0.09
---	---	----------------------	---	----------	-----------	------

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set node constraint on
set default element hex
create vertex 0 0 0
create vertex 50 0 0
create vertex 50 0 6.1
create vertex 42.7 0 6.1
create vertex 18.3 0 18.3
create vertex 0 0 18.3
create surface vertex 1 2 3 4 5 6
sweep surface 1 perpendicular distance 20
create material 1
modify material 1 name "dry"
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 1e+8
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1918.367
modify material 1 set property 'DILATANCY_ANGLE' value 0
modify material 1 set property 'INT_FRICTION_ANGLE' value 9.189
modify material 1 set property 'COHESION' value 12889
set duplicate block elements off
block 1 volume 1
block 1 material "dry"
block 1 element solid order 2
curve all size 1.5
mesh curve all
mesh volume 1
create displacement on surface 7 8 dof 1 dof 2 dof 3 fix 0
create displacement on surface 1 dof 2 fix 0
create displacement on surface 2 6 dof 1 fix 0
create gravity on volume 1
modify gravity 1 dof 3 value -9.8
analysis type static elasticity plasticity dim3
nonlinearopts maxiters 100 minloadsteps 10 maxloadsteps 30 tolerance 5e-2
calculation start path
```

#### Список литературы

[1] Hom Nath Gharti<sup>1</sup>, Dimitri Komatitsch, Volker Oye<sup>1</sup>, Roland Martin and Jeroen Tromp Application of an elastoplastic spectral-element method to 3D slope stability analysis, INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING. Int. J. Numer. Meth. Engng 2011.



## 2.25. Контрольная задача №2.25

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача Герца для двумерного случая [1] для трех разных значений приложенной силы (25 Н, 50 Н, 100 Н). Половина цилиндра расположена выпуклой частью на жестком основании, на срезанную часть цилиндра приложена нагрузка. Контрольная задача предназначена для проверки корректности:

- задания параметров скользящего контакта без трения в интерфейсе;
- статического решения с учетом скользящего контакта без трения;
- корректности вывода полей Статус контакта, Напряжений в контакте.

### Значения входных данных модуля

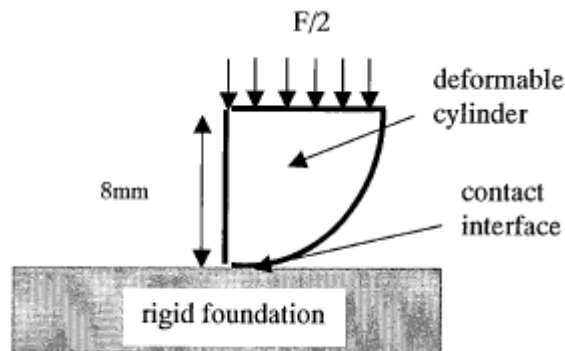


Рисунок 2.42 - Геометрическая модель задачи

Материал:

- $E_{\text{цилиндра}}=500 \text{ МПа}$ ,  $\nu_{\text{цилиндра}}=0.3$ .

Граничные условия:

- Основание закреплено по всем направлениям;
- Цилиндр закреплен по горизонтальному направлению из условия симметрии;
- Три случая нагрузки: сила  $F=25, 50, 100 \text{ Н}$ .

Контакт:

- Неконформная сетка;
- Трение  $\mu=0$ ;
- Тип: Скользящий без трения.

Модель:

- 8-узловые конечные элементы.

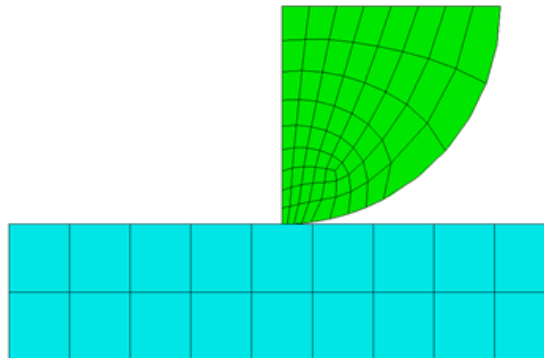


Рисунок 2.43 - Конечно-элементная сетка

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- 3D;
- Упругость.

### ***Значения выходных данных модуля***

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Статус контакта в контактном регионе в точке (0,0,0)	contact_status	-	2
2	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=25 Н	contact_stress	МПа	24
3	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=50 Н	contact_stress	Мпа	35
4	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=100 Н	contact_stress	МПа	47.5

### ***Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения***

Задача имеет численное приближенное решение, опубликованное в [1] и представленное на рисунке 2.44.

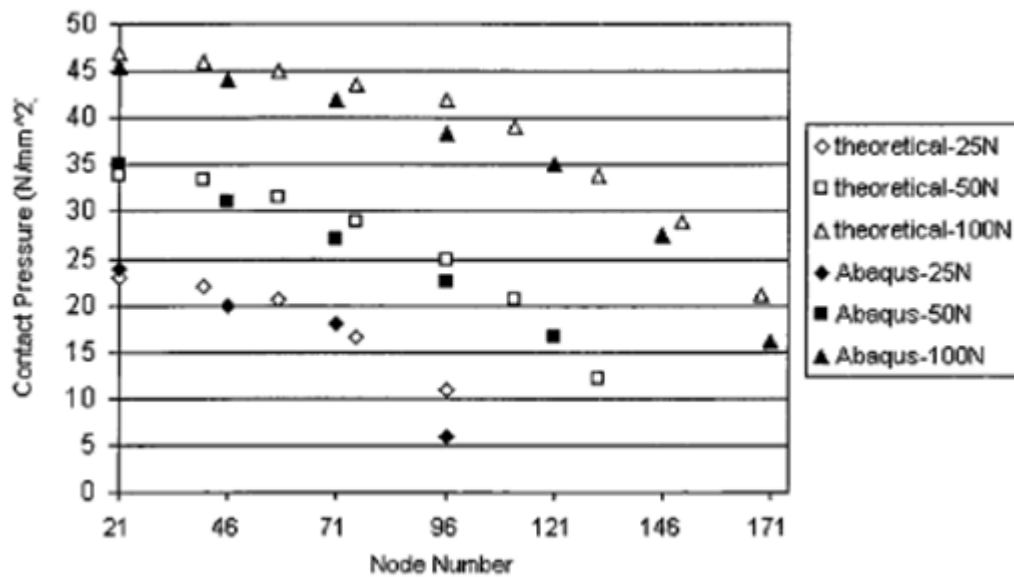


Рисунок 2.44 - Результаты численного решения задачи

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Статус контакта в контактном регионе в точке (0,0,0)	contact_status	-	2	2	0.00
2	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=25 Н	contact_stress	МПа	25	2.590E+01	3.60
3	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=50 Н	contact_stress	Мпа	35	3.644E+01	4.10
4	Компоненты тензора напряжений в зоне контакта в точке (0,0,0) для случая F=100 Н	contact_stress	МПа	47	4.863E+01	3.47

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```

F=25
reset
set default element hex
create surface circle radius 8 zplane
webcut body 1 with plane xplane
    
```



```
webcut body 1 with plane yplane
delete Body 3
delete Body 2
move Surface 4 y 8 include_merged
create surface rectangle width 20 height 5 zplane
move Surface 6 y -2.499 include_merged
partition create curve 8 position 3.716651 0.915756 0
partition create curve 8 position 1.061858 0.070785 0
curve 8 scheme bias fine size 0.1 factor 1.1 start vertex 3
curve 17 interval 8
curve 17 scheme equal
curve 16 interval 9
curve 16 scheme equal
curve 6 interval 8
curve 6 scheme equal
curve 7 interval 9
curve 7 scheme bias factor 1.1 start vertex 3
surface 4 size auto factor 7
mesh surface 4
surface 6 size auto factor 7
mesh surface 6
create material 1
modify material 1 name 'mat_foun'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 500
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
block 1 add surface 6
block 2 add surface 4
block all element plane order 2
block 1 material 'mat_foun'
block 2 material 'mat_cyl'
create displacement on surface 6 dof all fix
create displacement on curve 7 dof 1 fix
#25/2/17=0.705882353
create force on curve 6 force value 0.705882353 direction ny
create contact master curve 12 slave curve 8 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0
ignore_overlap off method mpc
analysis type static findefs elasticity dim2 planestrain
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5
output nodalforce on energy off midresults on record3d on log on vtu on material off

F=50
reset
set default element hex
create surface circle radius 8 zplane
webcut body 1 with plane xplane
webcut body 1 with plane yplane
delete Body 3
delete Body 2
move Surface 4 y 8 include_merged
```



```
create surface rectangle width 20 height 5 zplane
move Surface 6 y -2.499 include_merged
partition create curve 8 position 3.716651 0.915756 0
partition create curve 8 position 1.061858 0.070785 0
curve 8 scheme bias fine size 0.1 factor 1.1 start vertex 3
curve 17 interval 8
curve 17 scheme equal
curve 16 interval 9
curve 16 scheme equal
curve 6 interval 8
curve 6 scheme equal
curve 7 interval 9
curve 7 scheme bias factor 1.1 start vertex 3
surface 4 size auto factor 7
mesh surface 4
surface 6 size auto factor 7
mesh surface 6
create material 1
modify material 1 name 'mat_foun'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 500
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
block 1 add surface 6
block 2 add surface 4
block all element plane order 2
block 1 material 'mat_foun'
block 2 material 'mat_cyl'
create displacement on surface 6 dof all fix
create displacement on curve 7 dof 1 fix
#50/2/17=1.470589
create force on curve 6 force value 1.470589 direction ny
create contact master curve 12 slave curve 8 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0
ignore_overlap off method mpc
analysis type static findefs elasticity dim2 planestrain
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5
output nodalforce on energy off midresults on record3d on log on vtu on material off

F=100
reset
set default element hex
create surface circle radius 8 zplane
webcut body 1 with plane xplane
webcut body 1 with plane yplane
delete Body 3
delete Body 2
move Surface 4 y 8 include_merged
create surface rectangle width 20 height 5 zplane
move Surface 6 y -2.499 include_merged
partition create curve 8 position 3.716651 0.915756 0
partition create curve 8 position 1.061858 0.070785 0
```



```
curve 8 scheme bias fine size 0.1 factor 1.1 start vertex 3
curve 17 interval 8
curve 17 scheme equal
curve 16 interval 9
curve 16 scheme equal
curve 6 interval 8
curve 6 scheme equal
curve 7 interval 9
curve 7 scheme bias factor 1.1 start vertex 3
surface 4 size auto factor 7
mesh surface 4
surface 6 size auto factor 7
mesh surface 6
create material 1
modify material 1 name 'mat_foun'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 5e6
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
create material 2
modify material 2 name 'mat_cyl'
modify material 2 set property 'MODULUS' value 500
modify material 2 set property 'POISSON' value 0.3
block 1 add surface 6
block 2 add surface 4
block all element plane order 2
block 1 material 'mat_foun'
block 2 material 'mat_cyl'
create displacement on surface 6 dof all fix
create displacement on curve 7 dof 1 fix
#100/2/17=2.9411765
create force on curve 6 force value 2.9411765 direction ny
create contact master curve 12 slave curve 8 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 preload 0.0 offset 0.0
ignore_overlap off method mpc
analysis type static findefs elasticity dim2 planestrain
nonlinearopts maxiters 50 minloadsteps 1 maxloadsteps 100 tolerance 1e-3 targetiter 5
output nodalforce on energy off midresults on record3d on log on vtu on material off
```

#### Список литературы

[1] NAFEMS R0081 - Benchmark Tests for Finite Element Modelling of Contact, Gapping and Sliding (задача CGS3).

## 2.26. Контрольная задача №2.26

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о нахождении собственных частот балки, которая разделена на три части, между которыми действует условие общего контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности результата расчета модального анализа с учетом общего контакта.

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Длина  $DD' = 10$  м;
- Ширина  $AB = 2$  м;
- Высота  $AD = 2$  м.

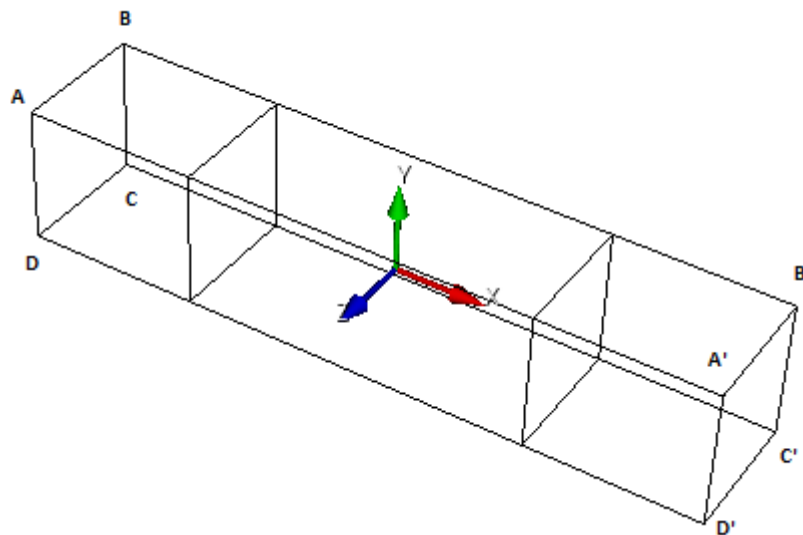


Рисунок 2.45 - Геометрическая модель объемной балки

Граничные условия:

- Грань  $BC$  закреплена по  $u_x = u_z = 0$ ;
- Грань  $B'C'$  закреплена по  $u_z = 0$ ;
- Узлы поверхности  $DCD'C'$  закреплены по  $u_y = 0$ .

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 2e11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 8000$  кг/м<sup>3</sup>.

Построение конечно-элементной сетки:

- Гексаэдры 2 порядка.

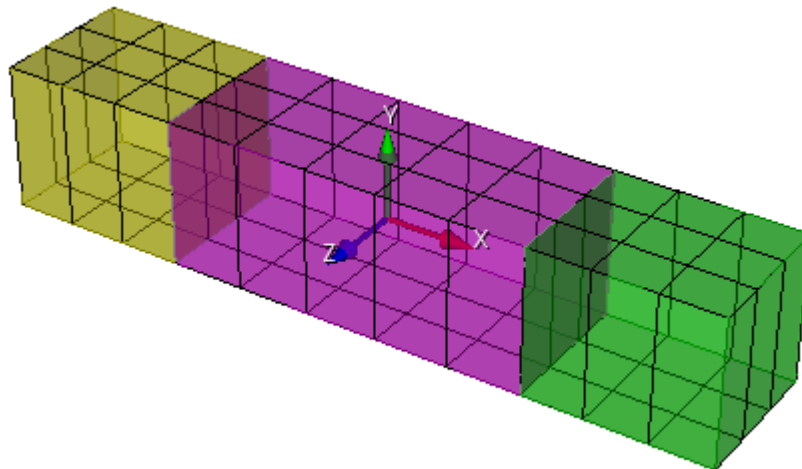


Рисунок 2.46 - Конечно-элементной сетка

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: mpc.

Настройки расчета:

- Модальный анализ;
- Поиск первой минимальной частоты.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Значение
1	Собственная частота	Eigen Values 1, Гц	38.254

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

В качестве эталонного выступает решение из NAFEMS [1].

### Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Собственная частота	Eigen Values 1	Гц	38.254	3.677E+01	3.87





Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 10 y 2 z 2
webcut volume 1 with plane xplane offset -2.5
webcut volume 1 with plane xplane offset 2.5
curve 28 41 36 26 43 35 25 44 33 28 27 42 34 size 1
curve 28 41 36 26 43 35 25 44 33 28 27 42 34 scheme equal
curve 3 15 37 7 13 39 1 5 23 21 29 31 size 2
curve 3 15 37 7 13 39 1 5 23 21 29 31 scheme equal
curve 11 16 40 12 9 14 38 10 22 24 32 30 size 0.67
curve 11 16 40 12 9 14 38 10 22 24 32 30 scheme equal
volume all scheme Auto
mesh volume all
create material 1
modify material 1 set property 'DENSITY' value 8000
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 1
create displacement on curve 7 dof 1 dof 3 fix 0
create displacement on curve 5 dof 3 fix 0
create displacement on node 56 59 60 53 55 63 64 57 58 62 61 54 33 80 79 38 74 92 91 84 83 89 90 75 76 88 87 82 81
85 86 77 2 7 8 6 14 30 29 25 26 31 32 13 12 28 27 24 dof 2 fix 0
block 1 element solid order 2
create contact master surface 17 slave surface 22 tolerance 0.0005 type general method auto
create contact master surface 7 slave surface 12 tolerance 0.0005 type general method auto
analysis type eigenfrequencies dim3
eigenvalue find 10 smallest
```

#### Список литературы

[1] NAFEMS Selected Benchmarks for Natural Frequency Analysis, Test 51.

## 2.27. Контрольная задача №2.27

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача об устойчивости сжатого стержня с добавлением условия жесткого контакта. Контрольная задача проверяет корректность расчета для анализа потери устойчивости модели с учетом контактного взаимодействия «жесткий контакт».

### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Высота  $h = 1$  м;
- Радиус  $R = 0.156$  м;
- Толщина  $t = 0.006$  м.

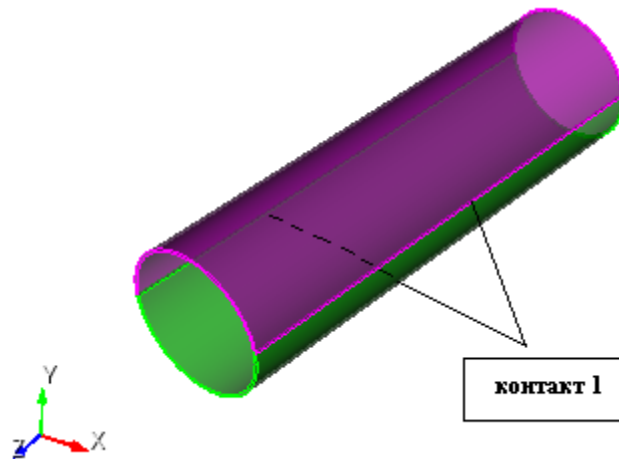


Рисунок 2.47 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Нижняя окружность закреплена по всем направлениям;
- На верхнюю окружность приложено давление  $p = 1$  МПа;
- Контактная пара - выбор главной и побочной сущности, Связанный, метод Автовыбор.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Параметры сетки:

- Гексаэдральная сетка.

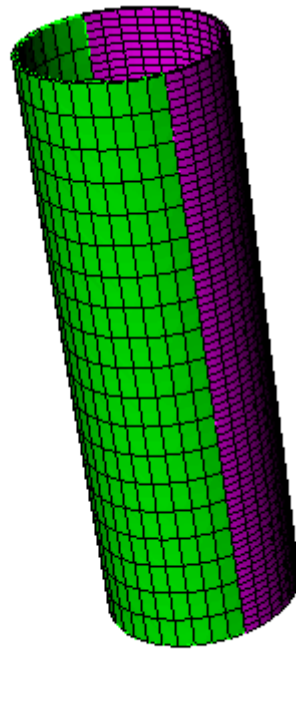


Рисунок 2.48 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Потеря устойчивости;
- 3D;
- Число форм потери устойчивости: 1.

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Первый коэффициент критической нагрузки	load multipliers(1)	-	44527

### **Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения**

В качестве эталонного выступает решение ANSYS.

### **Результаты расчета**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Критическая сила	Critical Values 1	-	44527	4.458E+04	0.12



Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
set default element hex
brick x 2.54 y 0.0508 z 0.0508
webcut volume 1 with plane yplane
webcut volume all with plane zplane
surface 19 26 33 31 scheme map
mesh surface 19 26 33 31
curve 2 4 6 8 interval 50
curve 2 4 6 8 scheme equal
mesh curve 2 4 6 8
volume all size auto factor 4
mesh volume all
create material 1
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.1e11
set duplicate block elements off
block 1 volume all
block 1 material 1
block 1 element solid order 2
create displacement on surface 23 35 29 21 dof all fix 0
create pressure on surface 19 26 33 31 magnitude 388
create contact autoselect tolerance 0.0005 type general method auto
analysis type stability elasticity dim3
eigenvalue find 1 smallest
```

## 2.28. Контрольная задача № 2.28

### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача о перемещении груза по поверхности с учетом трения.

Во время взаимодействия груз контактирует с поверхностью (скользящий контакт с трением).

Контрольная задача проверяет правильность расчета:

- контактного взаимодействия «скользящий с трением»;
- взаимодействия неконформно стыкованных сеток из спектральных элементов.

### Значения входных данных модуля

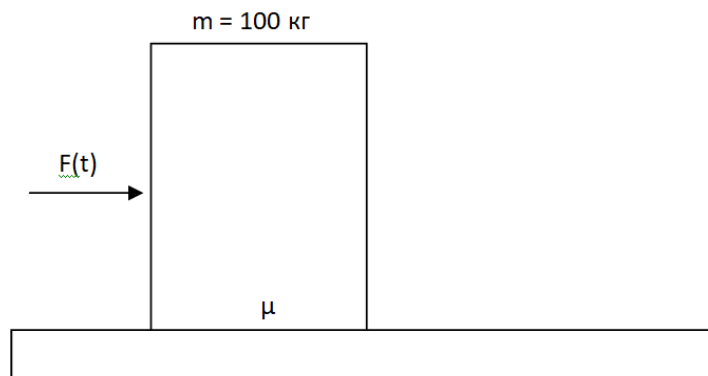


Рисунок 2.49 - Геометрическая модель

Геометрическая модель

- Основание: прямоугольник ( $L=10 \text{ м}$ ,  $h=1 \text{ м}$ );
- Груз: прямоугольник ( $L=1 \text{ м}$ ,  $h=1 \text{ м}$ );
- Коэффициенты трения между основанием и грузом  $\mu = 0,4; 0,6$ .

Материал:

- $E=2e11 \text{ Па}$ ,  $\nu=0.3$ .

### Граничные условия:

- Основание закреплено по всем направлениям;
- На груз действует сила по горизонтальному направлению  $F(x) = 100t$
- На груз действует сила гравитации

Сетка:

- 4-узловые конечные элементы;
- Порядок 3 и выше.

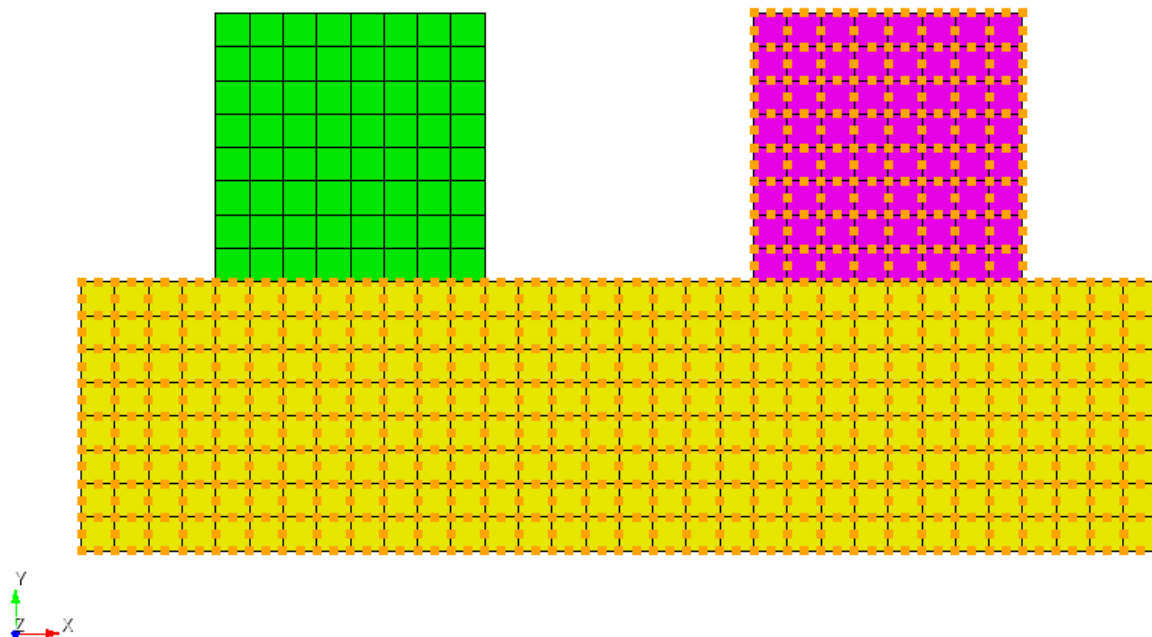


Рисунок 2.50 - Конечно-элементная сетка

Контакт:

- Общий контакт (главная сущность – кривая 6, побочная сущность – кривая 4);
- Трение 0.4/0.6;
- Точность 0.0005;
- Метод Штрафов (жесткость контакта по нормали 1, жесткость контакта по касательной 0.5).

Настройки расчета:

- Динамический расчет;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Полное решение;
- Неявная схема;
- Максимальное время 8 с;
- Число шагов 1000.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Статус контакта в контактном регионе	Contact_Status	-	2
2	Компонента вектора перемещений $u_x$ груза при $t = 1$	Displacement_XX	м	0
3	Компонента вектора перемещений $u_x$ груза при $t = 6$	Displacement_XX	м	0
4	Компонента вектора перемещений $u_x$ груза при $t = 8$	Displacement_XX	м	> 0

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Численное приближенное решение приведено в [1].

В качестве решения принимается положение куба в конечный и промежуточные моменты времени для проверки корректности работы силы трения покоя ( $F_{тяги} = F_{тр. покоя}$ ) и скольжения.

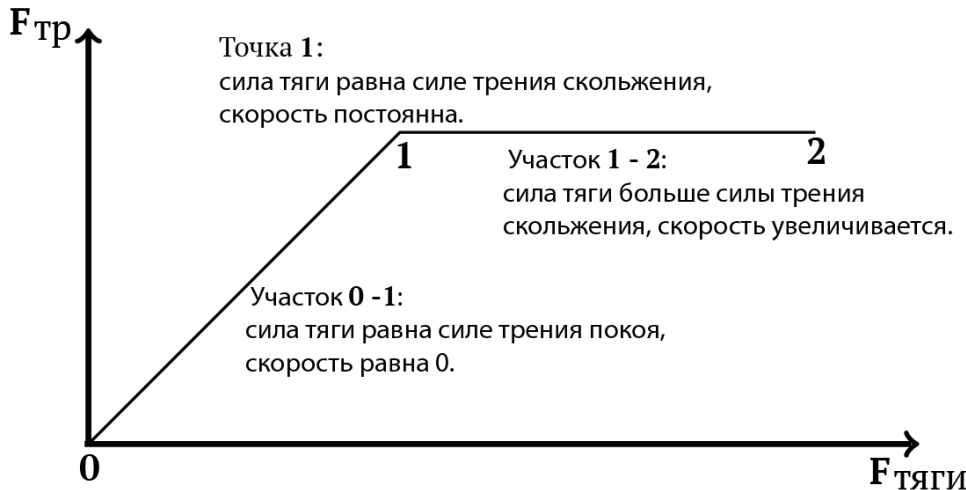


Рисунок 2.51 - Численное решение для проверки корректности работы силы трения покоя и скольжения  
Список литературы

[1] Полюшкин, Н.Г. Основы теории трения, износа и смазки: учеб. пособие / Н.Г. Полюшкин; Краснояр. гос. аграр. ун-т. – Красноярск, 2013 – 192 с.

### Результаты расчета

#### Спектральные элементы

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Статус контакта в контактном регионе	Contact_Status	-	2	2	Критерий выполнен
2	Компонента вектора перемещений их груза при t = 1	Displacement_XX	м	0	0	0
3	Компонента вектора перемещений их груза при t = 6	Displacement_XX	м	0	0	0
4	Компонента вектора перемещений их груза при t = 8	Displacement_XX	м	> 0	>0	Критерий выполнен

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
create surface rectangle width 1 height 1 zplane
```



```
create surface rectangle width 4 height 1 zplane
Surface 1 copy move x 2 y 0.5
move Surface 2 x 1 y -1 include_merged
surface all size auto factor 4
mesh surface all
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2e+11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 100
block 1 add surface all
block 1 material 1 cs 1 element plane order 3
create displacement on surface 2 3 dof all fix
create contact autoselect type general friction 0.4 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.0005 method penalty normal_stiffness
1.0 tangent_stiffness 0.5
create contact master curve 10 slave curve 4 type general friction 0 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.0005 method penalty
normal_stiffness 1.0 tangent_stiffness 0.5
move Surface 3 y -0.5 include_merged
create pressure on curve 1 magnitude 1000
create pressure on curve 2 magnitude 1000
bcdep pressure 2 value '1000 * t'
analysis type dynamic elasticity dim2 planestrain preload off
dynamic method full_solution scheme implicit steps 200 newmark_gamma 0.005 maxtime 1
```



## 2.29. Контрольная задача № 2.29

### Назначение контрольной задачи

Проверка правильности расчета взаимодействия большого эллиптического отверстия с малым, когда большие оси эллипсов параллельны. Центр большого эллипса находится в точке  $(0,0)$ . Отверстия образуются последовательно в бесконечной пластине, предварительно одноосно растянутой. В результатах решения приведено сравнение линейной и нелинейной постановок. Расчеты выполнены для материала Муни при плоском напряженном состоянии.

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

В пластине имеется включение. В ходе расчета свойства материала включения изменяются.

- Длина пластины 100 м;
- Ширина пластины 100 м;
- Первый эллипс:  $a_1=1$ ,  $b_1=0.25$ , координаты центра  $(0,0,0)$
- Второй эллипс:  $a_2=0.4$ ,  $b_2=0.1$ ,  $x_2=2$ ,  $y_2=0.625$ , координаты центра  $(2, 0.625, 0)$ .

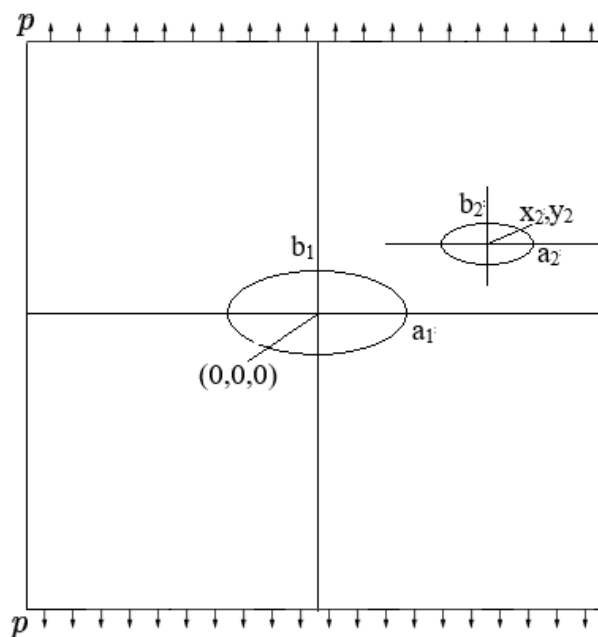


Рисунок 2.52 - Геометрическая модель задачи

### Граничные условия:

- На боковых сторонах закреплены по одному узлу с координатой  $y=0$  по перемещению  $u_y$ ;
- На верхней и нижней сторонах закреплены по одному узлу с координатой  $x=0$  по перемещению  $u_x$ ;
- На пластину действует одноосное пошаговое растягивающее давление по шагам:
  - Шаг 1: - 0.15 Па;
  - Шаг 2: - 0.15 Па;
  - Шаг 3: - 0.15 Па.

Параметры материала:

- Материал Муни-Ривлина:
  - Коэффициент  $C10=0.5$ ;
  - Коэффициент  $C01=0$ ;
  - Коэффициент  $D=1.04$ ;
  - Коэффициенты рассчитаны при  $\beta=1$ ,  $G=1$  Па,  $\nu=0.48$ .

Параметры сетки:

- Конформная сетка;
- Четырехугольные конечные элементы.

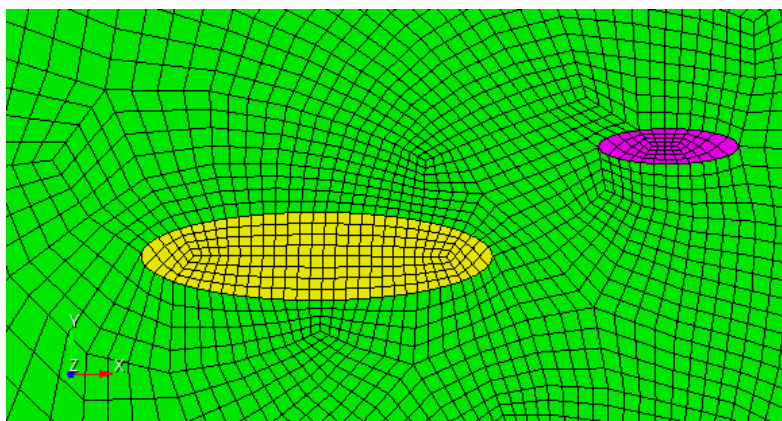


Рисунок 2.53 - Конечно-элементная сетка модели вблизи эллипсов

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- 2D;
- Плоское деформированное состояние;
- Упругость;
- Конечные деформации (для варианта 2);
- Число шагов нагружения: 3 (на первом шаге происходит растяжение, на втором шаге удаляется большой эллипс, на третьем шаге удаляется меньший эллипс).

### Значения выходных данных модуля

Вариант 1 (линейный случай)

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ в точке (1, 0, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.15
2	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ в точке (-1, 0, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1
3	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\varphi\varphi}$ в точке (2.4, 0.625, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.55

4	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фф}}$ в точке (1.6, 0.625, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.8
---	-------	---	-----------------------	----	-----

Вариант 2 (нелинейный случай)

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фф}}$ в точке (1, 0, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.35
2	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фф}}$ в точке (-1, 0, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.25
3	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фф}}$ в точке (2.4, 0.625, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.75
4	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фф}}$ в точке (1.6, 0.625, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	2

### Описание алгоритма численного решения

Численное приближенное решение приведено в источнике [1] (стр. 183, рис. 5.36) и представлено на рисунке 2.54.

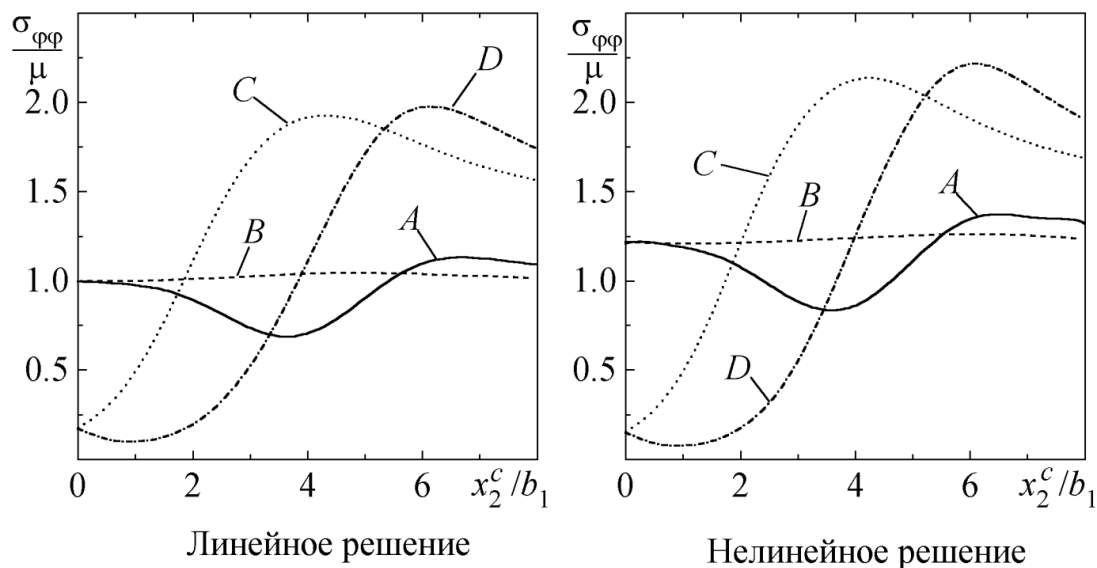


Рисунок 2.54 – Значение напряжений в вершинах отверстий согласно [1]

#### Список литературы

[1] Левин В.А., Зингерман К.М. Плоские задачи теории многократного наложения больших деформаций. Методы решения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. - 272 с. - ISBN 5-9221-0282-6

## Результаты расчета

### Вариант 1 (линейный случай)

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (1.01, 0, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.15	1.171	1.83
2	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (-1.0125, 0, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1	1.033	3.35
3	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (2.4015, 0.625, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.55	1.556	0.37
4	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (1.599, 0.622934, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.8	1.858	3.23

### Вариант 2 (нелинейный случай)

№	Шаги нагружения	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (1.00278, 0.00559868, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.35	1.407	4.2
2	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (-1.006, 0, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.25	1.311	4.9
3	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (2.4, 0.625, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	1.75	1.753	0.2
4	Шаг 3	Напряжение $\sigma_{\text{фр}}$ в точке (1.60009, 0.623, 0)	Напряжение_цилиндр_FF	Па	2	2.080	3.98

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

Линейный случай:

```
reset
set node constrain on
create surface rectangle width 50 zplane
create surface ellipse major radius 1 minor radius 0.25 zplane
subtract surface 2 from surface 1 keep_tool
create surface ellipse major radius 0.4 minor radius 0.1 zplane
move Surface 4 x 2 y 0.625 include_merged preview
move Surface 4 x 2 y 0.625 include_merged
subtract surface 4 from surface 3 keep_tool
webcut body all with plane xplane offset 0
webcut body all with plane yplane offset 0
```



```
merge all
compress all
#curve 12 9 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 11
#curve 12 9 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 11
#mesh curve 12 9
#curve 19 18 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 13
#curve 19 18 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 13
#mesh curve 19 18
surface all sizing function type skeleton min_size auto max_size auto max_gradient 1.5 min_num_layers_2d 1
min_num_layers_1d 1
mesh surface all
refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
#refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
#refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
#refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MOONEY_C01' value 0
modify material 1 set property 'MOONEY_C10' value 0.5
modify material 1 set property 'MOONEY_D' value 4e-06
block 1 add surface 3 2 6 7
set duplicate block elements off
block 2 add surface 1
set duplicate block elements off
block 3 add surface 8 4 5 9
block all material 1
block all element plane order 9
create displacement on vertex 6 9 dof 1 fix
create displacement on vertex 14 10 dof 2 fix
create pressure on curve 6 5 magnitude 1
create pressure on curve 7 4 magnitude 1
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 3 1 value 3
modify table 1 cell 1 2 value -0.15
```

```
modify table 1 cell 2 2 value -0.15
modify table 1 cell 3 2 value -0.15
bcdep pressure 1 table 1
create table 2
modify table 2 dependency time
modify table 2 insert row 1
modify table 2 insert row 1
modify table 2 insert row 1
modify table 2 cell 1 1 value 1
modify table 2 cell 2 1 value 2
modify table 2 cell 3 1 value 3
modify table 2 cell 1 2 value -0.15
modify table 2 cell 2 2 value -0.15
modify table 2 cell 3 2 value -0.15
bcdep pressure 2 table 2
static steps 3
block 3 step 1
block 2 step 1 2
analysis type static elasticity dim2 planestress
```

#### Нелинейный случай:

```
reset
set node constrain on
create surface rectangle width 50 zplane
create surface ellipse major radius 1 minor radius 0.25 zplane
subtract surface 2 from surface 1 keep_tool
create surface ellipse major radius 0.4 minor radius 0.1 zplane
move Surface 4 x 2 y 0.625 include_merged preview
move Surface 4 x 2 y 0.625 include_merged
subtract surface 4 from surface 3 keep_tool
webcut body all with plane xplane offset 0
webcut body all with plane yplane offset 0
merge all
compress all
#curve 12 9 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 11
#curve 12 9 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 11
#mesh curve 12 9
#curve 19 18 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 13
#curve 19 18 scheme bias fine size 0.01 factor 1.05 start vertex 13
#mesh curve 19 18
```



```
surface all sizing function type skeleton min_size auto max_size auto max_gradient 1.5 min_num_layers_2d 1
min_num_layers_1d 1
mesh surface all
refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
#refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
#refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
#refine surface all numsplit 1 bias 1.0 depth 1
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MOONEY_C01' value 0
modify material 1 set property 'MOONEY_C10' value 0.5
modify material 1 set property 'MOONEY_D' value 4e-06
block 1 add surface 3 2 6 7
set duplicate block elements off
block 2 add surface 1
set duplicate block elements off
block 3 add surface 8 4 5 9
block all material 1
block all element plane order 9
create displacement on vertex 6 9 dof 1 fix
create displacement on vertex 14 10 dof 2 fix
create pressure on curve 6 5 magnitude 1
create pressure on curve 7 4 magnitude 1
create table 1
modify table 1 dependency time
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 insert row 1
modify table 1 cell 1 1 value 1
modify table 1 cell 2 1 value 2
modify table 1 cell 3 1 value 3
modify table 1 cell 1 2 value -0.15
modify table 1 cell 2 2 value -0.15
modify table 1 cell 3 2 value -0.15
bcdep pressure 1 table 1
create table 2
modify table 2 dependency time
modify table 2 insert row 1
modify table 2 insert row 1
modify table 2 insert row 1
```



```
modify table 2 cell 1 1 value 1
modify table 2 cell 2 1 value 2
modify table 2 cell 3 1 value 3
modify table 2 cell 1 2 value -0.15
modify table 2 cell 2 2 value -0.15
modify table 2 cell 3 2 value -0.15
bcdep pressure 2 table 2
static steps 3
block 3 step 1
block 2 step 1 2
analysis type static findefs elasticity dim2 planestress
```



## 2.30. Контрольная задача № 2.30

### Назначение контрольной задачи

Проверка правильности решения задачи о равновесии груза на наклонной плоскости с учетом трения в контакте и с учетом жесткости пружин. В данной постановке проверяется:

- задания параметров скользящего контакта с трением в интерфейсе;
- статического решения с учетом скользящего контакта с трением.

### Значения входных данных модуля

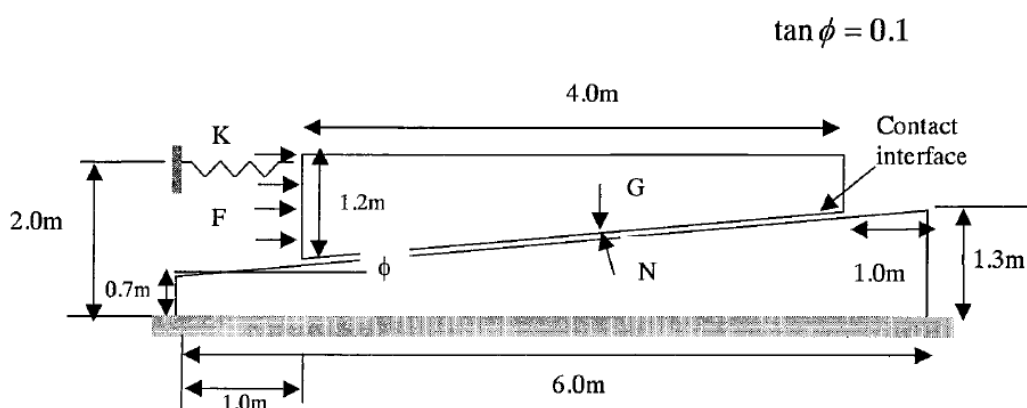


Рисунок 2.55 - Геометрическая модель задачи

Материал:

- $E=206$  ГПа,  $\nu=0.3$ .

### Граничные условия:

- Нижняя грань закреплена по всем направлениям;
- Левая грань верхней поверхности закреплена по оси X с использованием элемента пружина  $[K(\mu)]$ ;
- Действует сила тяжести  $G = 3058$  Н;
- На левую грань действует сила  $F_x=1500$  Н.

Контакт:

- Неконформная сетка;
- Трение  $\mu=0$ ;
- Тип: Скользящий с трением;
- Метод: Штрафов;
- Зависимость коэффициента жесткости пружин от коэффициента трения:
  - $\mu = 0.0$ ;  $K = 132,6$  Н/м;
  - $\mu = 0.1$ ;  $K = 98,0$  Н/м;
  - $\mu = 0.2$ ;  $K = 62,6$  Н/м;
  - $\mu = 0.3$ ;  $K = 26,5$  Н/м.

Модель:

- 4-узловые конечные элементы.

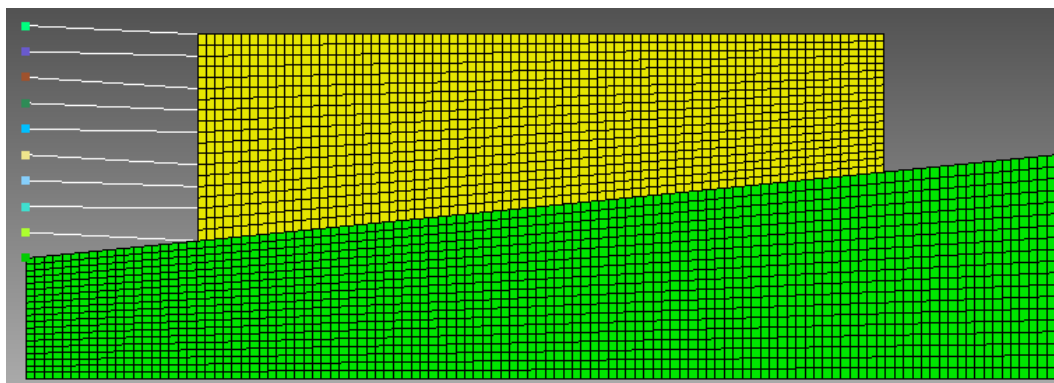


Рисунок 2.56 - Конечно-элементная сетка

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- 2D;
- Упругость.

### Значения выходных данных модуля

№	Коэффициент трения	Жесткость пружины	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	0	132.6	Горизонтальное смещение $U_x$	м	1.0
2	0.1	98.0	Горизонтальное смещение $U_x$	м	1.0
3	0.2	62.6	Горизонтальное смещение $U_x$	м	1.67
4	0.3	26.5	Горизонтальное смещение $U_x$	м	1.

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Задача имеет численное приближенное решение, опубликованное в NAFEMS [1]

Список литературы

[1] NAFEMS R0081 - Benchmark Tests for Finite Element Modelling of Contact, Gapping and Sliding (задача CGS4).

### Результаты расчета

Сетка первого порядка

№	Коэффициент трения	Жесткость пружины	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	0	132.6	$U_x$	м	1.0	0.9981	0.19
2	0.1	98.0	$U_x$	м	1.0	0.9995	0.05



№	Коэффициент трения	Жесткость пружины	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
3	0.2	62.6	U <sub>x</sub>	м	1.0	0.908	0.92
4	0.3	26.5	U <sub>x</sub>	м	1.0	0.9866	1.34

## Сетка второго порядка

№	Коэффициент трения	Жесткость пружины	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	0	132.6	U <sub>x</sub>	м	1.0	0.97	0.3
2	0.1	98.0	U <sub>x</sub>	м	1.0	1.006	0.61
3	0.2	62.6	U <sub>x</sub>	м	1.0	0.9901	0.99
4	0.3	26.5	U <sub>x</sub>	м	1.0	1.003	0.32

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

Для первого порядка (жесткость из таблицы)

reset

set default element hex

create surface rectangle width 6 height 1.3 zplane

create surface rectangle width 4 height 1.2 zplane

move Surface 2 y 0.8 include\_merged

create vertex on curve 2 distance 0.7 from vertex 3

split surface 1 through vertex 1 9

delete Surface 3

create curve vertex 1 10

move Vertex 12 location vertex 7 include\_merged

imprint surface 2 with curve 12

delete surface 6

delete curve 12

Vertex 6 copy move x -1 repeat 1 nomesh

Vertex 14 copy move y -0.15 repeat 8 nomesh

move Surface 5 y -0.05 include\_merged

create material 1

modify material 1 name 'mat1'

modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.06e11

modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3

modify material 1 set property 'DENSITY' value 1

set duplicate block elements off

block 1 add surface 4

block 1 material 1 cs 1 element plane order 1

set duplicate block elements off



```
block 2 add surface 5
block 2 material 1 cs 1 element plane order 1
set node constraint on
curve 4 6 11 14 interval 19
curve 4 6 11 14 scheme equal
mesh curve 4 6 11 14
curve 3 9 interval 115
curve 3 9 scheme equal
mesh curve 3 9
curve 5 13 interval 79
curve 5 13 scheme equal
mesh curve 5 13
surface 4 5 size auto factor 5
mesh surface 4 5
create displacement on curve 3 dof all fix 0
#1500/20=75
create force on curve 6 force value 75 direction x
create gravity on surface 5
modify gravity 1 dof 2 value -764.5#==3058N/4=764.5 where 4 is area of wedge
mesh vertex 14 to 22
create edge node 3921 21
create edge node 3922 24
create edge node 3923 27
create edge node 3924 29
create edge node 3925 31
create edge node 3926 34
create edge node 3927 36
create edge node 3928 38
create edge node 3929 22
create displacement on node 3921 to 3929 dof all fix 0
block 3 add edge 7605 to 7613
block 3 element type spring
create spring properties 3
modify spring properties 3 type 'linear_spring'
modify spring properties 3 spring_constant_damping 0
modify spring properties 3 spring_linear_damping 0
modify spring properties 3 spring_mass 0.00001
modify spring properties 3 stiffness 132.6 #friction 0
modify spring properties 3 stiffness_torsional 0
block 3 spring properties 3
```



```
block 4 add vertex 9 14 to 22
block 4 element lumpmass
create lumpmass properties 4
modify lumpmass properties 4 mass 1e-16
modify lumpmass properties 4 mass_inertia 0
block 4 lumpmass properties 4
create contact master curve 9 slave curve 13 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 ignore_overlap off offset 0.0 method auto
output nodalforce on midresults on record3d on log on vtu on
analysis type static elasticity findefs dim2 planestrain
Для второго порядка (жесткость из таблицы)
reset
set default element hex
create surface rectangle width 6 height 1.3 zplane
create surface rectangle width 4 height 1.2 zplane
move Surface 2 y 0.8 include_merged
create vertex on curve 2 distance 0.7 from vertex 3
split surface 1 through vertex 1 9
delete Surface 3
create curve vertex 1 10
move Vertex 12 location vertex 7 include_merged
imprint surface 2 with curve 12
delete surface 6
delete curve 12
Vertex 6 copy move x -1 repeat 1 nomesh
Vertex 14 copy move y -0.15 repeat 8 nomesh
move Surface 5 y -0.05 include_merged
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'MODULUS' value 2.06e11
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'DENSITY' value 1
set duplicate block elements off
block 1 add surface 4
block 1 material 1 cs 1 element plane order 2
set duplicate block elements off
block 2 add surface 5
block 2 material 1 cs 1 element plane order 2
set node constraint on
curve 4 6 11 14 interval 19
curve 4 6 11 14 scheme equal
```



```
mesh curve 4 6 11 14
curve 3 9 interval 115
curve 3 9 scheme equal
mesh curve 3 9
curve 5 13 interval 79
curve 5 13 scheme equal
mesh curve 5 13
surface 4 5 size auto factor 5
mesh surface 4 5
create displacement on curve 3 dof all fix 0
#1500/20=75
create force on curve 6 force value 38.46154 direction x
#create force on node 41 40 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 force value 75 direction x
create gravity on surface 5
modify gravity 1 dof 2 value -764.5#==3058N/4=764.5 where 4 is area of wedge
mesh vertex 9
mesh vertex 22
mesh vertex 21
mesh vertex 20
mesh vertex 19
mesh vertex 18
mesh vertex 17
mesh vertex 16
mesh vertex 15
mesh vertex 14
create edge node 11526 41
create edge node 11527 76
create edge node 11528 55
create edge node 11529 71
create edge node 11530 50
create edge node 11531 66
create edge node 11532 45
create edge node 11533 43
create edge node 11534 40
create displacement on node 11525 to 11534 dof all fix 0
block 3 add edge 7605 to 7614
block 3 element type spring
create spring properties 3
modify spring properties 3 type 'linear_spring'
modify spring properties 3 spring_constant_damping 0
```



```
modify spring properties 3 spring_linear_damping 0
modify spring properties 3 spring_mass 0.00001
modify spring properties 3 stiffness 132.6 #friction 0
modify spring properties 3 stiffness_torsional 0
block 3 spring properties 3
block 4 add vertex 22 21 20 15 18 19 17 9 14 16
block 4 element lumpmass
create lumpmass properties 4
modify lumpmass properties 4 mass 1e-16
modify lumpmass properties 4 mass_inertia 0
block 4 lumpmass properties 4
create contact master curve 9 slave curve 13 tolerance 0.0005 type general friction 0.0 ignore_overlap off offset 0.0 method
penalty normal_stiffness 0.001 tangent_stiffness 0.05
output nodalforce on midresults on record3d on log on vtu on
analysis type static elasticity findefs dim2 planestrain
```

## 2.31. Контрольная задача № 2.31

### Назначение контрольной задачи

Проверка правильности решения задачи расчета пластины на собственные частоты с добавлением условия скользящего контакта с трением. Контрольная задача проверяет корректность расчета модального анализа с учетом контактного взаимодействия «скользящий контакт с трением».

### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Представлена на рисунке 2.64;
- Ширина  $b = 0,1$  м;
- Толщина  $h = 0,002$  м;
- Длина  $a = 0,1$  м.

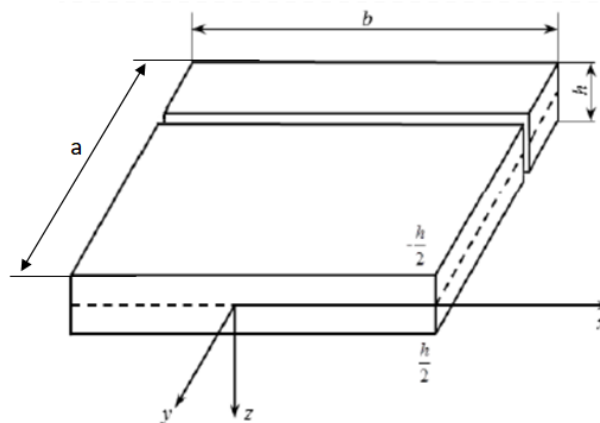


Рисунок 2.57 - Геометрическая модель задачи

### Граничные условия:

- Вариант 1: Отсутствуют;
- Вариант 2: Одна грань жестко закреплена;
- Контактная пара - выбор главной и побочной сущности, Общий контакт с трением, метод Автовыбор, Трение: 0, 0.2, 1.

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 7e10$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu=0.3$ ;
- Плотность  $\rho=7850$  кг/м<sup>3</sup>

Параметры сетки:

- Гексаэдральная сетка второго порядка.



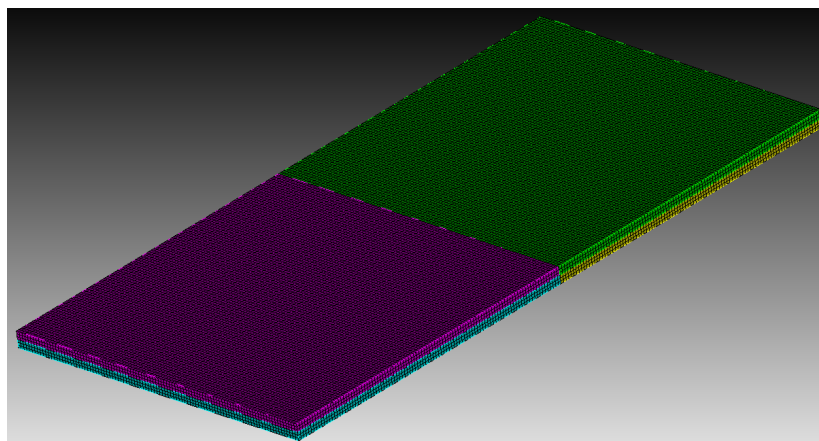


Рисунок 2.58 - Конечно-элементная сетка модели

Настройки расчета:

- Модальный анализ;
- 3D;
- Число мод: 7.

### Значения выходных данных модуля

Вариант 1: граничные условия отсутствуют

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Мода 1	Eigen Values	Гц	0
2	Мода 2	Eigen Values	Гц	0
3	Мода 3	Eigen Values	Гц	0
4	Мода 4	Eigen Values	Гц	0
5	Мода 5	Eigen Values	Гц	0
6	Мода 6	Eigen Values	Гц	0
7	Мода 7	Eigen Values	Гц	650

Вариант 2: закреплена одна из боковых граней

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Мода 1	Eigen Values	Гц	170
2	Мода 2	Eigen Values	Гц	412
3	Мода 3	Eigen Values	Гц	1038
4	Мода 4	Eigen Values	Гц	1318
5	Мода 5	Eigen Values	Гц	1501
6	Мода 6	Eigen Values	Гц	2616
7	Мода 7	Eigen Values	Гц	2983

Для получения результатов использовался программный скрипт CAE Fidesys:

```
reset
brick x 0.1 y 0.1 z 0.002
webcut volume 1 with plane zplane offset 0
webcut volume all with plane yplane offset 0
curve 18 26 20 25 interval 2
curve 18 26 20 25 scheme equal
move Volume 3 4 y .02 include_merged
merge all
move Volume 3 4 y -.02 include_merged
volume all size auto factor 7
mesh volume all
create material 1
modify material 1 name 'mat1'
modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3
modify material 1 set property 'MODULUS' value 7.9e+10
block 1 add volume all
block 1 material 1 cs 1 element solid order 2
create pressure on surface 8 16 magnitude 5000
create displacement on curve 13 dof 1 dof 2 dof 3 fix 0
create displacement on curve 15 dof 1 dof 3 fix 0
create contact master surface 17 27 slave surface 32 22 type general friction 0.1 ignore_overlap off offset 0.0 tolerance 0.0005
method auto
analysis type buckling elasticity dim3
eigenvalue find 1 smallest
```

### **Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения**

В качестве эталонного выступает решение, полученное в пакете ANSYS.

### **Результаты расчета**

Вариант 1: граничные условия отсутствуют

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Мода 1	Eigen Values	Гц	0	0	<<<0.01
2	Мода 2	Eigen Values	Гц	0	0	<<<0.01
3	Мода 3	Eigen Values	Гц	0	0	<<<0.01
4	Мода 4	Eigen Values	Гц	0	0	<<<0.01
5	Мода 5	Eigen Values	Гц	0	0	<<<0.01
6	Мода 6	Eigen Values	Гц	0	0	<<<0.01
7	Мода 7	Eigen Values	Гц	650	649.4	0.01

Вариант 2: закреплена одна из боковых граней

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Мода 1	Eigen Values	Гц	170	169	0.62
2	Мода 2	Eigen Values	Гц	412	411.5	0.12
3	Мода 3	Eigen Values	Гц	1038	1034	0.4
4	Мода 4	Eigen Values	Гц	1318	1305	0.96
5	Мода 5	Eigen Values	Гц	1501	1496	0.32
6	Мода 6	Eigen Values	Гц	2616	2604	0.48
7	Мода 7	Eigen Values	Гц	2983	2968	0.49

При испытаниях использовался программный скрипт CAE Fidesys:

reset

brick x 0.1 y 0.1 z 0.002

webcut volume 1 with plane zplane offset 0

webcut volume all with plane yplane offset 0

curve 18 26 20 25 interval 2

curve 18 26 20 25 scheme equal

move Volume 3 4 y .02 include\_merged

merge all

move Volume 3 4 y -.02 include\_merged

volume all size auto factor 7

mesh volume all

create material 1

modify material 1 name 'mat1'

modify material 1 set property 'POISSON' value 0.3

modify material 1 set property 'MODULUS' value 7.9e+10

block 1 add volume all

block 1 material 1 cs 1 element solid order 2

create pressure on surface 8 16 magnitude 5000

create displacement on curve 13 dof 1 dof 2 dof 3 fix 0

create displacement on curve 15 dof 1 dof 3 fix 0

create contact master surface 17 27 slave surface 32 22 type general friction 0.1 ignore\_overlap off offset 0.0 tolerance 0.0005 method auto

analysis type buckling elasticity dim3

eigenvalue find 1 smallest

### 3. Тестирование облачного сервиса

#### 3.1. Контрольная задача №3.1

##### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается задача о бесконечной цилиндрической трубе, находящейся под воздействием внутреннего давления.

##### *Значения входных данных*

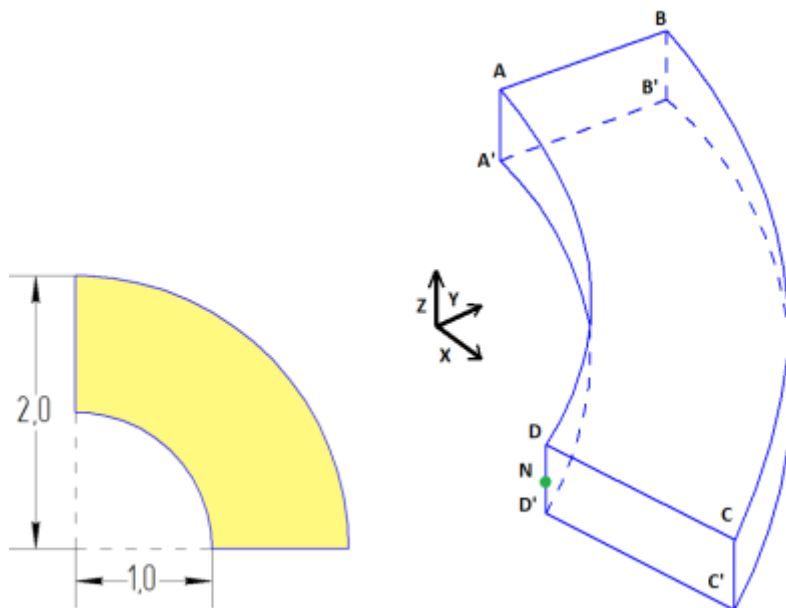


Рисунок 3.1 – Геометрическое представление cad-модели

Геометрическая модель:

- Ввиду симметрии задачи рассматривается четверть широкого среза трубы;
- Толщина среза 0.5 м;
- CAD-модель 01.stp.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси  $X$  на поверхности  $ABB'A'$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Y$  на поверхности  $CDD'C'$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Z$  на поверхностях  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ ;
- Давление на поверхность  $AA'D'D$  величиной 1 Мпа;
- Давление на поверхность  $B'B'C'C$  величиной 0.5 Мпа.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;

- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Сетки:

- Гексаэдры;
- Тетраэдры.

Конечно-элементная сетка представлена на рисунке 3.2.

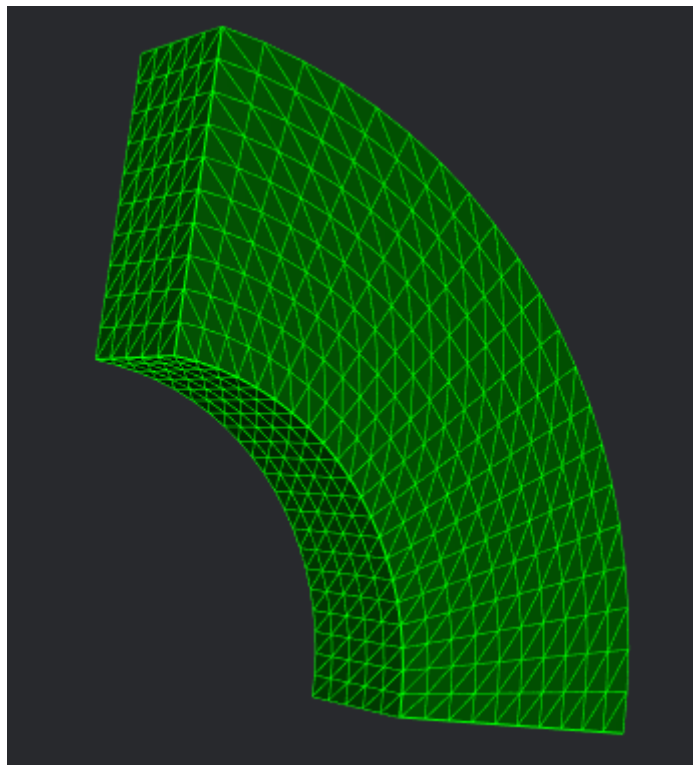


Рисунок 3.2 – Конечно-элементная сетка для cad-модели

Настройки расчета:

- Статика;
- Упругость.

## Ожидаемые результаты

Ниже приведены значения напряжений в точке N (1,0,0).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента RR вектора напряжений в узлах	Stress RR	МПа	-1.00
2	Компонента TT вектора напряжений в узлах	Stress TT	МПа	0.33
3	Компонента ZZ вектора напряжений в узлах	Stress ZZ	МПа	-0.2

## Описание алгоритма аналитического решения

Аналитические значения вычисляются по следующей формуле:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{11} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = r^2 \sigma_{22} = \frac{a^2 p_a}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{b^2}{r^2} \right) - \frac{b^2 p_b}{b^2 - a^2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$\sigma_{zz} = \sigma_{33} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \frac{a^2 p_a - b^2 p_b}{b^2 - a^2}$$

Значения проверяются в точках, где декартова система координат совпадает с цилиндрической.

Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г., 568 стр.

## Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента RR вектора напряжений в узлах	Stress RR	МПа	-1.00	-0.95	5
2	Компонента TT вектора напряжений в узлах	Stress TT	МПа	0.33	0.34	3

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
3	Компонента ZZ вектора напряжений в узлах	Stress ZZ	МПа	-0.2	-0.195	5.0

Распределение поля напряжений  $\sigma_{xx}$  представлено на рисунке 3.3.

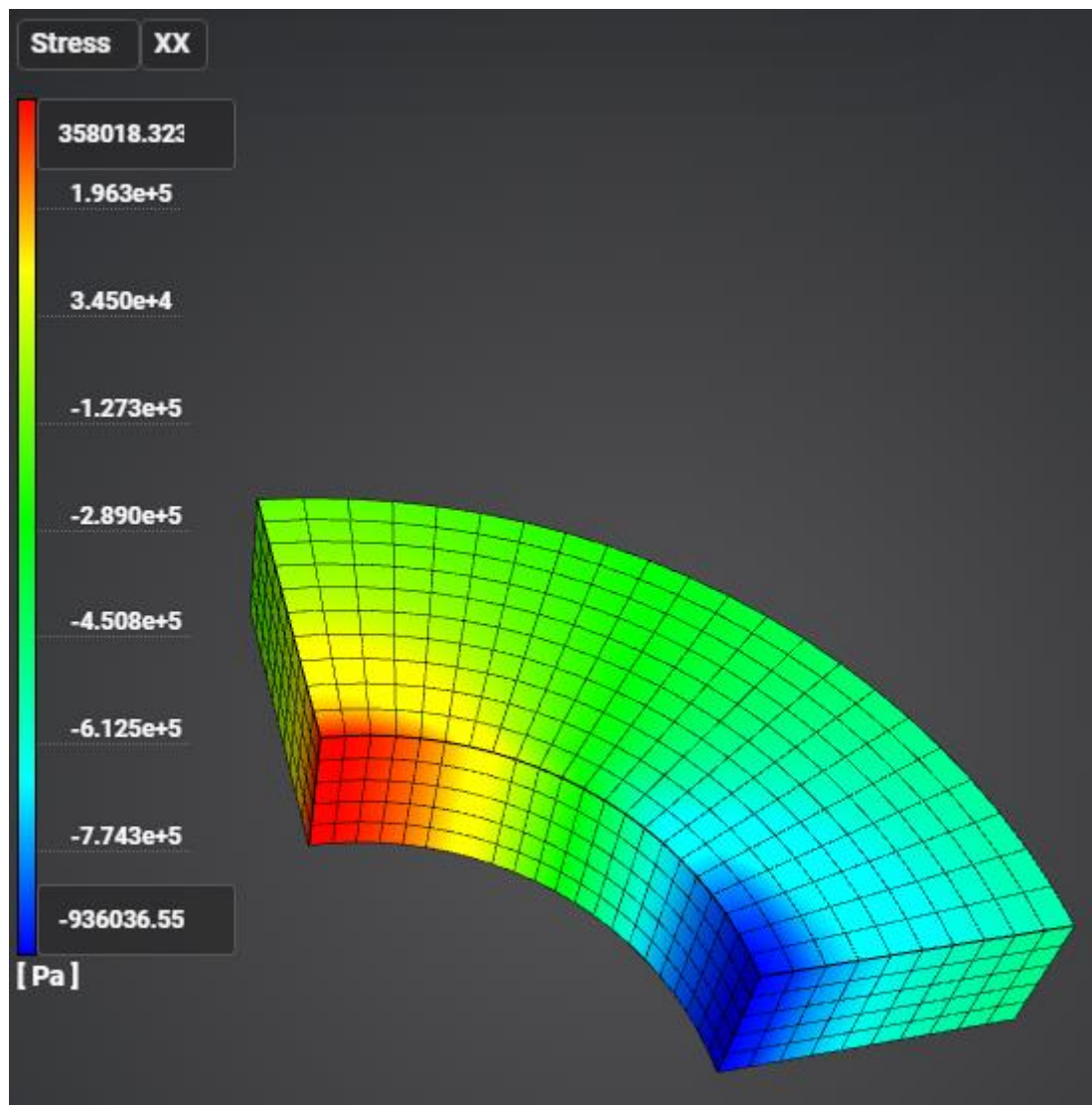


Рисунок 3.3 – Распределение напряжений Stress XX

## 3.2. Контрольная задача №3.2

### *Назначение контрольной задачи*

Куб разделен на 4 части, между которыми устанавливается условие жесткого контакта. В виду симметрии рассматривается 1/8 часть куба. На верхнюю грань приложено давление: однородное сжатие. В задаче проверяется корректность совместной работы нескольких типов элементов в одной модели.

### *Значения входных данных*

Геометрическая модель:

- CAD-модель 02.stp

Граничные условия:

- Условия симметрии;
- На верхнюю грань прикладывается давление  $1e6$  Па.

Параметры материала:

- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Модуль упругости  $E = 2e11$  Па.

Модель разделена на 4 части:

- Конечно-элементная сетка представлена на рисунке 3.4.

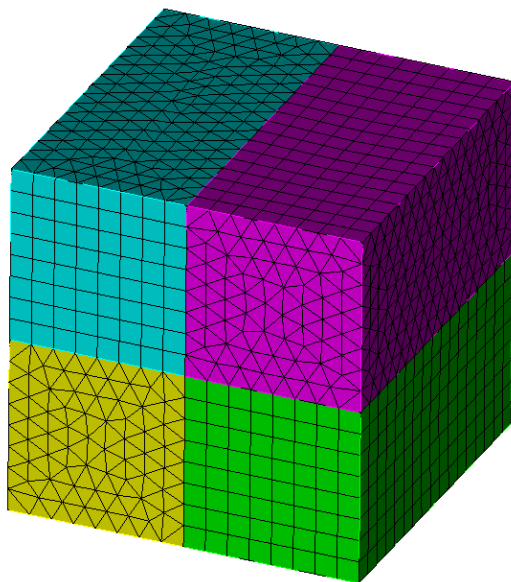


Рисунок 3.4 – Конечно-элементная сетка для cad-модели

Настройки расчета:

- Статика;
- Упругость.



## Ожидаемые результаты модуля

Ниже приведены значения для точки (5,5,-5)

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента Y вектора перемещений в узлах	Displacement Y	м	$-5 \cdot 10^{-5}$
2	Компонента YY тензора напряжений в узлах	Stress YY	МПа	-1
3	Компонента Mises тензора напряжений в узлах	Stress Mises	МПа	1

## Описание алгоритма аналитического решения

Аналитические значения вычисляются по следующей формуле [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_{yy} = P, \sigma_{xx} = \sigma_{zz} = \sigma_{xy} = 0; \\ \varepsilon_{yy} = \sigma_{yy} E \\ u_y = \varepsilon_{yy} L\end{aligned}$$

Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г., 568 стр.

## Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента Y вектора перемещений в узлах	Displacement Y	м	$-5 \cdot 10^{-5}$	$-4.997 \cdot 10^{-5}$	0.06
2	Компонента YY тензора напряжений в узлах	Stress YY	МПа	-1	-1	0
3	Компонента Mises тензора напряжений в узлах	Stress Mises	МПа	1	1	0

### 3.3. Контрольная задача №3.3

#### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается задача об одноосном растяжении куба. В виду симметрии рассматривается 1/8 часть исходной модели. На верхнюю грань прикладывается граничное условие перемещение. В данной задаче проверяется корректная работа модели при действии граничного условия перемещения.

#### *Значения входных данных*

Геометрическая модель:

- CAD-модель 04.stp

Граничные условия:

- Условия симметрии;
- Поверхность для  $z=5$ :  $u_z = -1$  м.

Параметры материала:

- Изотропный
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Сетки:

- Гексаэдры;
- Тетраэдры.

Конечно-элементная сетка представлена на рисунке 3.5.

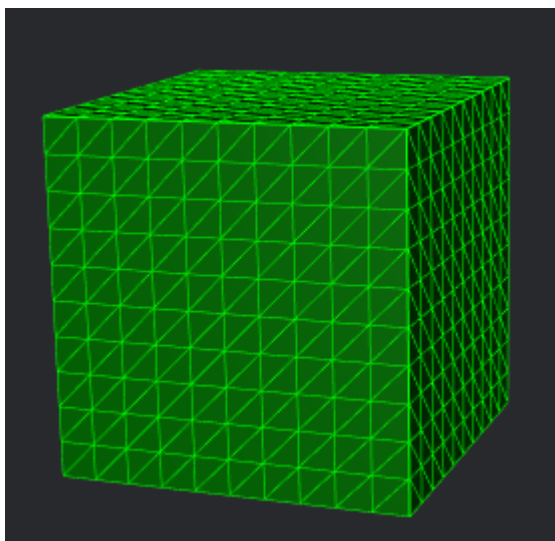


Рисунок 3.5 – Конечно-элементная сетка для cad-модели

Настройки расчета:

- Статика;
- Упругость.

### **Ожидаемые результаты**

Ниже приведены значения для перемещений, деформации и напряжений в точке с координатами (10,10,0).

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Z	м	-1
2	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement X	м	0.3
3	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Y	м	0.3
4	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain ZZ	-	-0.1
5	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain XX	-	0.03
6	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain YY	-	0.03
7	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain XY, Strain XZ, Strain YZ	-	0
8	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки	Stress ZZ	Па	-2e10
9	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки	Stress XX, Stress YY	Па	0

## Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по следующим формулам [1]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{zz} &= \frac{u_z}{L}; \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{zz}}{E}; \\ \sigma_{zz} &= \varepsilon_{zz} E; \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0; \\ u_z &= -1 \text{ м}; u_x = \frac{\varepsilon_{xx}}{L}; u_y = \frac{\varepsilon_{yy}}{L}.\end{aligned}$$

Где  $\sigma$  – тензор напряжения,  $\varepsilon$  – тензор деформаций,  $u$  – вектор перемещений,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $L$  – сторона куба.

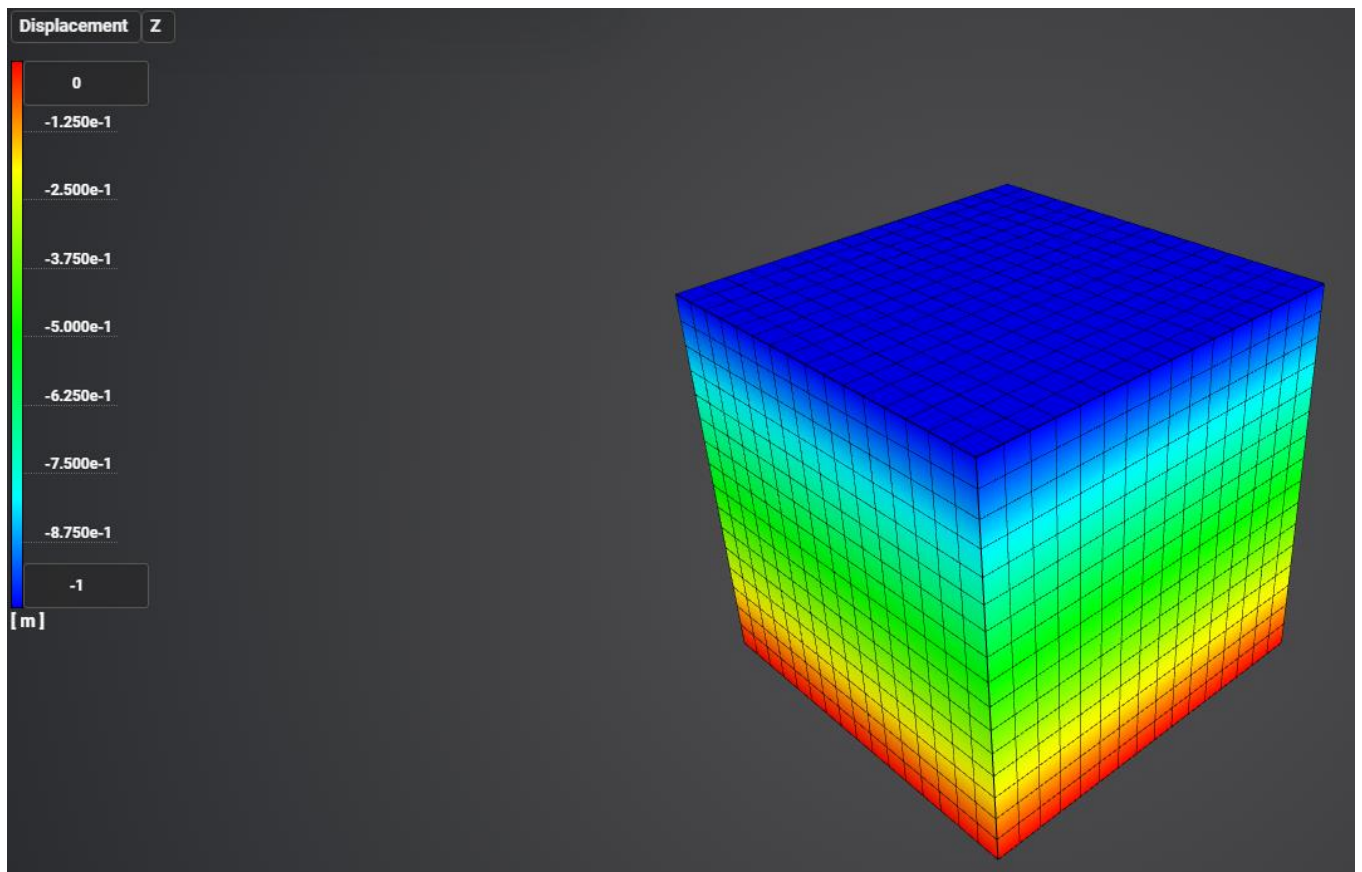
Список литературы

[1] Седов Л.И. “Механика сплошной среды, том 2”. М.: Наука, 1970г., 568 стр.

## Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Z	метр	-1	-1	0
2	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement X	метр	0.3	0.3	0
3	Компоненты вектора перемещений в узлах сетки	Displacement Y	метр	0.3	0.3	0
4	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain ZZ	-	-0.1	-0.1	0
5	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain XX	-	0.03	0.03	0
6	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain YY	-	0.03	0.03	0
7	Компоненты тензора деформаций в узлах сетки	Strain XY, Strain XZ, Strain YZ	-	0	0	0
8	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки	Stress ZZ	Па	-2e10	-2e10	0
9	Компоненты тензора напряжений в узлах сетки	Stress XX, Stress YY	Па	0	0	0

Распределение перемещения  $u_z$  представлено на рисунке 3.6.

Рисунок 3.6 – Распределение перемещения  $u_z$

### 3.4. Контрольная задача №3.4

#### Назначение контрольной задачи

В задаче рассматривается подвешенная балка с квадратным сечением, закреплённая в верхней секции. Осевая растягивающая сила приложена к свободному концу балки.

#### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Высота балки  $L = 10$  in (дюйм);
- Ширина балки  $d = 2$  in (дюйм);
- Геометрия импортируется из файла 01\_model.stp.

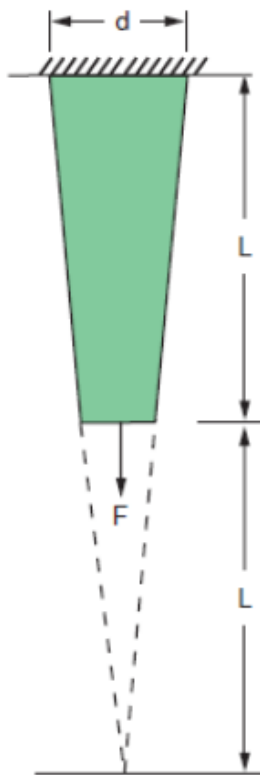


Рисунок 3.7 - Геометрическая модель задачи

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль всех осей на плоскости  $Y = 0$ ;
- Осевая сила  $F = 10\,000$  lb (фунт), приложенная ко всем узлам плоскости  $Y = L$ .

Параметры материала:

- Модуль упругости  $E = 10.4e + 6$  psi (фунт-сила на квадратный дюйм);
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ .

Параметры сетки:

- Конформная сетка второго порядка;
- Конечные элементы: гексаэдры.

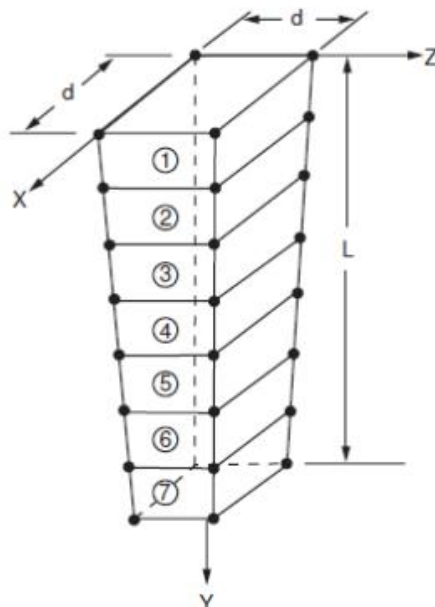


Рисунок 3.8 - Конечно-элементная сетка модели

### Ожидаемые результаты модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений в точке (1, L/2, 1)	Stress YY	psi	4444

### Описание алгоритма численного решения

В качестве эталонного выступает решение ANSYS задача VM37 [1].

Список литературы

[1] Verification Manual for the Mechanical APDL Application, SAS IP, Inc 2009

## Результаты расчета

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента $\sigma_{yy}$ тензора напряжений в точке (1, L/2, 1)	Stress YY	psi	4444	4466	0.5

Распределение поля напряжений  $\sigma_{yy}$  представлено на рисунке 3.9.

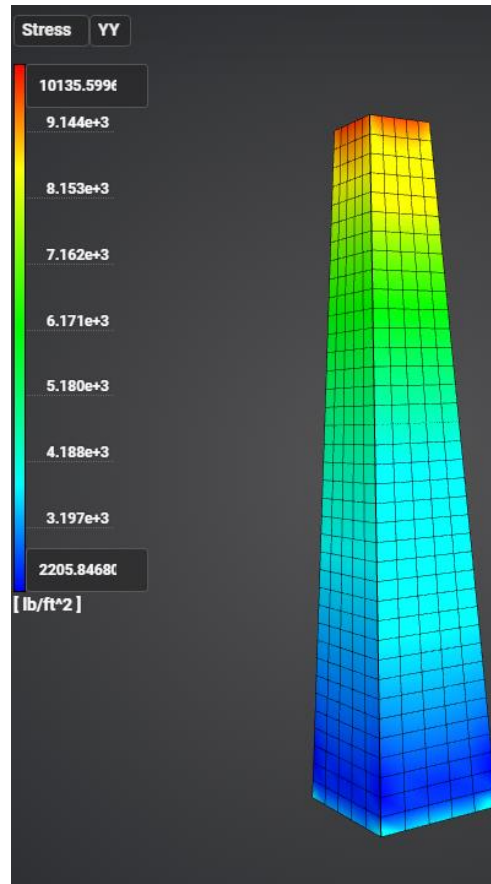


Рисунок 3.9 – Распределение напряжения  $\sigma_{yy}$



### 3.5. Контрольная задача №3.5

#### Назначение контрольной задачи

Цель данной задачи - проверка корректности решения в облачном сервисе составной cad-модели с применением жесткого контакта.

#### Значения входных данных

Геометрическая модель:

- Геометрия импортируется из файла 02\_model.stp.

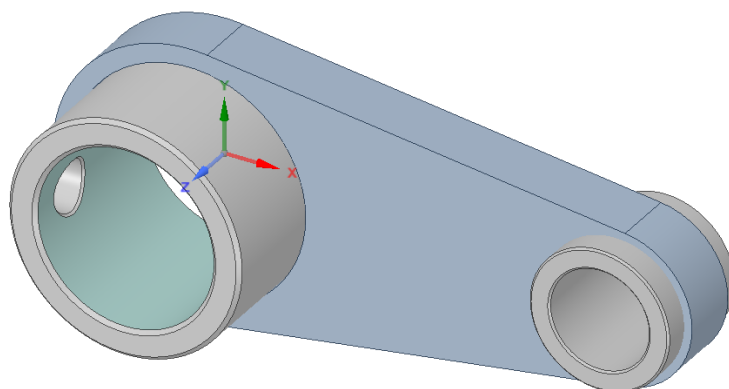


Рисунок 3.10 - Геометрическая модель рассматриваемой детали

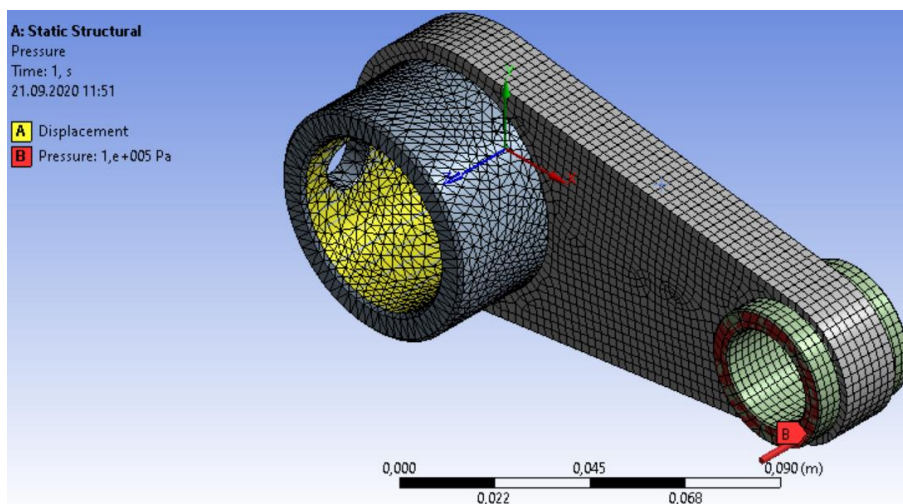


Рисунок 3.11 - Модель с отображенной сеткой, закреплением по координатам x, y, z, давлением

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 2e11$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Плотность  $\rho = 7850 \text{ кг} / \text{м}^3$ .

Параметры сетки:

- Конечные элементы второго порядка.

Настройки расчета:

- Статический линейный расчет.

### *Ожидаемые результаты модуля*

Ниже приведены численные значения для перемещений.

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Максимальное значение полных перемещений	Displacement sum	м	3.2092e-6

### *Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения*

Приведено в разделе 2.12.

### *Результаты расчета*

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Максимальное значение полных перемещений	Displacement sum	м	3.2092e-6	3.095e-6	3.69

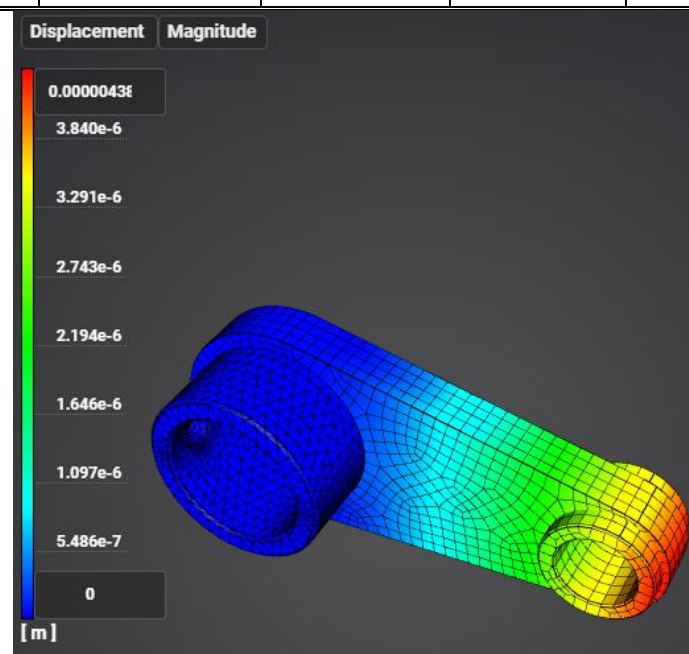


Рисунок 3.12 - Распределение перемещений

### 3.6. Контрольная задача №3.6

Рассматривается задача о статическом температурном нагружении поллой сферы. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

#### Значения входных данных модуля

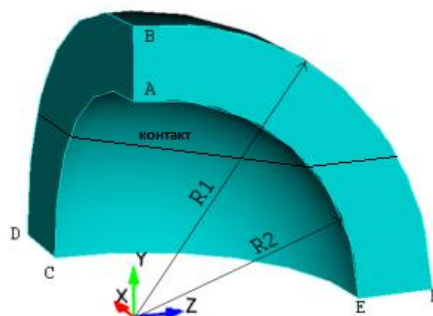


Рисунок 3.13 - Геометрическая модель для поллой сферы

Геометрическая модель:

- Радиус  $R_1 = 4$  м;
- Радиус  $R_2 = 3$  м;
- В силу симметрии задачи рассматривается 1/8 сферы.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси  $X$  на плоскости  $ABEF$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Y$  на плоскости  $EFCD$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Z$  на плоскости  $ABCD$ ;
- Сплошная температура на внутренней поверхности сферы  $ACE$ ;
- Температура  $T = 30^\circ\text{C}$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Температурное расширение  $\mu = 0.0001$  1/°C.

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Жесткий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- Упругость, теплопроводность..

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (4, 0, 0)	Displacement X	м	0.012

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по формуле [1]:

$$u_R = \mu TR_1.$$

Список литературы

[1] Боли Б., Дж.Уэйнер. Теория температурных напряжений. М., Наука, 1974 г. –259 стр.

### Результаты в Prove.Design

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (4, 0, 0)	Displacement X	м	0.012	0.012	0.00%



Рисунок 3.14 - Результат перемещений X

### 3.7. Контрольная задача №3.7

#### *Назначение контрольной задачи*

Рассматривается задача о статическом температурном нагружении сплошной сферы. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

#### *Значения входных данных модуля*

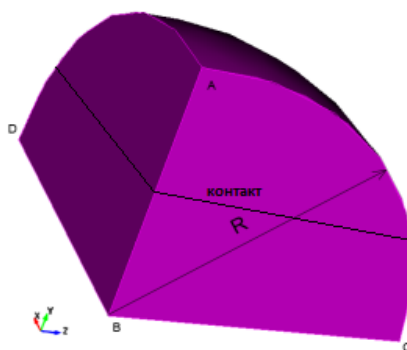


Рисунок 3.15 - Геометрическая модель для сплошной сферы

Геометрическая модель:

- Радиус  $R = 4$  м;
- В силу симметрии задачи рассматривается  $1/8$  сферы.

Граничные условия:

- Нулевые перемещения вдоль оси  $X$  на плоскости  $ABC$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Y$  на плоскости  $DVC$ ;
- Нулевые перемещения вдоль оси  $Z$  на плоскости  $ABD$ ;
- Сплошная температура на внутренней поверхности сферы  $ACD$ ;
- Температура  $T = 30^\circ\text{C}$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 200$  ГПа;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Температурное расширение  $\mu = 0.0001$   $1/^\circ\text{C}$ .

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Жесткий;

- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- Упругость, теплопроводность.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (0, 4, 0)	Displacement X	м	0.012

### Описание алгоритма аналитического решения

Значения вычислены по формуле [1]:

$$u_R = \mu T R_1.$$

### Результаты в Prove.Design

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (0, 4, 0)	Displacement X	м	0.012	0.012	0.00%

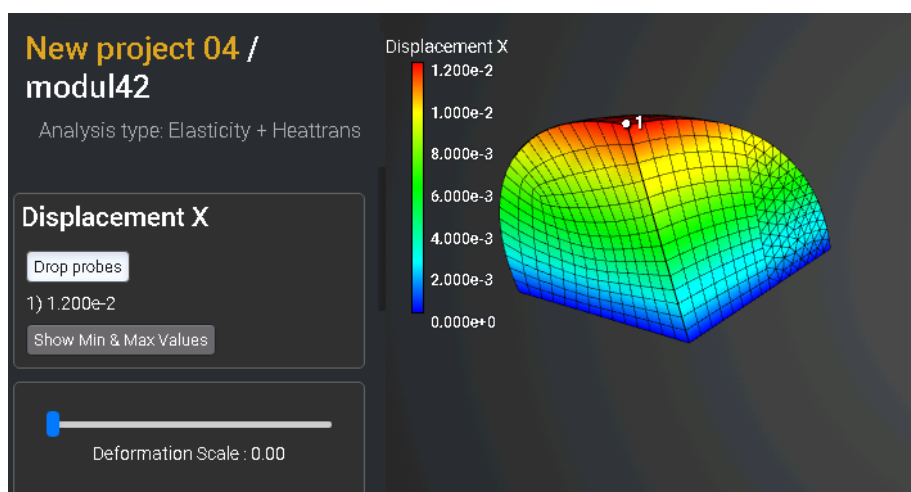


Рисунок 3.16 - Результат перемещений X

Список литературы

[1] Боли Б., Дж.Уэйнер. Теория температурных напряжений. М., Наука, 1974 г. –259 с.

### 3.8. Контрольная задача №3.8

#### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача трёхмерная задача о полом цилиндра, находящемся под воздействием постоянных температур. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

#### Значения входных данных модуля

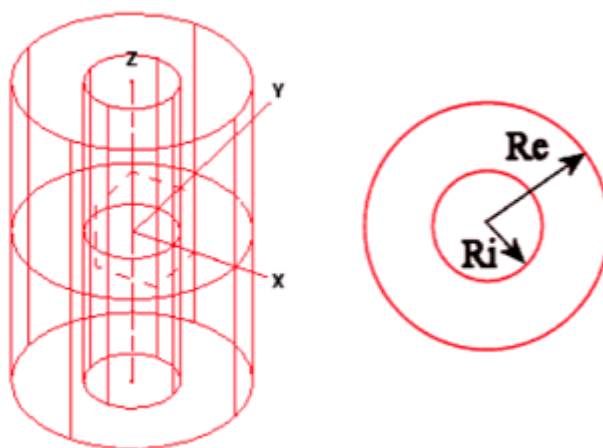


Рисунок 3.17 - Геометрическая модель полого цилиндра

Геометрическая модель:

- Радиус  $R_i = 0.30$  м;
- Радиус  $R_e = 0.35$  м.

Граничные условия:

- Внутренняя температура  $T_i = 100$  °С;
- Внешняя температура  $T_e = 20$  °С;
- Торцы цилиндра закреплены по  $Z$ .

Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности  $V = 1$  Вт/(м · °С).

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 1 порядка.

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- Теплопроводность.

### *Значения выходных данных модуля*

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Температура в точке (0.3,0,0)	Temperature	°C	100.0
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1730
3	Температура в точке (0.31,0,0)	Temperature	°C	82.98
4	Тепловой поток в точке (0.31,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1674
5	Температура в точке (0.32,0,0)	Temperature	°C	66.51
6	Тепловой поток в точке (0.32,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1622
7	Температура в точке (0.33,0,0)	Temperature	°C	50.54
8	Тепловой поток в точке (0.33,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 573
9	Температура в точке (0.34,0,0)	Temperature	°C	35.04
10	Тепловой поток в точке (0.34,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 526
11	Температура в точке (0.35,0,0)	Temperature	°C	20.00
12	Тепловой поток в точке (0.35,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 483

В качестве эталонного выступает решение из Nastran Verification Manual [1].



## Результаты в Prove.Design

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Температура точке (0.3,0,0)	Temperature	°C	100.0	100	0.00%
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1730	1717.36	0.74%
3	Температура точка (0.31,0,0)	Temperature	°C	82.98	82.92	0.07%
4	Тепловой поток в точке (0.31,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1674	1676	-0.12%
5	Температура точка (0.32,0,0)	Temperature	°C	66.51	66.51	0.00%
6	Тепловой поток в точке (0.32,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1622	1622	0.00%
7	Температура точка (0.33,0,0)	Temperature	°C	50.54	50.44	0.2%
8	Тепловой поток в точке (0.33,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 573	1574	-0.10%
9	Температура точка (0.34,0,0)	Temperature	°C	35.04	35.06	-0.06%
10	Тепловой поток в точке (0.34,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 526	1523.94	0.13%
11	Температура точка (0.35,0,0)	Temperature	°C	20.00	20	0.00%
12	Тепловой поток в точке (0.35,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	1 483	1492.7	-0.65%

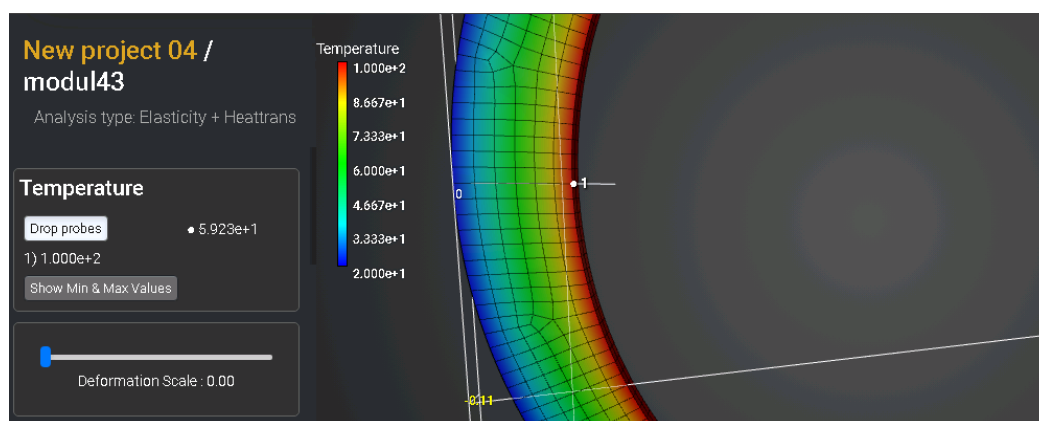


Рисунок 3.18 - Результат температуры в точке (0.3,0,0)

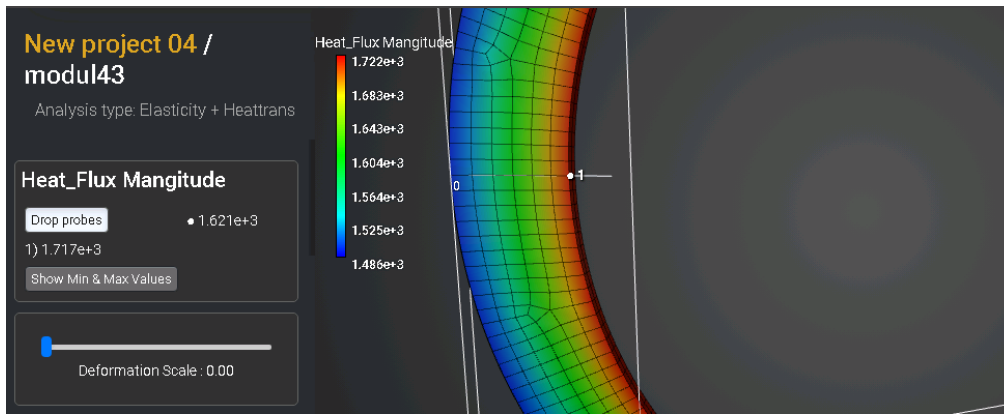


Рисунок 3.19 - Результат теплового потока в точке (0.3,0,0)

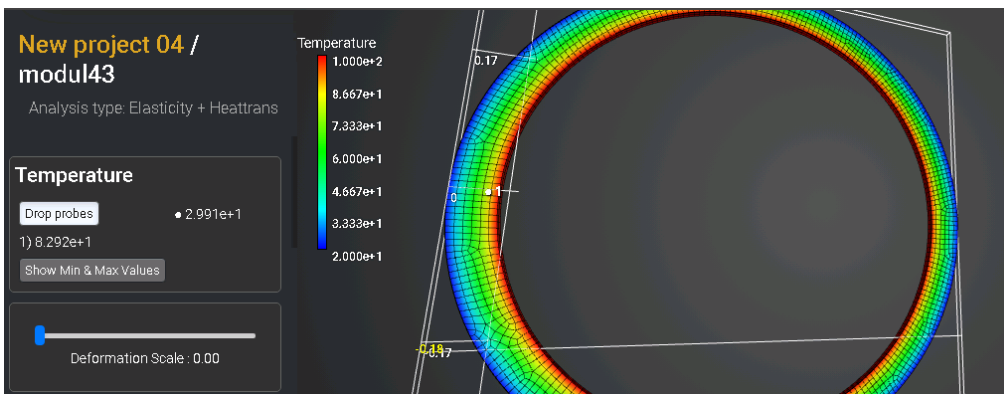


Рисунок 3.20 - Результат температуры в точке (0.31,0,0)

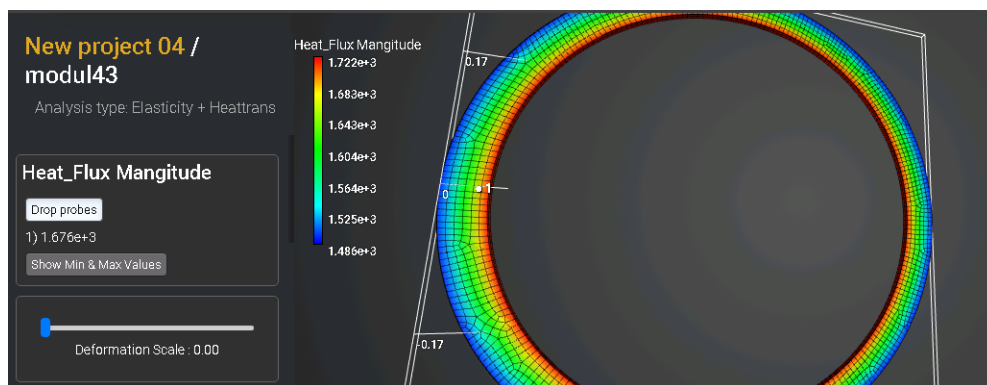


Рисунок 3.21 - Результат теплового потока в точке (0.31,0,0)

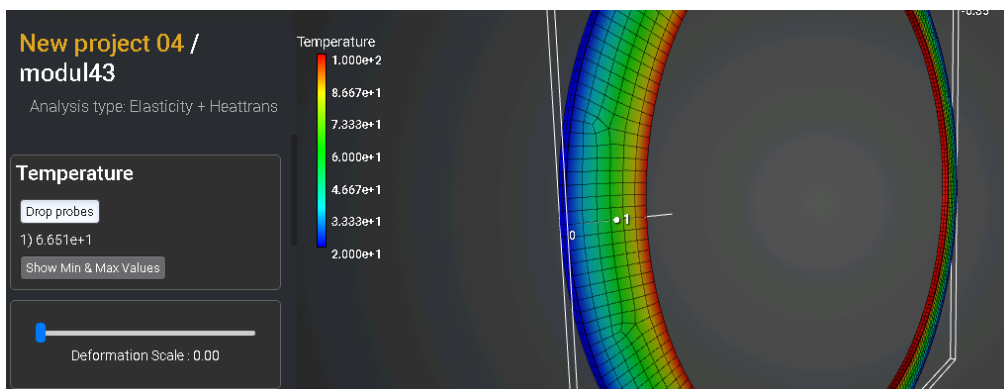


Рисунок 3.22 - Результат температуры в точке (0.32,0,0)

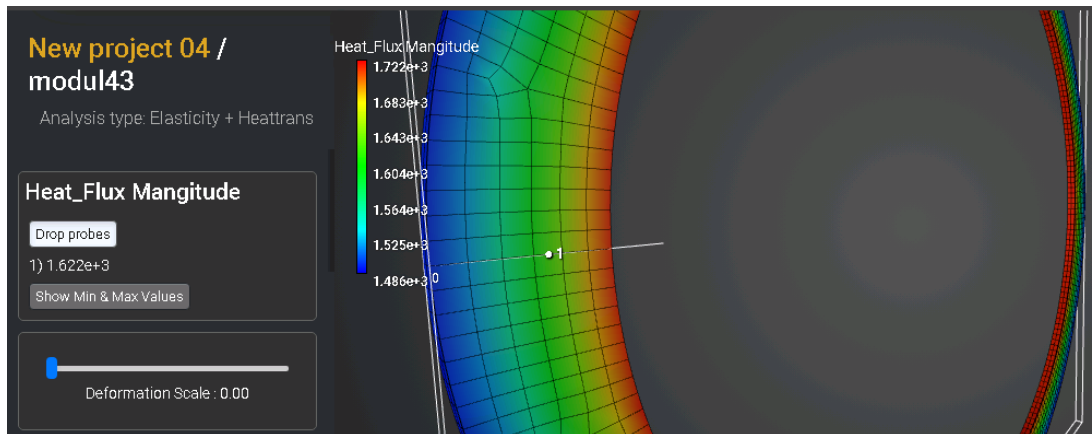


Рисунок 3.23 - Результат теплового потока в точке (0.32,0,0)

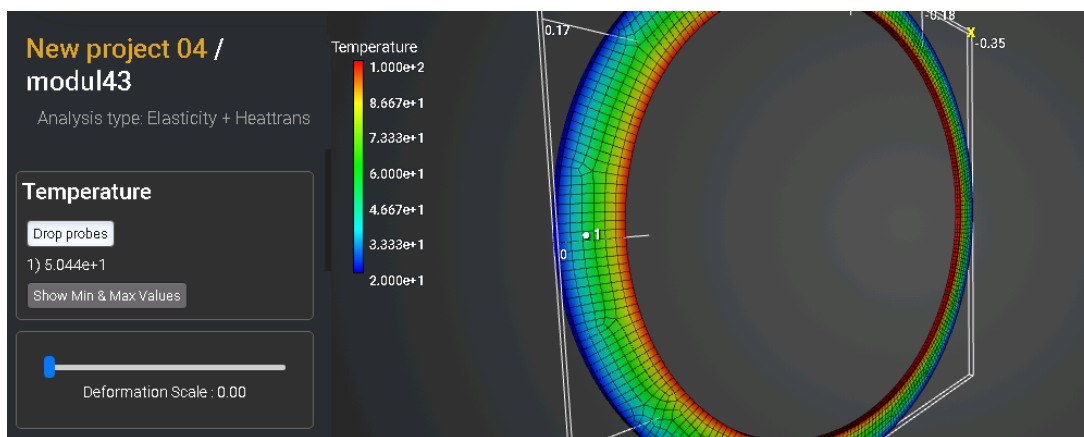


Рисунок 3.24 - Результат температуры в точке (0.33,0,0)

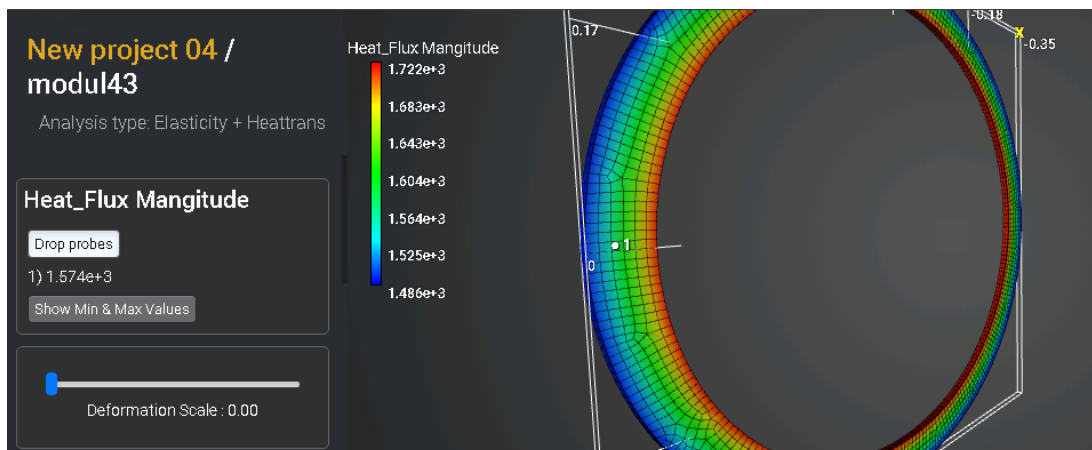


Рисунок 3.25 - Результат теплового потока в точке (0.33,0,0)

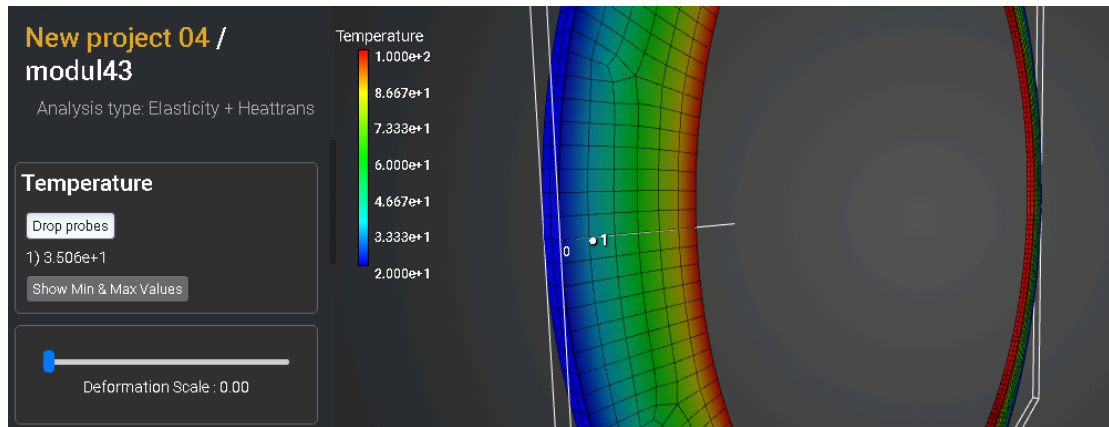


Рисунок 3.26 - Результат температуры в точке (0.34,0,0)

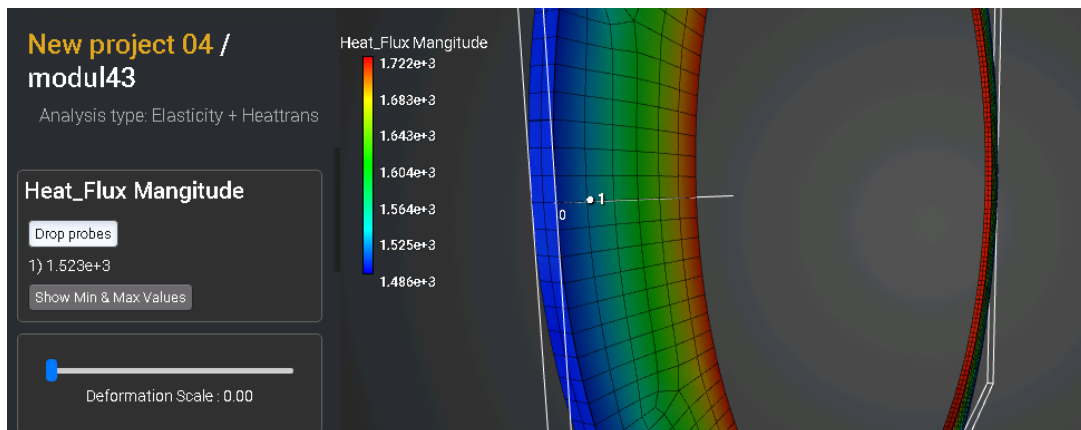


Рисунок 3.27 - Результат теплового потока в точке (0.34,0,0)

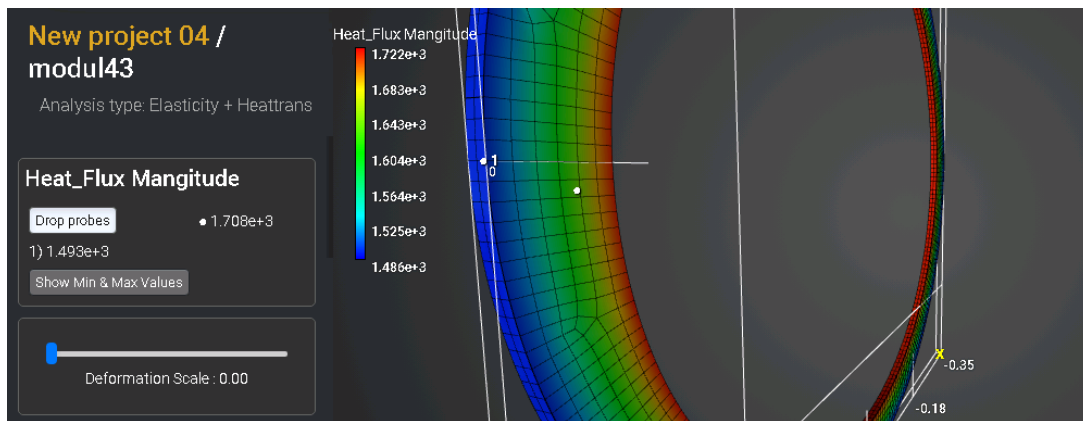


Рисунок 3.28 - Результат теплового потока в точке (0.35,0,0)

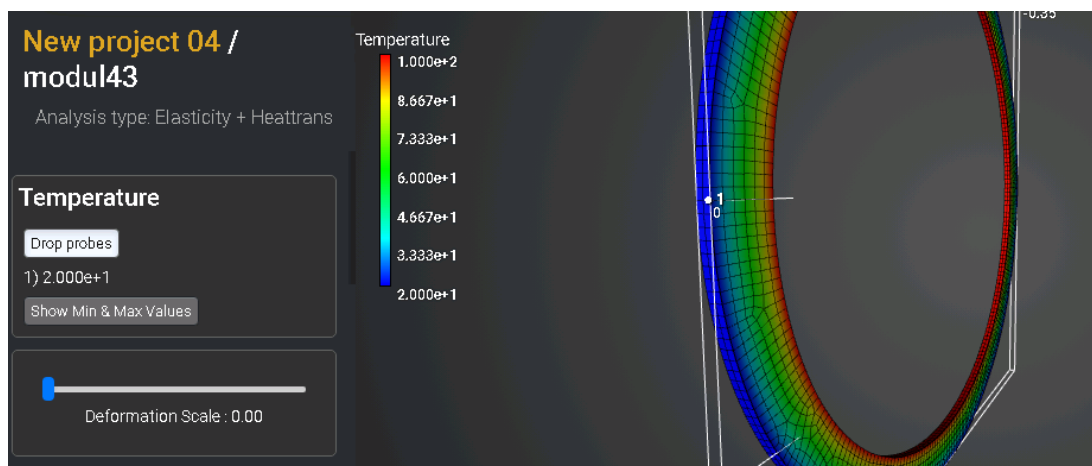


Рисунок 3.29 - Результат температура в точке (0.35,0,0)

### Список литературы

[1] Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA01/89

### 3.9. Контрольная задача №3.9

#### Назначение контрольной задачи

Рассматривается задача трёхмерная задача о полом цилиндра, находящемся под воздействием постоянных температур. Модель разделена на две части, между которыми действует условие жесткого контакта. Контрольная задача предназначена для проверки корректности расчета при статическом температурном нагружении с учетом жесткого контакта.

#### Значения входных данных модуля

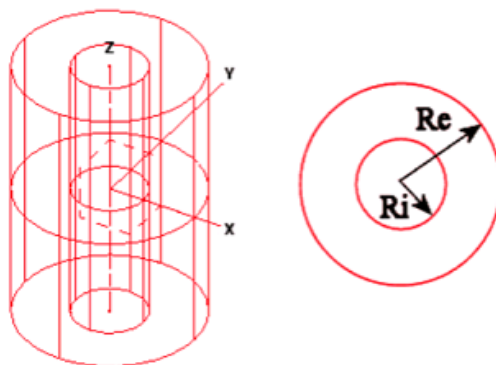


Рисунок 3.30 - Геометрическая модель полого цилиндра

Геометрическая модель:

- Радиус  $R_i = 0.30$  м;
- Радиус  $R_e = 0.391$  м.

Граничные условия:

- Конвекция на внутренней поверхности  $h_i = 150 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{°C}}$ ;
- Внутренняя температура  $T_i = 500$  °C;
- Конвекция на внешней поверхности  $h_e = 142 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{°C}}$ ;
- Внешняя температура  $T_e = 20$  °C;
- Торцы цилиндра закреплены по Z.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Коэффициент теплопроводности  $V = 40$  Вт/(м · °C).

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдры 2 порядка.

Настройки контакта:

- Общий;
- Метод: авто.

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- Теплопроводность.

### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Температура в точке (0.3,0,0)	Temperature	°C	272.3
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	3.416e4
3	Температура в точке (0.391,0,0)	Temperature	°C	205.1
4	Тепловой поток в точке (0.391,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	2.628e4

### Результаты в Prove.Design

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Погрешность, %
1	Температура в точке (0.3,0,0)	Temperature	°C	272.3	272.3	0,00%
2	Тепловой поток в точке (0.3,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	3.416e4	3.382 e4	0,1%
3	Температура в точке (0.391,0,0)	Temperature	°C	205.1	205.1	0,00%
4	Тепловой поток в точке (0.391,0,0)	Heat Flux	Вт/м2	2.628e4	2.642e4	-0,53%

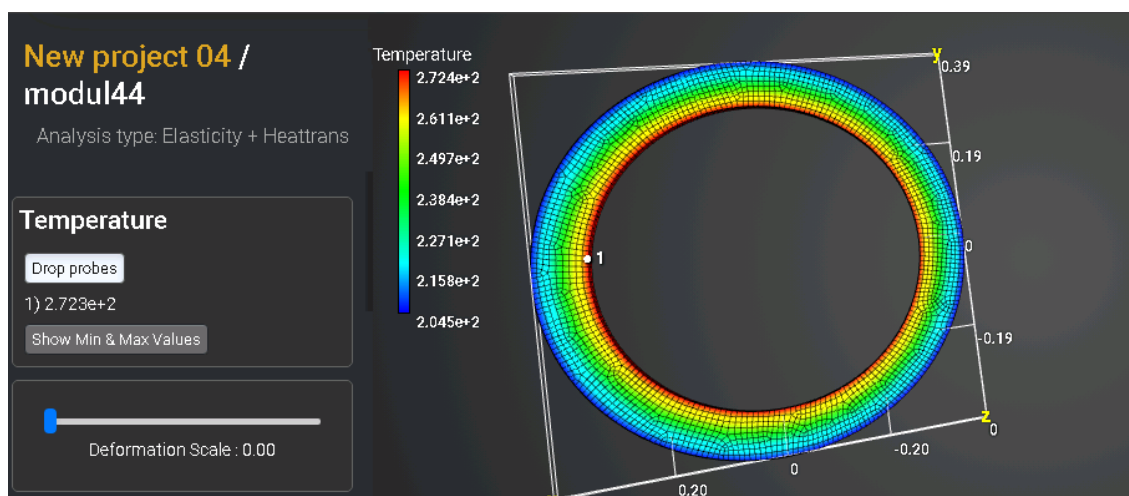


Рисунок 3.31 - Результат температуры в точке (0.3,0,0)

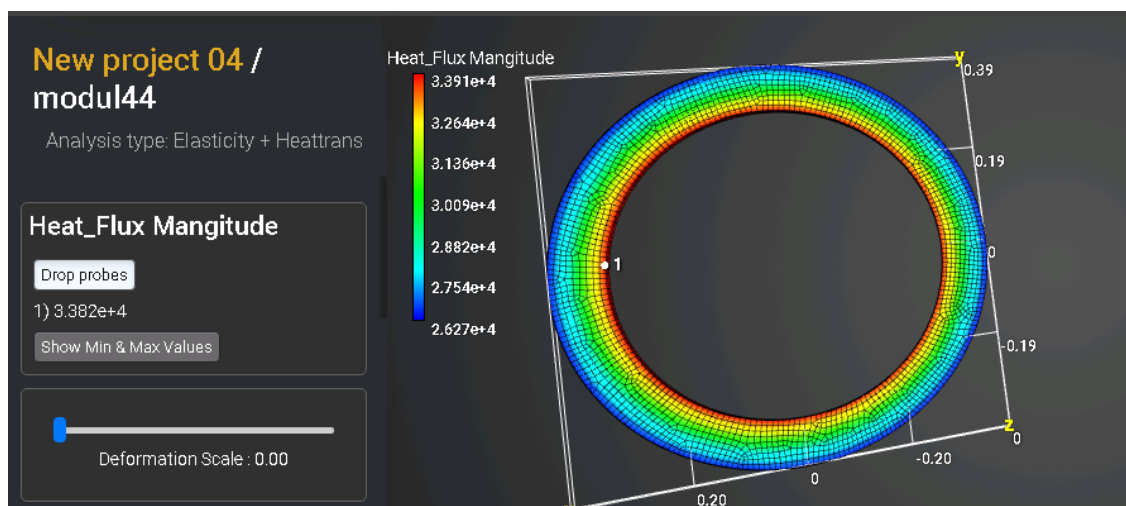


Рисунок 3.32 - Результат теплового потока в точке (0,3,0,0)

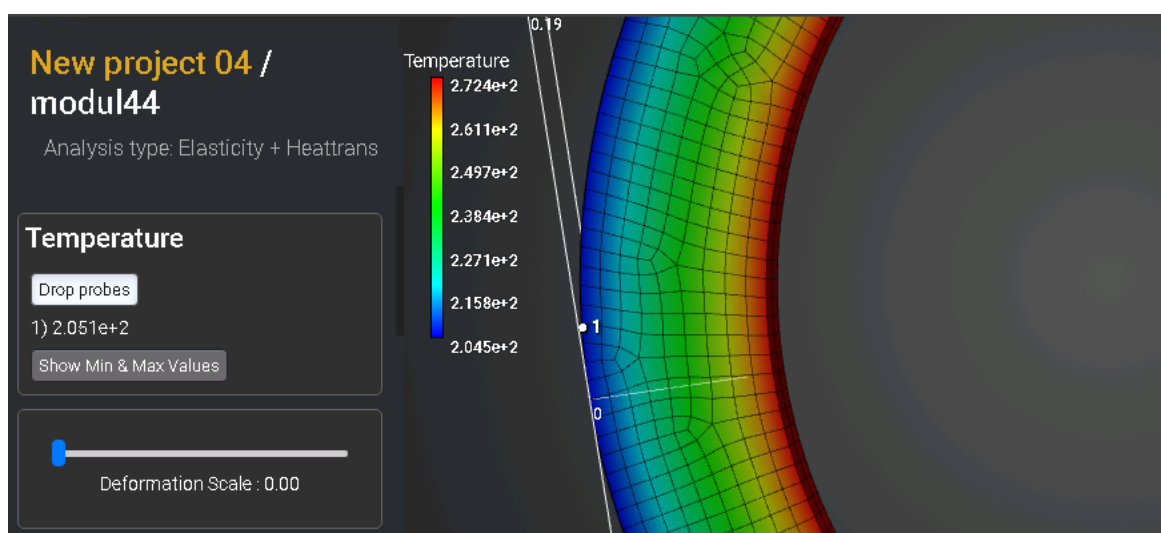


Рисунок 3.33 - Результат температуры в точке (0,391,0,0)

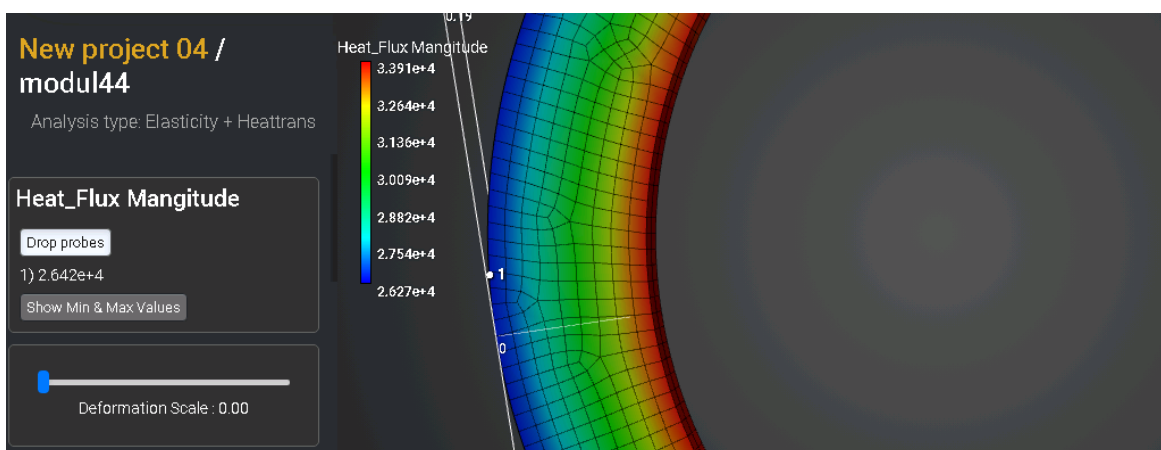


Рисунок 3.34 - Результат теплового потока в точке (0,391,0,0)

### Список литературы

[1] Societe Francaise des Mecaniciens. Guide de validation des progiciels de calcul de structures. Paris, Afnor Technique, 1990. Test No. TPLA03/89



### 3.10. Контрольная задача № 3.10

#### *Назначение контрольной задачи*

Проверка правильности расчета нагружения полого цилиндра внутренним давлением 24 Н/мм<sup>2</sup>. Для задания закона пластичности используется упрочнение.

#### *Значения входных данных модуля*

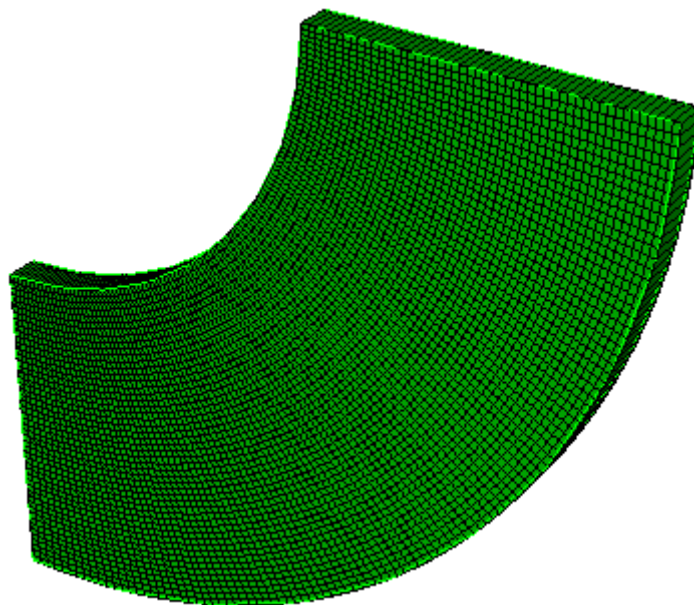


Рисунок 2.55 - Геометрическая модель полого цилиндра

Геометрическая модель:

- Рассматривается  $\frac{1}{4}$  часть модели;
- Высота  $H=100$  мм;
- Радиус  $R_i = 100$  мм;
- Радиус  $R_e = 200$  мм.

#### *Граничные условия:*

- На внутренний радиус действует давление 24;
- Закрепление из условий симметрии.

Параметры материала:

- Модуль Юнга  $E = 21000$  Па;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Предел прочности = 4219.2;
- Предел текучести = 24;
- Предельные деформации = 1.

Настройки расчета:

- Статический анализ;
- Пластичность.

### **Значения выходных данных модуля**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Напряжение $\sigma_{\text{Mises}}$ в точке (100, 0, 0)	$\sigma_{\text{Mises}}$	МПа	39.564
2	Перемещения $u_x$ в точке (100, 0, 0)	$u_x$	мм	0.4044
3	Напряжение $\sigma_{\text{Mises}}$ в точке (100, 0, 0)	$\sigma_{\text{Mises}}$	МПа	24.027
4	Перемещения $u_x$ в точке (100, 0, 0)	$u_x$	мм	0.233

### **Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения**

В качестве эталонного выступает решение из Nafems [1].

Кроме того, проводилось сравнение с численным решением в пакете Ansys.

Для получения результатов использовался программный скрипт для Ansys:

```
FINISH
/CLEAR
/PREP7

MPTEMP,1,0
et,1,plane183
KEYOPT,1,3,2
MPDATA,EX,1,,2.1e+4
MPDATA,PRXY,1,,0.3
TB,BISO,1,,,
TBMODIF,1,1,0
TBMODIF,2,1,24
TBMODIF,3,1,4200

PCIRC,200,100,0,90

AESIZE,1,5
!MSHAPE,1 !раскомментировать для треугольников
AMESH,1

DL,2,1,UX,0
DL,4,1,UY,0
SFL,3,PRES,24 !500 for findefs

/SOL
ANTYPE,0
NLGEOM,0
NSUBST,10,30,10
!OUTRES,ERASE
!OUTRES,ALL,ALL
!RESCTRL,DEFINE,ALL,ALL,1
TIME,1
```



SOLVE

Список литературы

[1] NAFEMS R0072 Introduction to Non-Linear Finite Element Analysis (Plasticity example 2: 2D Plane stress, случай изотропного упрочнения)

**Результаты в Prove.Design**

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Напряжение $\sigma_{Mises}$ в точке (100, 0, 0)	Stress Mises	МПа	39.564	39.8472	0.72
2	Перемещения $u_x$ в точке (100, 0, 0)	Displacement X	мм	0.4044	0.403928	0.12
3	Напряжение $\sigma_{Mises}$ в точке (200, 0, 0)	Stress Mises	МПа	24.027	23.9906	0.15
4	Перемещения $u_x$ в точке (200, 0, 0)	Displacement X	мм	0.233	0.232638	0.16

### 3.11. Контрольная задача №3.11. Упруго-пластическое равновесие полого шара.

#### Назначение контрольной задачи

Рассматривается упруго-пластическое равновесие полого шара, испытывающего внутреннее давление. В силу симметрии выделяется сегмент шара, расположенный в первом октанте.

#### Значения входных данных модуля

Геометрическая модель:

- Внутренний радиус шара:  $a = 2.5$  м
- Внешний радиус шара:  $b = 5$  м;
- В силу симметрии задачи рассматривается 1/8 сферы.

Граничные условия:

- На координатных плоскостях перемещения по перпендикулярам равны нулю
- На внутренней поверхности приложено давление  $p = 30$  Па.

Параметры материала:

- Изотропный;
- Модуль упругости  $E = 21e3$  Н/м<sup>2</sup>;
- Коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ;
- Предел текучести  $\sigma_y = 24$  Н/м<sup>2</sup>.

Построение конечно-элементной сетки:

- Тетраэдральная сетка.

Настройки расчета:

- Статический расчет;
- Упругость, Пластичность.

#### Значения выходных данных модуля

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (3,0,0)	Displacement X	м	$4.219 \cdot 10^{-3}$

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение
2	Компонента XX тензора напряжений в узлах сетки в точке (3,0,0)	Stress XX	Па	-21.249
3	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (4.5,0,0)	Displacement X	м	$2.165 \cdot 10^{-3}$
4	Компонента XX тензора напряжений в узлах сетки в точке (3,0,0)	Stress XX	Па	-2.908

### Описание алгоритма численно приближенного аналитического решения

Напряженно-деформированное состояние определено по формулам [1]:

- В пластической зоне ( $a \leq r \leq c$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= 2\sigma_y \ln(r/a) - p, & \sigma_{\phi\phi} &= \sigma_{rr}(r) + \sigma_y, \\ \varepsilon_{rr} &= \psi(r) \cdot (\sigma_{rr}(r) - \sigma(r)) + k \cdot \sigma(r), & \varepsilon_{\phi\phi} &= \psi(r) \cdot (\sigma_{\phi\phi}(r) - \sigma(r)) + k \cdot \sigma(r), \\ u_{plast} &= \varepsilon_{\phi\phi} \cdot r \end{aligned}$$

где

$$\psi(r) = -2k + \left(\frac{1}{2G} + 2k\right) \cdot \left(\frac{c}{r}\right)^3, \quad k = \frac{1-2\nu}{E}, \quad \sigma(r) = \frac{1}{3}(\sigma_{rr}(r) + 2\sigma_{\phi\phi}(r)),$$

$c$  – граница пластической зоны, находящейся из уравнения

$$\ln\left(\frac{c}{a}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}\right)^3 = \frac{p}{2\sigma_y} - \frac{1}{3}$$

- В упругой зоне ( $c \leq r \leq b$ )

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r) &= p^* \cdot (1 - (b/r)^3), & \sigma_{\phi\phi}(r) &= p^* \cdot (1 + b^3/(2r^3)) \\ 1.1. \quad \varepsilon_{rr} &= du_{elastic}/dr, & \varepsilon_{\phi\phi} &= u_{elastic}/r, \end{aligned}$$

$$\text{где } p^* = (p - 2\sigma_y \ln(c/a)) \cdot \left(\frac{c^3}{b^3 - c^3}\right), \quad u_{elastic} = p^* \cdot \left(k + \frac{b^3}{4Gr^3}\right)$$

Список литературы

[1] Л.М. Качанов. Основы теории пластичности. М., 1969г., 420 стр

### *Результаты в Prove.Design*

№	Наименование переменной	Обозначение переменной	Размерность	Значение	Результаты CAE Fidesys	Относительная погрешность, %
1	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (3, 0, 0)	Displacement X	м	$4.219 \cdot 10^{-3}$	$4.1953 \cdot 10^{-3}$	0.56
2	Компонента XX тензора напряжений в узлах сетки в точке (3, 0, 0)	Stress XX	Па	-21.249	-21.252	0.01
3	Компонента X вектора перемещений в узлах сетки в точке (4.5, 0, 0)	Displacement X	м	$2.165 \cdot 10^{-3}$	$2.150 \cdot 10^{-3}$	0.71
4	Компонента XX тензора напряжений в узлах сетки в точке (4.5, 0, 0)	Stress XX	Па	-2.908	-2.90437	0.12



## 4. Контактная информация

<http://www.cae-fidesys.com>

[support@cae-fidesys.com](mailto:support@cae-fidesys.com)

[+7 \(495\) 177-36-18](tel:+7(495)177-36-18)